

Lógica matemática

Um sistema científico de raciocínio

Carlos Magno Corrêa Dias

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade principal apresentar, de forma global e sistematizada, considerações introdutórias sobre o Cálculo Proposicional em Lógica Matemática bem como caracterizar algumas das relações existentes entre Matemática e Lógica Matemática.

Carlos Magno Corrêa Dias é Bacharel em Matemática, licenciado em Ciências, com habilitação plena em Matemática, pós-graduado em Sistemas de Computação e é pós-graduado em Didática do Ensino Superior, títulos obtidos pela PUC-PR. É mestrando em Educação/Lógica pela UFPR e professor do Departamento de Matemática do CEFET-PR. É professor do Departamento de Matemática e Física da PUC-PR e professor e Chefe do Departamento de Ciências Exatas das Faculdades Positivo.

Em sentido lato, quando instado a caracterizar o significado da Lógica Matemática, quanto a sua abrangência e/ou a sua gênese, proclama-se que a mesma congrega, em seus fundamentos, duas dimensões basilares; quais sejam: uma dimensão explicativa e uma dimensão algorítmica (ou operatória). Em sua dimensão explicativa (semântica e sintática), a Lógica Matemática constitui-se de um instrumento de análise capaz de estruturar os componentes do discurso matemático em termos de uma linguagem formal (de uma metalinguagem), cuja consistência é ditada pelos conceitos lógicos que lhe asseguram o rigor e a consistência. Já, em sua dimensão algorítmica, a Lógica Matemática vem substituir a argumentação intuitiva pelas regras rígidas de um cálculo, o qual, por sua vez, objetiva determinar em que consiste a demonstrabilidade e/ou a não demonstrabilidade de um dado enunciado a partir de determinadas hipóteses, bem como em que consiste a indecidibilidade da questão da demonstrabilidade de uma proposição a partir de certas conjeturas.

Partindo-se, assim, da instância relacional onde a Lógica Matemática se desenvolve, verifica-se que esta tem por uma de suas finalidades principais precisar o conceito de demonstração em Matemática, sendo, pois, em essência, tarefa precípua da mesma investigar, com rigor formal, a natureza da prática dedutiva em Matemática. Porquanto, os estudos lógicos, em sentido restritivo, constituem requisitos fundamentais para se atribuir às linguagens formais, de que trata a Matemática, a consistência e as técnicas de inferência que estruturam o raciocínio matemático, para, ulteriormente, promulgar a exteriorização decodificada de métodos e técnicas correlativas.

A Lógica Matemática (ou Simbólica, ou Algorítmica), enquanto ciência das leis do raciocínio analítico-dedutivo, por outro lado, se desenvolve, tem sua estruturação processual, na instância das relações abstratas dos símbolos e se detém à combinação destes mesmos símbolos entre si quando, então, passa a estudar as inferências (via argumentação dedutiva) do ponto de vista da validade da estrutura sentencial (estrutura proposicional), subtraindo o significado concreto de sua determinação para atingir a coerência (e consistência de raciocínio). Abstraindo o significado relativo dos elementos constituintes de um determinado sistema (universo relacional), passa a estabelecer ou, antes, considerar normas, princípios e/ou postulados que possibilitem a difusão coerente do pensamento em termos de juízos necessários; servindo-se, para tanto, das estruturas em sua constituição formal. É, pois, a Lógica Matemática, um sistema científico de raciocínio onde a axiomatização, o formalismo e o simbolismo são suas características fundamentais.

Em sentido mais amplo, pode-se dizer que à Lógica Matemática cabe a consolidação dos meios

pelos quais as inferências (qualificadas na análise inferencial) possam ser analisadas a partir da formalização e do relacionamento intrínseco entre os entes de um dado sistema, consignando o raciocínio em termos de operações e relações lógicas. Porquanto, desdobra-se, a Lógica Matemática, na especificação de uma linguagem proposicional e na determinação de princípios primeiros que norteiam a fundamentação e o desenvolvimento de um sistema formal de raciocínio. Sedimentada nestas bases, emanam, pela característica ímpar de sua estruturação, dois cálculos específicos: o Cálculo Proposicional (ou Sentencial) e o Cálculo dos Predicados.

