

# MÉTODO DE LAUS PARA MODELAMENTO CINEMÁTICO DE ROBÔS O

Luís Paulo Laus<sup>1</sup>  
Alfranci Freitas Santos<sup>2</sup>

**Resumo.** Os modelos cinemáticos dos robôs são a base para o estudo da robótica e a construção dos modelos dinâmicos usados para controle e simulação dos robôs. O tema é tratado de forma elementar pela maior parte dos autores que não se preocupam com a formalização de um método para a construção destes modelos. É apresentado um método de modelamento que é mais simples e mais intuitivo do que os atualmente disponíveis. Esse método facilita o aprendizado e diminui a ocorrência de erros na construção dos modelos cinemáticos diretos. Além disso, o método apresentado, ao contrário dos demais, não requer que o robô esteja em alguma pose especial; qualquer pose pode ser usada, o que também é uma vantagem prática importante.

**Palavras-Chave:** Robótica, Manipuladores robóticos, Cinemática de robôs, Modelamento cinemático, Métodos para modelamento cinemático.

**Abstract:** The robots kinematic models are the base for the study of the robotics and the construction of the dynamic models used for robots control and simulation. The theme is treated in an elementary way by most of the authors provided that they don't care about the formalization of a method for the construction of those models. Usually, this lack of well established procedure leads to a trial and error process that results in waste of time and efforts, not to mention the negative psychological effects over the students that tend to think that one needs to be a genius to model a robot or the only possible models are those in the books; other robots will remain unmodeled. Bearing a didactic perspective in mind, it is presented a

---

<sup>1</sup> Graduado em Engenharia Elétrica. Mestre em Informática Industrial pelo CPGEI pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Professor do Departamento Acadêmico de Mecânica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. *e-mail: laus@cefetpr.br*

<sup>2</sup> Graduado em Engenharia Eletrônica. Doutorado em Automação, ENSAER – França. Professor do CPGEI da Universidade Tecnológica Federal do Paraná. *e-mail: freitas@cpgei.cefetpr.br*

modeling method that is simpler and more intuitive than the ones available in the literature. This method facilitates the learning and it reduces the occurrence of mistakes in the construction of the direct kinematic model. Besides, the presented method, unlike the others, it does not require the robot to be in some special pose. Any pose may be used. It is also an important practical advantage. The presented method was developed along five years and tested on hundreds under graduate and graduate students. With the help of a computer algebra system, such as MuPAD or Mathematica, it is possible to reach the complete model in a few minutes. It is also possible to use existing robot controller to validate the obtained model in case of a reverse engineering.

**Keywords:** robotics, robotic manipulators, robot kinematics, kinematic modeling, method for kinematic modeling.

## 1. Introdução

Um robô pode ser imaginado como sendo uma cadeia de corpos rígidos chamados de **segmentos** (*link*), unidos entre si por ligações móveis chamadas **juntas** (*joints*). Quando se tem dois corpos rígidos que podem se mover um em relação ao outro, com a restrição de que o movimento se dê sobre uma superfície de contato, este conjunto de corpos recebe o nome de **par inferior**. Existem apenas seis tipos de pares inferiores: rotativo, prismático, cilíndrico, planar, fuso e esférico. Os pares inferiores do tipo rotativo e prismático permitem apenas um único grau de liberdade, os demais permitem dois (cilíndrico e fuso) ou três (planar e esférico). Alguns autores consideram que o fuso também só possui um único grau de liberdade porque a rotação e a translação são restritas: um movimento de translação sempre implicará numa rotação e vice-versa (Craig, 1986), (Niku, 2001). No geral, cada junta é acionada por um atuador (um motor elétrico ou cilindro hidráulico) e, portanto, só possui um único grau de liberdade. Por isso, as juntas do robô poderão ser de dois tipos: **rotativa** (movimento angular) ou **prismática** (movimento linear)<sup>3</sup>. Não há interesse de se usar juntas com mais de um grau de liberdade porque: 1) há a necessidade de manter o robô holonomicamente restrito; 2) as juntas mais complexas podem ser analisadas usando um conjunto de juntas mais simples; 3) a ordem de acionamento das juntas é importante; e 4) é construtivamente difícil prover acionamento a uma junta com mais de um grau de liberdade (Laus, 1998).

---

<sup>3</sup> Eventualmente usam-se juntas esféricas, também chamadas de joelhos, passivas para manter a distância entre dois pontos constante, contudo, isso só é comum em robôs com cadeia cinemática fechada.