O Cálculo Proposicional encerra um aparato conceitual capaz de determinar, ou antes de verificar, as relações lógicas válidas (legítimas) entre unidades mínimas de análise, bem como, possibilita o estabelecimento de procedimentos de decisão que permitem contextualizar a “verdade” ou a “falsidade” (“não-verdade”) de uma estrutura analítica a partir de seus elementos componentes. Quanto às inferências, o Cálculo Sentencial dispõe de meios lógicos estruturados para formular critérios de análise quanto à legitimidade de um dado argumento dedutivo a partir do relacionamento (conexão estrutural) das premissas (princípios ou teses anteriormente estabelecidas) com a conclusão (enunciado inferido a partir de seus antecedentes - premissas). Cabendo, entretanto, ao Cálculo dos Predicados a avaliação da estrutura lógica interna dos enunciados envolvidos na inferência que, no Cálculo Proposicional, são considerados indivisíveis. Além do mais, o Cálculo dos Predicados permite verificar a legitimidade de argumentos, cuja complexidade não é passível de ser analisada segundo os princípios norteadores do Cálculo Proposicional. Observe, contudo, que, ao longo do presente desenvolvimento, a atenção estará direcionada ao Cálculo Proposicional, uma vez que o compêndio em questão pretende abordar diretrizes preliminares sobre a Lógica Matemática.

Sendo a Lógica Matemática uma lógica axiomatizada, esta está fundamentada em três postulados básicos, ditos princípios fundamentais, os quais são qualificados pelas seguintes denominações, a saber: Princípio da Identidade; Princípio da Não-Contradição; e, Princípio do Terceiro Excluído. Tais princípios alicerçam, como fundamento *a priori*, a Lógica Matemática e, de resto, a própria Matemática, consolidando, ou antes, instituindo os parâmetros formais para que o raciocínio lógico-analítico se desenvolva de maneira coerente.

O Princípio da Identidade exprime a impossibilidade de se pensar uma estrutura e seus elementos constituintes como opostos e dessemelhantes, enquanto formada por enunciados não-elípticos ou completos. Ou seja, tal princípio afirma que um dado enunciado (ou proposição) é logicamente equivalen-

te a si próprio, não podendo ser, no mesmo universo de juízos, outro elemento senão ele próprio.

O Princípio da Não-Contradição afirma que não é possível a existência de um enunciado que possa ser e não-ser, simultaneamente, em um dado universo de referência. Assim, um enunciado qualquer, bem definido, não poderá corresponder (em um mesmo universo) à “verdade” e à “não-verdade”, uma vez que estados dicotômicos são mutuamente excludentes.

O Princípio do Terceiro Excluído vem afirmar que um determinado enunciado corresponde, necessariamente, à “verdade” ou à “não-verdade”, não existindo a possibilidade de um “meio-termo” entre a afirmação e a respectiva contradição. Ou seja, um enunciado corresponde, quando muito, à “verdade” ou à “não-verdade”, não se admitindo uma terceira possibilidade distinta destas.

Mas, a esta altura, o leitor estará se perguntando, o que vem a ser, realmente, Lógica Matemática? Quais as relações e/ou pontos de convergência entre Matemática e Lógica Matemática? A Lógica Matemática e a Matemática constituem sistemas (ou ciências) mutuamente excludentes? Pode-se, efetivamente, renegar um tratamento lógico da atividade matemática? Pode-se, a bem da verdade, desenvolver o trabalho matemático dissociado dos pressupostos lógicos? Qual, então, a fronteira, se é que a mesma existe, entre Matemática e Lógica Matemática? Em suma, o que torna matemática a Matemática e, de resto, lógica a Lógica Matemática?

A despeito das questões levantadas, um fato é inquestionável: não se pode, efetiva e evidentemente, definir, de maneira exata e inequívoca, Matemática e Lógica Matemática sem entrar em minúcias técnicas ou sem estudar o progressivo desenvolvimento de ambas as ciências. Por outro lado, a de se considerar que, questões de tal mérito, certamente, dirigem as discussões a respeito da “filosofia” da Matemática e da Lógica Matemática no âmbito da história da ciência. No estado hodierno em que figuram tais ciências deve-se salientar que, muito embora Matemática e Lógica Matemática não constituam uma única estrutura formal, desconsiderar as relações inerentes entre as mesmas é, antes de qualquer estudo pormenorizado, um grande e infeliz equívoco. Há de se observar, também, que uma linha divisória, uma demarcação efetiva, entre Matemática e Lógica Matemática é praticamente impossível de ser estabelecida, uma vez que o desenvolvimento da Matemática se deve a uma construção lógico-racional e axiomatização da Lógica Matemática é consolidada através de processos matemáticos.

As considerações apresentadas levam esta explanação a mencionar outro dos problemas fundamentais na história da Matemática, qual seja: o poder cognoscitivo da racionalidade, *in extenso*, vem caracterizar o fundamento *a priori* da Matemática ou, pelo contrário, a Matemática (organismo científico totalmente estruturado e coerente), enquanto instrumento hipotético das ciências naturais, tem seu fundamento *a posteriori*? Embora a questão em

pauta seja objeto de estudos específicos e debates acirrados, observe que a complexidade, o rigor e a essência da Matemática não podem ser resumidos à questão da individualização do fundamento *a priori* - *a posteriori*; porém não se deve perder de vista que a relevância *a priori* - *a posteriori* dos limites matemáticos instituem a fronteira entre o pensamento crítico e o pensamento lógico-racional. Saliente-se outrossim, que não se pode vislumbrar aplicações da Matemática ao mundo sensível (mundo natural) sem, contudo, conhecer e/ou compreender a estrutura e as verdades correspondentes que lhe caracterizam o desafio intelectual em si mesmo.

Mas, é necessário enfatizar que o fascínio e a exuberância da Matemática, tal qual da Lógica Matemática, residem no fato de serem os seus fundamentos determinados pelas leis do pensamento. Pois, toda verdade matemática encerra em si uma genuína e transparente construção da razão. Essencialmente, as leis matemáticas, enquanto racionalidade, são estabelecidas por juízos necessários, os quais, regimentados pelo princípio da Identidade, da Não-Contradição e do Terceiro Excluído (princípios estes que correspondem às tautologias fundamentais da Lógica Matemática), constituem estrutura inteiramente coerente e logicamente formalizada. Tais juízos, ditos analíticos, corroboram as verdades matemáticas; dando à Matemática um fundamento cognoscível *a priori* em que a exatidão de suas estruturas advém de leis racionais ou, antes, de relações entre juízos apoiados em princípios primeiros oriundos da pura razão.

Apresentadas essas ponderações, que enquadram o posicionamento aqui assumido, observe-se que as linguagens usuais, ditas naturais, tais como o português, o inglês, o francês e outras, desenvolvidas pela primordial necessidade da comunicação a partir do desenvolvimento e da consolidação das culturas universais, não se prestam, como é natural concluir, à Lógica Matemática ou à Matemática uma vez que os termos componentes de um cálculo (procedimento dedutivo, onde domina o emprego de regras formais) não significam, em essência, a maneira usual das palavras e expressões de uma determinada língua. Em contrapartida, os elementos constituintes da Lógica Matemática e da própria Matemática, seus símbolos, não servem para a comunicação usual enquanto tal. Porquanto, a sintaxe, ou a forma, efetivamente, constitui o comportamento teórico.

A Lógica Matemática serve-se de uma linguagem proposicional (ou enunciativa), a qual consiste de conectivos lógicos, de operadores lógicos e de um conjunto de símbolos proposicionais estruturados a partir de axiomas fundamentais. As regras sintáticas da linguagem em questão definem um conjunto de fórmulas, ditas fórmulas proposicionais, bem definidas, as quais são estabelecidas através do relacionamento dos símbolos proposicionais com os conectivos lógicos. Por seu turno, as regras semânticas da linguagem transmitem o significado dos conectivos lógicos e associam a cada fórmula um valor lógico

(ou valor-verdade): ou verdade (V) ou falsidade (F), e não ambos.

Baseia-se, a Lógica Matemática, em um sistema dicotômico ou bivalente, onde dois estados, que mutuamente se excluem, servem para apresentar ou representar todas as situações possíveis. Isto é, não há a possibilidade de um determinado ente corresponder, ao mesmo tempo, num mesmo universo, à “verdade” e à “não-verdade”; corresponderá, quando muito, ou à “verdade”, ou à “não-verdade”, não existindo outro estado-de-verdade possível. Portanto, estados dicotômicos, bem definidos, são estados mutuamente excludentes.