Embora a cinemática seja o estudo do movimento sem levar em conta sua causa, em robótica o termo é usado para descrever as relações entre o movimento das juntas do robô e o movimento dos diversos segmentos que compõem o robô, sobretudo do último segmento livre que transporta a ferramenta (Laus, 1998).

Definimos, então, um conjunto de **variáveis de junta** que expressam a posição da junta, seja ela rotativa (com movimento angular) ou prismática (com movimento linear). A cinemática cria um mapeamento entre as variáveis de junta e a posição e orientação de cada segmento do robô. Surpreendentemente, este mapeamento é estático: posição para posição; não há o envolvimento de velocidades (cinemática e dinâmica). Geralmente, só há interesse no último segmento, aquele que transporta a ferramenta ou efetuador (*end-effector*) (Craig, 1986).

Tem-se, então, dois tipos de cinemática:

1. **cinemática direta:** define a posição e orientação do efetuador em função das variáveis de junta;
2. **cinemática inversa:** determina o valor das variáveis de junta para se atingir, com o efetuador, uma certa posição e orientação.

Os dois tipos de junta (rotativa e prismática) de interesse são caracterizados por **uma reta**. No caso da junta rotativa a reta é o eixo de rotação; no caso da junta da junta prismática a reta indica a direção e sentido, se for considerado uma reta orientada sobre o qual o movimento se dá e, neste caso, qualquer reta paralela à direção do movimento da junta é suficiente para especificar o movimento indistintamente (não há uma reta que seja “melhor” do que suas paralelas se a junta for prismática).

Para obter uma descrição do movimento (posição e orientação variando no tempo), é preciso saber descrever a posição e orientação dos segmentos do robô. Para isso, atrela-se um sistema de coordenadas a cada segmento do robô (Craig, 1986). Assim, o problema de descrever a posição e orientação relativa dos segmentos se transforma no problema de descrever a posição e orientação relativa dos sistemas de coordenadas que é solucionado com a construção de transformações homogêneas.

Um local no segmento conveniente para o sistema de coordenadas é no início ou no fim do segmento sobre uma das juntas (junta distal ou proximal) fazendo com que o eixo da junta coincida com um dos três eixos do sistema de coordenadas. Isso faz com que o problema de descrever a posição e orientação dos sistemas de coordenadas se transforme no problema de descrever a posição e orientação relativa dos eixos, que são retas, e mais uma certa “posição” inicial (angular ou linear) sobre o eixo. Para caracterizar os eixos, são necessários quatro parâmetros, já que os eixos são retas, e uma reta no espaço tridimensional possui duas equações a quatro parâmetros. As transformações homogêneas, com as restrições sobre a matriz de rotação e sobre a última linha, que sempre vale  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$ , possuem seis graus de liberdade, portanto, mais que o suficiente. O fato de uma

matriz de transformação homogênea representar mais graus de liberdade do que o estritamente necessário tem a vantagem de permitir uma flexibilidade maior na colocação dos sistemas de coordenadas (Stone, 1987), (Laus, 1998).

A princípio, qualquer atribuição de sistemas de coordenadas é possível, porque existem seis graus de liberdade para descrever a posição relativa de um sistema de coordenadas em relação ao outro. Isso permite que o sistema de coordenadas seja atrelado a qualquer lugar com qualquer orientação relativa<sup>4</sup>. Por outro lado, isso traz a necessidade de determinar os seis parâmetros que caracterizam a posição e orientação relativa de cada segmento. Esse inconveniente<sup>5</sup> torna-se um problema grave na hora de calibrar o robô. Uma forma alternativa de proceder é criar uma regra para fixação dos sistemas de coordenadas na qual algumas relações entre sistemas de coordenadas adjacentes são fixas. Por exemplo: fixar a origem de um sistema de coordenadas, sobre um dos eixos do sistema de coordenadas anterior. Isso faz com que dois graus de liberdade sejam perdidos porque a origem de um sistema de coordenadas, que por ser um ponto poderia estar em qualquer lugar do espaço tridimensional, fique situada sobre uma reta. Assim, o parâmetro que caracteriza a posição da origem é um único escalar e não três como no caso geral. A idéia de reduzir o número de parâmetros do modelo, restringindo o posicionamento dos sistemas de coordenadas, foi usado por Denavit e Hartenberg (1955) na criação de uma notação. Na verdade eles criaram várias notações, será usada apenas uma delas.