Em termos de Lógica Matemática, especificamente no Cálculo Proposicional, esta tem por objeto de análise as sentenças declarativas (afirmativas e bem definidas). Isto é, a Lógica Matemática (no Cálculo Proposicional) trabalha com sentenças que são passíveis de serem predicadas como “verdade” ou “não-verdade”, cada uma das quais excluindo a ocorrência da outra. Desta forma, diz-se que tais sentenças qualificam as denominadas proposições do Cálculo Proposicional, cabendo salientar que as mesmas são constituídas, esquematicamente, devido à natureza estrutural, por um nome ou designação e por um predicado ou atributo. Assim, no Cálculo Proposicional, todo conjunto de palavras ou de símbolos, bem definido, que encerra um pensamento de sentido completo, tomado como um todo - uma vez que palavras e sinais possuem, isoladamente, funções semânticas demasiadamente limitadas - é denominado proposição (ou enunciado), a qual está sujeita aos princípios fundamentais anteriormente qualificados.

Analisando, por conseqüência, a sentença “Um número x somado ao dobro da quinta parte de um número y é igual à metade de um número z subtraído da terça parte de 250.”, observa-se que, para predicar-se “verdade” ou “não-verdade” à sentença em questão, se faz necessária a determinação dos valores assumidos pelas variáveis x , y e z . Assim, tal exemplo não constitui proposição no Cálculo Proposicional, haja vista que não vem expressar um pensamento de sentido completo, não sendo bem definida. Tais classes de sentenças caracterizam funções proposicionais, as quais são objeto de estudo do Cálculo dos Predicados e, portanto, não dizem respeito ao presente conteúdo.

Tendo em vista a natureza das proposições, é natural concluir que nem todas se apresentam constituídas de um único predicado, ou seja, as proposições podem ser classificadas em proposições simples e proposições compostas. Proposições simples, ou atômicas, ditas, também, átomos, são todas as proposições que não contêm nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesmas. As proposições com esta característica são designadas por letras latinas minúsculas, tais como p , q , r , ... (podendo ser acrescidas de números índices), as quais dizem-se letras proposicionais (ou enunciativas). Para se indicar que uma dada proposição simples é designada por uma determinada letra proposicional,

adota-se a seguinte notação. Seja a proposição simples: “A Matemática é a juventude da Lógica Matemática”. Para indicar, por exemplo, que a letra proposicional (ou enunciativa) p designa a dada sentença, escreve-se: p : A Matemática é a juventude da Lógica Matemática.

As proposições compostas, ou proposições moleculares, ou moléculas, ditas, também, fórmulas proposicionais ou apenas fórmulas, são todas as sentenças constituídas de duas ou mais proposições simples componentes. Ou seja, são proposições que contêm pelo menos uma proposição como parte de si mesmas. As proposições compostas são designadas por letras latinas maiúsculas tais como P , Q , R , ... (podendo ser acrescidas de números índices); as quais são denominadas, de forma análoga, por letras proposicionais, ou variáveis enunciativas.

A despeito da semântica das palavras na linguagem usual, os chamados conectivos proposicionais (conjuntos estruturais de palavras específicas) são os elementos pelos quais se torna possível o estabelecimento de fórmulas proposicionais no Cálculo Proposicional, ou por assim dizer, caracterizam funções conectivas específicas.

Os conectivos lógicos, em última análise, estabelecem operações lógicas sobre proposições que, sujeitas a determinadas regras formais, fundamentam a Álgebra Proposicional do Cálculo Sentencial ou Proposicional. Nesse sentido, o Cálculo Proposicional trata da determinação dos valores-verdade das fórmulas proposicionais a partir das seguintes operações fundamentais, ditas operações lógicas sobre proposições; quais sejam: negação (não ...); conjunção (... e ...); disjunção inclusiva (... ou ...); disjunção exclusiva (... ou ..., e não ambos); condicional (Se ..., então ...); bicondicional (... se, e somente se, ...). Assim, tomando-se as letras proposicionais p e q , que venham designar quaisquer proposições simples em Lógica Matemática, têm-se estabelecido as seguintes classes de fórmulas proposicionais: $P(p)$: $\sim p$ (negação); $P(p, q)$: $p \wedge q$ (conjunção); $P(p, q)$: $p \vee q$ (disjunção inclusiva); $P(p, q)$: $p \vee_e q$ (disjunção exclusiva); $P(p, q)$: $p \rightarrow q$ (condicional); e, $P(p, q)$: $p \leftrightarrow q$ (bicondicional).