## 2. Notação de Denavit-Hartenberg Modificada (DHM)

Para reduzir o número de parâmetros, Denavit e Hartenberg (1955) restringiram a posição e orientação relativa de dois sistemas de coordenadas adjacentes fazendo com que dois eixos se cortassem a 90°. Em outras palavras: um dos eixos de um sistema de coordenadas deve sempre interceptar um dos eixos do sistema de coordenadas adjacente formando um **ângulo reto**. Essa idéia é importantíssima: perde-se um grau de liberdade de rotação e um de posição.

Já foi estabelecido que um lugar conveniente para colocar o sistema de coordenadas é no início ou no fim do segmento (em relação à base imóvel do robô: no eixo da junta distal ou proximal). A notação de Denavit-Hartenberg original usa a junta distal. Contudo, isso traz alguns inconvenientes: a inversão do modelo se torna mais difícil (Craig, 1986); a calibração do robô tende a perder qualidade; os algoritmos de calibração perdem eficiência (Laus, 1998). Portanto, a abordagem a ser usada consiste de se localizar o sistema de coordenadas na junta mais próxima

---

<sup>4</sup> Isso é feito se for usada a notação de Sheth-Uicker (Sheth; Uicker, 1972).

<sup>5</sup> Apenas quatro parâmetros por sistema de coordenadas podem ser identificados; se forem usados mais que quatro parâmetros eles serão funcionalmente dependentes o que dificulta, ou mesmo impossibilita, a **identificação** que, por sua vez, é uma das fases da calibração.

à base do robô (mais longe do efetuador). Esta “nova” notação é chamada de DHM para diferenciá-la da original em que a letra “M” vem da palavra “modificada”. Note que o sistema de coordenadas se move com o segmento: seja um movimento angular ou linear, conforme a junta entre o segmento considerado e o anterior seja prismática ou rotativa.

Assim, para construir o modelo cinemático direto de um robô (Craig, 1986):

1. numera-se cada segmento, iniciando pela base (zero) até o último segmento livre que contém o efetuador ou ferramenta ( $N$ );
2. numeram-se as juntas (ou eixos das juntas) de acordo com o número do segmento: a junta mais próxima à base terá o número do segmento, a mais distante terá o número do próximo segmento (as juntas serão numeradas de 1 a  $N$ );
3. posiciona-se o eixo dos  $z$  de cada sistema de coordenadas sobre o eixo da junta orientado com sentido conforme a variação desejada da variável de junta (se a junta  $i$  for do tipo prismática  $\hat{Z}_i$  aponta para o sentido de crescimento da variável de junta, se for rotativa  $\hat{Z}_i$  é orientado de acordo com a regra da mão direita);
4. posiciona-se o eixo dos  $x$  de cada sistema de coordenadas fazendo com que o eixo dos  $x$  de uma junta intercepte o eixo dos  $z$  do próximo sistema de coordenadas (para obter a redução no número de parâmetros).

Geralmente, a notação DHM é descrita através interpretação geométrica de cada parâmetro (Craig, 1986), (Gonzalez; Fu; Lee, 1987), (Niku, 2001), (Paul, 1981), (Sciavicco; Siciliano, 1996), (Stone, 1987), ao invés disso serão fornecidas regras para fixar os sistemas de coordenadas e determinar os parâmetros. Destas regras, será possível equacionar a transformação homogênea que relaciona dois sistemas de coordenadas adjacentes. A interpretação geométrica, que é difícil, dos parâmetros só serve para provar que o processo é lícito.

Os parâmetros e variáveis de junta (ver Figura 1) são quatro (Laus, 1998):