Uma negação, denotada pelo símbolo $\sim$, é uma operação lógica sobre uma proposição p cujo valor-verdade será a falsidade (F) se o valor-verdade da proposição original p é a verdade (V) e será a verdade (V) se o valor-verdade de p é a falsidade (F); isto é, se $V(p)=V$, então $V(\sim p)=F$, e vice-versa. Uma conjunção, denotada pelo símbolo $\wedge$, é uma operação lógica entre pelo menos duas proposições simples, cujo valor-verdade é a verdade (V) quando todos os valores-verdade de suas componentes correspondem à verdade (V), sendo a falsidade (F) quando ao menos uma de suas componentes possui valor-verdade correspondente à falsidade (F). Uma disjunção inclusiva, denotada pelo símbolo $\vee$, é uma operação lógica entre pelo menos duas proposições simples componentes em que o valor-verdade é a falsidade (F) quando todos os valores-verdade de suas compo-

nentes correspondem à Falsidade (F), sendo a verdade (V) nos demais casos. Uma disjunção exclusiva, denotada pelo símbolo $\vee$, é uma operação lógica sobre duas proposições simples, cujo valor-verdade é a falsidade (F) quando os valores-verdade das duas componentes são iguais, sendo a verdade (V) quando as componentes possuem valores-verdade distintos. Uma condicional, denotada pelo símbolo $\rightarrow$, é uma operação lógica entre duas proposições componentes em que o valor-verdade é a falsidade (F) todas as vezes em que o valor-verdade da proposição antecedente for a verdade (V) e o valor-verdade da proposição conseqüente for a falsidade (F), sendo que nos demais casos o valor-verdade corresponde à verdade (V). Por fim, uma bicondicional, denotada pelo símbolo $\leftrightarrow$, é uma operação lógica entre duas proposições componentes em que o valor-verdade é a verdade (V) todas as vezes em que os valores-verdade de suas componentes são iguais entre si e correspondem à falsidade (F) quando os valores-verdade de suas componentes são distintos entre si.

Mas, em essência, o que significa “verdade”? Qual, precisamente, é a “verdade” norteadora nas ciências exatas? Especificamente, qual seria o propósito da “verdade” em Matemática? Sabe-se, por exemplo, que aquilo que reputa um estado “verdadeiro” na geometria euclidiana não o é na geometria do espaço curvo; e, portanto, seria lícito afirmar que a “verdade” nas ciências exatas é contraditória? Certamente que não. Apesar dos equivocados paradoxos concepcionistas da experiência cotidiana (que se deixa enganar por aparências efêmeras alocadas em referenciais distintos) e do ceticismo exacerbado de pseudocientistas, a “verdade”, em qualquer que seja a amálgama das ciências exatas, é uma busca infinita em direção à ordem, ao absoluto formal.

Deve-se, em intenção, observar que nas ciências matemáticas (fundamentadas em sistemas formais e, por conseguinte abstratos), tanto quanto em Lógica Matemática, suas entidades conceituais estão dissociadas do mundo real (natural) e a legitimidade de seus argumentos cumpre as diretrizes de teorias consistentes, onde dentre todos os teoremas destas teorias, afetas a um determinado universo particular, não existe um outro teorema que seja a negação (a contradição lógica) de quaisquer dos anteriores. Assim, nestas ciências, qualificadas por sistemas fechados, a “verdade” é uma propriedade das proposições ou dos enunciados (e/ou de fórmulas proposicionais ou predicativas) disseminadas no *continuum* de conjecturas formalizadas.

Sendo definida como a não contradição de um sistema de juízos analíticos, a “verdade” nas ciências exatas é uma verdade lógica, a qual, por sua vez, ignora a realidade singular (ou mesmo imprecisa) dos fatos e passa a estabelecer a concordância do aparato conceitual com suas próprias convenções; o que vem consolidar seu grau de possibilidade pelo padrão exequível de sua existência. E, neste sentido, a “verdade” ou a “não-verdade” de uma dada premissa é obtida ao se cotejar a afirmação sobre ela

justaposta com a idéia lógico-racional que vem expressar. Desta forma, a verdade lógica não está interessada em caracterizar, ou antes estabelecer, o “verdadeiro” ou o “falso” de proposições ou de predicados de um determinado argumento formal de um dado universo relacional. A verdade lógica pretende, em última análise, auferir as relações existentes entre estados lógicos que venham determinar, por seu turno, a correção ou incorreção (a legitimidade ou não-legitimidade) das inferências no sentido de insurgir o pensamento coerente.