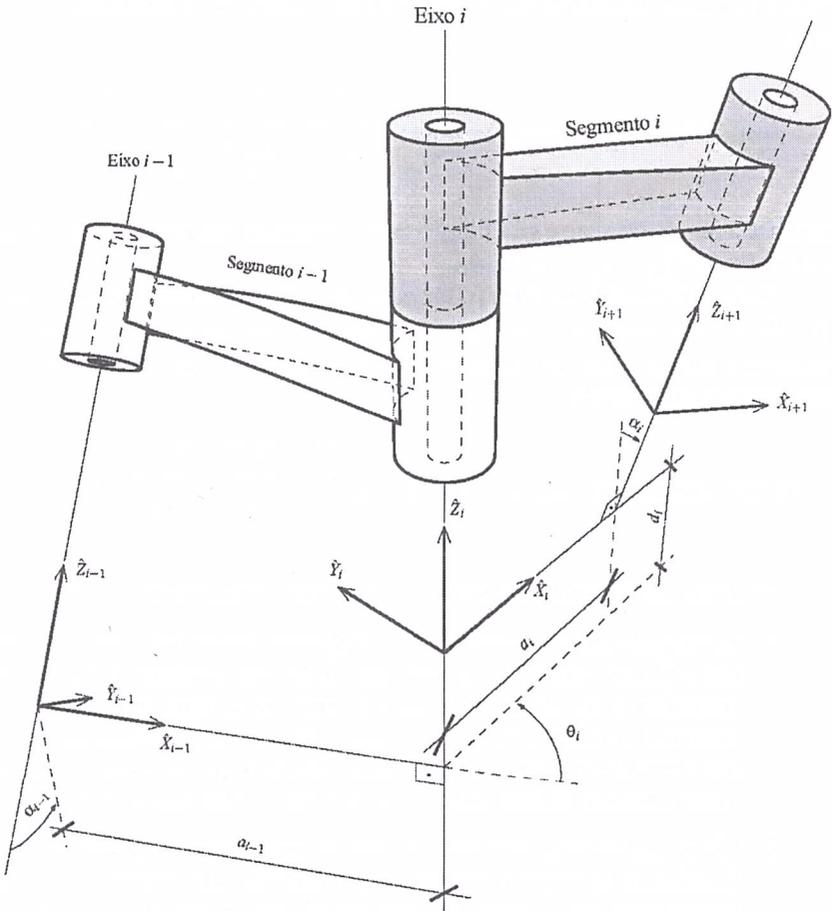
$a_{i-1}$  é a distância de  $\hat{Z}_{i-1}$  até  $\hat{Z}_i$  medida ao longo de  $\hat{X}_{i-1}$  e é chamada de **comprimento** do segmento  $i-1$  ;

$\alpha_{i-1}$  é o ângulo entre  $\hat{Z}_{i-1}$  e  $\hat{Z}_i$  medido em torno de  $\hat{X}_{i-1}$  e é chamado de **ângulo de torção** do segmento  $i-1$  ;

$d_i$  é o deslocamento (positivo ou negativo) de  $\hat{X}_{i-1}$  até  $\hat{X}_i$  medida ao longo de  $\hat{Z}_i$  (e com o sentido de  $\hat{Z}_i$ ) e é chamado de **off-set** da junta  $i$  ;

$\theta_i$  é o ângulo entre  $\hat{X}_{i-1}$  e  $\hat{X}_i$  medido em torno de  $\hat{Z}_i$  e é chamado de **ângulo** da junta  $i$  ;

FIGURA 1. Atribuição dos sistemas de coordenadas aos segmentos e parâmetros e variáveis de junta respectivos.



Note que dois parâmetros ( $a_{i-1}$  e  $\alpha_{i-1}$ ) são características de um segmento específico, e outros dois parâmetros ( $d_i$  e  $\theta_i$ ) são parâmetros da junta, ou seja, dependem da relação entre dois segmentos adjacentes.

Para chegar ao sistema de coordenadas  $i$ , partindo do sistema de coordenadas  $i-1$ , será necessário:

1. rodar em torno do eixo  $\hat{X}_{i-1}$  de um ângulo  $\alpha_{i-1}$ ;
2. deslocar o sistema de coordenadas sobre o eixo  $\hat{X}_{i-1}$  de uma distância  $a_{i-1}$ ;
3. deslocar sobre o eixo  $\hat{Z}_i$  de uma distância  $d_i$ ;
4. rodar em torno do eixo  $\hat{Z}_i$  de um ângulo  $\theta_i$ .

Considerando que os eixos são móveis (movimento é executado com relação ao resultado da modificação anterior e não com relação a eixos fixos), pode-se definir a seguinte transformação homogênea do sistema de coordenadas  $i - 1$  para  $i$  :

$${}^{i-1}T = \text{Transl}(a_{i-1}, 0, 0) \cdot \text{RotX}(\alpha_{i-1}) \cdot \text{Transl}(d_i) \cdot \text{RotZ}(0, 0, \theta_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ c\alpha_{i-1}s\theta_i & c\alpha_{i-1}c\theta_i & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\alpha_{i-1}s\theta_i & s\alpha_{i-1}c\theta_i & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

em que  $c$  é a função co-seno e  $s$  é a função seno. A Equação (1) pode ser vista como uma função de  $a_{i-1}$ ,  $\alpha_{i-1}$ ,  $d_i$  e  $\theta_i$ .

Outros autores (Stone, 1987) (Gonzalez; Fu; Lee, 1987) (Niku, 2001) (Paul, 1981) (Sciavicco; Siciliano, 1996) preferem atrelar o sistema de coordenadas de referência à porção distal do segmento (no eixo distal), o que leva à seguinte transformação homogênea:

$${}^{i-1}A = \text{Transl}(d_i) \cdot \text{RotZ}(0, 0, \theta_i) \cdot \text{Transl}(a_i, 0, 0) \cdot \text{RotX}(\alpha_i) = \begin{bmatrix} c\theta_i & -c\alpha_i s\theta_i & s\alpha_i s\theta_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\alpha_i c\theta_i & -s\alpha_i c\theta_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Note que não há vantagem explícita entre uma e outra forma, contudo:

1. atrelar o sistema de coordenadas do segmento ao eixo proximal faz com que o último sistema de coordenadas fique mais próximo à base o que simplifica o cálculo da cinemática inversa, ou de outra forma, atrelar o sistema de coordenadas ao eixo distal introduz um comprimento extra (do último segmento) que poderia ser evitado e que, no geral, aumenta a complexidade da cinemática inversa (Craig, 1986) (Laus, 1998);
2. não se sabe exatamente por que, mas os algoritmos de calibração (que descobrem os valores ótimos dos parâmetros para reduzir o erro de posicionamento e orientação) têm dificuldade de trabalhar (convergir) se o sistema de coordenadas é atrelado ao eixo distal (Laus, 1998).

Para construir as e multiplicar as matrizes dadas pela Eq. (1), é interessante usar um *software* para processamento simbólico (*Computer Algebra System*). Um destes *software* que tem sido usado com bastante êxito pelos autores é o MuPAD (2003). Uma implementação da Eq. (1) usando a linguagem do MuPAD é:

```
dhm:=(alpha,a,theta,d) -> matrix(4,4,[cos(theta),-sin(theta),0,a],
[cos(alpha)*sin(theta),cos(alpha)*cos(theta),-sin(alpha),-d*sin(alpha)],
[sin(alpha)*sin(theta),sin(alpha)*cos(theta), cos(alpha), d*cos(alpha)],
[0,0,0,1]]):
```

### 3. Cinemática Direta de Robôs, Método de Laus

Este método foi desenvolvido pelo Prof. Luís Paulo Laus, com a ajuda do Prof. Dr. Alfranci Freitas Santos. A grande diferença entre esse método e os apresentados em outros trabalhos (Craig, 1986), (Gonzalez; Fu; Lee, 1987), (Niku, 2001), (Paul, 1981), (Sciavicco; Siciliano, 1996), (Sheth; Uicker, 1972), (Stone, 1987) é que ele é mais intuitivo: ao invés de procurar os ângulos e comprimentos que descrevem a posição e orientação de um sistema de coordenadas em relação à outro em um desenho, procura-se executar um movimento que leve um sistema de coordenadas a coincidir com outro (o próximo). Uma outra vantagem prática muito importante é que é possível partir de uma **pose**<sup>6</sup> arbitrária, enquanto que os outros métodos exigem uma pose específica chamada de **pose zero**<sup>7</sup>.

O objetivo do método é determinar, para cada segmento, os quatro parâmetros de Denavit-Hartenberg para construção do modelo cinemático de um robô industrial. Os passos para determinar estes parâmetros são:

1. Escolha uma pose (posição específica de todas as juntas) que será usada como referência e, portanto, será chamada de **pose de referência**. Não é necessário escolher a “pose zero”, ou seja, a pose na qual todas as variáveis de junta são nulas, muito embora isso seja desejável. Naturalmente, é conveniente dispor de um desenho do robô nesta pose, e, normalmente, estes desenhos são disponíveis no manual do robô ou no *site* do fabricante. Embora qualquer desenho seja suficiente, alguns, como o mostrado na Fig. 2.a, são mais difíceis de serem usados. Prefira desenhos em projeção ortogonal, como o mostrado na Fig. 2.b em que o manipulador é mostrado completamente esticado. Esta pose em particular é chamada de **origem** pelo fabricante (Mitsubishi, 1994). Também é comum usar desenhos esquemáticos simplificados, mais fáceis de serem elaborados e interpretados: note que o interesse é na relação entre as juntas e não na forma construtiva do robô e tampouco no seu aspecto externo. Ainda, não é necessário que a pose escolhida seja passível de ser atingida pelo robô real, isso é, pode-se usar uma pose que requer valores de variáveis de junta inatingíveis, fora dos limites reais das variáveis de junta.