Uma verdade lógica é uma verdade formal, a qual é coerente unicamente em decorrência de sua forma, ficando por ela univocamente determinada. Individualizada pelo referencial teórico, vem exteriorizar o liame da coesão implícita entre o pensamento coerente e os sistemas consistentes constituídos, instituindo o avanço progressivo do conhecimento analítico. E, a esta afirmação, acrescenta-se que não existe qualquer necessidade lógica incidente sobre fatos naturais que, para promulgar sua “verdade”, necessitem de um estudo empírico.

Assim sendo, o enunciado (fórmula proposicional) $p \rightarrow p$ (ou seja, a condicional: “se p , então p ”) é um exemplo de verdade lógica (de verdade formal) “verdadeira” unicamente em decorrência de sua forma estrutural.

Contudo, observe que o exemplo anteriormente referenciado caracteriza uma forma de enunciado tautológico ou uma tautologia (a qual, usualmente, é denotada pela letra latina t) uma vez que tem, tão somente, exemplos de substituição “verdadeiros”. Isto é, a fórmula proposicional $p \rightarrow p$ é uma forma de enunciado tautológico, pois corresponde a uma seqüência de símbolos, a qual contém uma única variável de enunciado p , sendo que o valor-verdade da estrutura será sempre a verdade (V), independentemente dos valores lógicos assumidos pela p ; isto é: $V(p \rightarrow p) = V$.

Considerando-se uma dada fórmula proposicional P , constituída das n -proposições simples $p, q, r, s, \dots$, isto é, uma $P(p, q, r, s, \dots)$ para se determinar seu valor-verdade pode-se servir do procedimento de decisão denominado Método das Tabelas-Verdade. Assim, a partir dos arranjos estabelecidos por 2^n , realizam-se, por coluna (para cada um dos arranjos possíveis), as operações lógicas constantes da fórmula proposicional analisada, segundo o escopo e a ordem de precedência dos respectivos operadores lógicos.

A título de esclarecimento, observe que tanto os axiomas fundamentais da Lógica Matemática quanto suas operações podem ser apresentadas (definidas formalmente) através de Tabelas-Verdade (ou Tabelas-Função-de-Verdade), onde nas primeiras colunas são apresentados os possíveis arranjos de valores lógicos das proposições componentes e na última coluna (coluna-resultado) os valores-verdade obtidos segundo a operação realizada. Assim, por exemplo, as operações fundamentais da Lógica Matemática serão qualificadas segundo as estruturas:

a) Negação: $\sim p$

p	$\sim p$
V	F
F	V

b) Conjunção: $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c) Disjunção Inclusiva: $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

d) Disjunção Exclusiva: $p \underline{\vee} q$

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

e) Condicional: $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

f) Bicondicional: $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Por outro lado, os axiomas fundamentais da Lógica Matemática, que constituem exemplos de tautologias (embora não sejam as únicas formas tautológicas possíveis), serão sistematizados (conso-
lidados) através das estruturas:

a) Princípio da Identidade: $p \leftrightarrow p$

p	$p \leftrightarrow p$
V	V
F	V

b) Princípio da Não-Contradição:
 $\sim(p \wedge \sim p)$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$\sim(p \wedge \sim p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

c) Princípio do Terceiro-Excluído: $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

O Cálculo Proposicional atinge uma de suas finalidades principais quando, a partir de relações lógicas entre fórmulas proposicionais, passa a desenvolver o método dedutivo, instituindo a Teoria da Demonstração. Destacam-se, desta maneira, duas relações fundamentais, quais sejam: as relações de equivalência lógica e as relações de implicação lógica. No que diz respeito à primeira relação tem-se estabelecido que uma fórmula proposicional $P(p, q, r, s, \dots)$ é logicamente equivalente a outra fórmula proposicional $Q(p, q, r, s, \dots)$, o que se denota por $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, s, \dots)$, sendo o símbolo $\Leftrightarrow$ utilizado para indicar equivalências lógicas, quando em suas tabelas-verdade (na coluna-resultado) não ocorre a verdade-falsidade (V-F) ou falsidade-verdade (F-V), simultaneamente, em uma mesma linha, para nenhuma das 2^ª linhas possíveis, isto é, as colunas resultado são idênticas entre si. No que se refere às relações de implicação lógica, simbolizadas por $\Rightarrow$, tem-se caracterizado que uma fórmula proposicional $P(p, q, r, s, \dots)$ implica logicamente, ou apenas implica, uma fórmula proposicional $Q(p, q, r, s, \dots)$, o que se indica por $P(p, q, r, s, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, s, \dots)$, se o valor-verdade da fórmula proposicional $Q(p, q, r, s, \dots)$ é a verdade (V) todas as vezes que o valor-verdade da fórmula proposicional antecedente $P(p, q, r, s, \dots)$ é também a verdade (V); isto é, não ocorre, em nenhuma linha das colunas-resultado, das respectivas tabelas-verdade, a possibilidade do valor-verdade da fórmula proposicional $P(p, q, r, s, \dots)$ ser a verdade (V) e da fórmula proposicional $Q(p, q, r, s, \dots)$ ser a falsidade (F) em uma mesma linha das correspondentes tabelas-verdade.

Tomando-se por base as considerações levantadas sobre as relações lógicas acima, estabelece-se que uma fórmula proposicional $P(p, q, r, s, \dots)$ será equivalente a uma fórmula proposicional $Q(p, q, r, s, \dots)$ se, e somente se, a bicondicional entre tais fórmulas corresponder a uma tautologia, ou se-

ja: $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, s, \dots)$ se, e somente se, $P(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow Q(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow t$. De forma correspondente, verifica-se que determinada fórmula proposicional implica logicamente outra fórmula proposicional $Q(p, q, r, s, \dots)$ se, e somente se, a condicional entre tais fórmulas gerar uma tautologia, ou seja: $P(p, q, r, s, \dots) \Rightarrow Q(p, q, r, s, \dots)$ se, e somente se, $P(p, q, r, s, \dots) \rightarrow Q(p, q, r, s, \dots) \Leftrightarrow t$.

A partir do Princípio da Equivalência Lógica verifica-se, por exemplo, que a fórmula proposicional $p \rightarrow p$ é logicamente equivalente à estrutura $\sim p \vee p$ (não p ou p). O que significa afirmar que as formas de enunciado $p \rightarrow p$ e $\sim p \vee p$ apresentam, para cada estado de verdade, resultados idênticos. Simbolicamente, tal fato pode ser indicado através da seguinte expressão: $p \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \vee p$. Contudo, os enunciados em questão qualificam exemplos de substituição de formas de enunciados tautológicos, conforme se pode constatar através da seguinte tabela-função-de-verdade, a saber:

P	$\sim p$	$\sim p \vee p$	$p \rightarrow p$
V	F	V	V
F	V	V	V

Partindo-se do referencial teórico aqui considerado, é importante ressaltar que uma forma de enunciado que possua apenas exemplos de substituição falsos é uma contradição, sendo logicamente falsa. Uma contradição será denotada, no Cálculo Proposicional, pela letra latina c . Desta forma, por exemplo, a fórmula proposicional $p \wedge \sim p$ (p e não p) é uma contradição; isto é, $c \Leftrightarrow p \wedge \sim p$ e na respectiva tabela-verdade, na coluna-resultado, tem-se apenas valores-verdade correspondentes à falsidade (F).

Objetivando ilustrar o assunto em pauta, considere as letras proposicionais p e q , designando, respectivamente, as sentenças declarativas “A Matemática é atributo da Lógica”. e “A Lógica é o fundamento da Matemática”, ou sejam: p : A Matemática é atributo da Lógica, e q : A Lógica é o fundamento da Matemática.

Portanto, a proposição composta “Se a Matemática é atributo da Lógica, então a Lógica não é o fundamento da Matemática e/ou a Matemática é atributo da Lógica”, que corresponde à fórmula proposicional designada por $P(p, q)$ e definida pela estrutura $P(p, q): p \rightarrow (\sim q \vee p)$, é uma forma de enunciado tautológico. Assim sendo, da Álgebra Proposicional, vem que: $p \rightarrow (\sim q \vee p) \Leftrightarrow t$, onde a letra proposicional t designa uma tautologia; isto é: $V[p \rightarrow (\sim q \vee p)] = V$.

Em contraposição ao exemplo anterior, a sentença “A Matemática é atributo da Lógica, mas não é verdade que a Lógica não é o fundamento da Matemática e/ou que a Matemática é atributo da Lógica”, a qual designada por $Q(p, q)$ corresponde à fórmula proposicional dada

por: $Q(p, q): p \wedge \sim(\sim q \vee p)$, é uma forma de enunciado contraválido, ou seja, é uma contradição, sendo logicamente “falsa”. Assim, tem-se, pela Álgebra Proposicional, que $p \wedge \sim(\sim q \vee p) \Leftrightarrow c$, onde a letra proposicional c designa uma contradição; isto é: $V[p \wedge \sim(\sim q \vee p)] = F$.

Sabendo-se que um argumento em Lógica Matemática é toda seqüência finita de proposições (denominadas premissas) que conduz, ou acarreta, uma outra proposição (denominada conclusão), tem-se, a partir das fórmulas proposicionais $P(p, q)$ e $Q(p, q)$, anteriormente apresentadas, o seguinte argumento válido, a saber:

$P(p, q) \rightarrow Q(p, q)$,

$Q(p, q) \rightarrow P(p, q) \vdash P(p, q) \rightarrow P(p, q)$.

Desta maneira, designando $P(p, q) \rightarrow Q(p, q)$ por $P_1(p, q)$, $Q(p, q) \rightarrow P(p, q)$ por $P_2(p, q)$ e $P(p, q) \rightarrow P(p, q)$ por $P_3(p, q)$, tem-se estruturado o argumento:

$P_1(p, q), P_2(p, q) \vdash P_3(p, q)$, onde o símbolo $\vdash$ significa “acarreta”, “tem por consequência”, “tem por conclusão”.

Contudo, um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ (onde cada uma das fórmulas proposicionais $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$ podem ser constituídas das m -variáveis $p, q, r, \dots, p_1, p_2, \dots, p_m$) será legítimo se, e somente se, a condicional entre a conjunção das premissas e a conclusão gerar, por equivalências lógicas, uma tautologia, isto é:

Se $(P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q \Leftrightarrow t$, então $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ é um argumento dedutivo legítimo.

Observe, pois, que o exemplo levado em consideração é, realmente, um argumento legítimo (válido segundo a forma); porquanto, tem-se que:

$(P_1(p, q) \wedge P_2(p, q)) \rightarrow P_3(p, q) \Leftrightarrow t$, I, ou seja:

$((P(p, q) \rightarrow Q(p, q)) \wedge (Q(p, q) \rightarrow P(p, q))) \rightarrow (P(p, q) \rightarrow P(p, q)) \Leftrightarrow t$.

Por consequência, através da Álgebra Proposicional, vem que: como $P(p, q) \rightarrow P(p, q) \Leftrightarrow \sim P(p, q) \vee P(p, q) \Leftrightarrow t$; então

$((P(p, q) \rightarrow Q(p, q)) \wedge (Q(p, q) \rightarrow P(p, q))) \rightarrow (P(p, q) \rightarrow P(p, q)) \Leftrightarrow ((P(p, q) \rightarrow Q(p, q)) \wedge (Q(p, q) \rightarrow P(p, q))) \rightarrow t \Leftrightarrow \sim((P(p, q) \rightarrow Q(p, q)) \wedge (Q(p, q) \rightarrow P(p, q))) \vee t \Leftrightarrow t$,

uma vez que o elemento tautológico t é elemento absorvente na operação de disjunção inclusiva ($\vee$), logo, como I é uma tautologia, então o argumento: $P(p, q) \rightarrow Q(p, q), Q(p, q) \rightarrow P(p, q) \vdash P(p, q) \rightarrow P(p, q)$ é um exemplo de argumento legítimo em Lógica Matemática.

E, conseqüentemente, através do método analítico anteriormente apresentado (resumidamente, pois não é este o objeto principal da presente explanação) poder-se-ia analisar uma infinidade de argumentos dedutivos, do ponto de vista de sua validade, e, instituir os princípios estruturais que fundamentam a Teoria da Demonstração (demonstrabilidade, não demonstrabilidade e

indecidibilidade).

O estudo da Análise Inferencial (ou mais especificamente, das inferências válidas fundamentais), bem como da Teoria da Demonstração não dizem respeito ao presente compêndio, uma vez que se pretendia apresentar, tão somente, uma idéia introdutória sobre o assunto em pauta. Porquanto, seria inadmissível estender estas anotações sem, contudo, adentrar em especificações técnicas mais detalhadas a respeito dos mesmos; as quais não poderiam, evidentemente, ser abordadas de forma

precisa neste estudo introdutório.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DIAS, Carlos Magno Corrêa. *Lógica Matemática: Uma Introdução ao Cálculo Proposicional*. Revista Acadêmica da PUC-PR, Curitiba, março, 1991, vol. 1, 55p.

DIAS, Carlos Magno Corrêa. *As Leis Lógicas do pensar coerente*. Revista Acadêmica da PUC-PR, Curitiba, setembro, 1991, vol. 1, 59p.