2. Trate as variáveis de junta como parâmetros ordinários; mais tarde (passo 10), estes “parâmetros” serão transformados em valores iniciais para as variáveis de junta ou, de outra forma, os valores das variáveis de junta que colocam o robô na pose de referência. Neste caso, a pose de referência não é necessariamente a pose “zero”, e os valores máximos e mínimos para cada variável de junta devem ser reconsiderados.

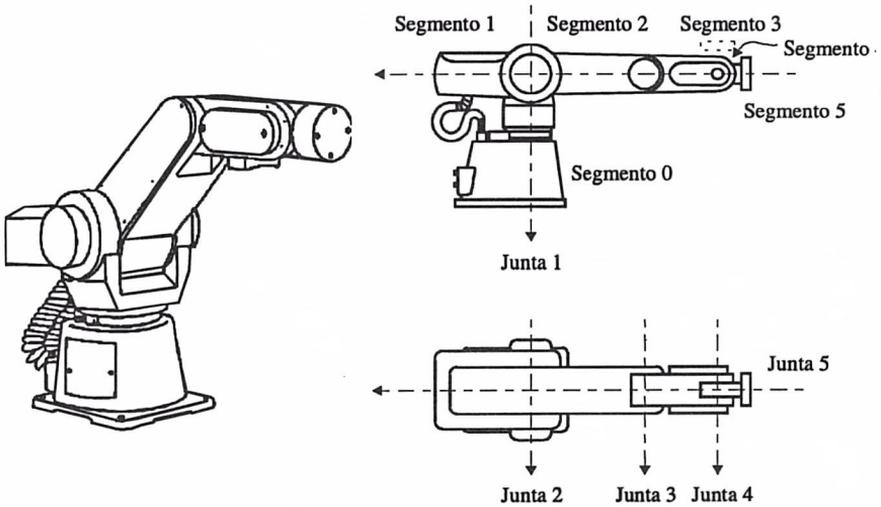
---

<sup>6</sup> Configuração (posição e orientação de cada segmento da cadeia cinemática que define exatamente como o robô está em um dado momento) que o robô assume com um valor específico das variáveis de junta.

<sup>7</sup> Configuração que o robô assume com todas as variáveis de junta zeradas.

3. Numere os eixos do robô, partindo da base para o efetuador. O primeiro eixo recebe o número 1, o último recebe o número  $N$  que corresponde ao número total de eixos do robô. Observe que a numeração implica numa subordinação de movimentos, portanto, muito cuidado quando os eixos se cruzam, pois há o risco de se numerar errado. Lembre-se sempre que o menor número corresponde ao eixo que fica imóvel quando o outro (ou os outros) é movido. A Figura 2.2 traz os eixos numerados.

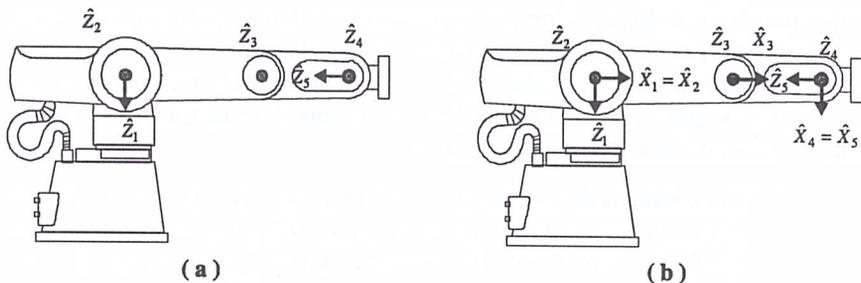
FIGURA 2. Exemplo de robô industrial – Mitsubishi RV-M1: a) pose arbitrária; b) pose de referência com a identificação dos segmentos e das juntas.



4. Fixe o eixo  $\hat{Z}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) sobre o eixo de rotação da junta rotativa ou o eixo de deslocamento (translação) da junta prismática (neste caso apenas a direção e sentido do eixo é definida, a sua origem no espaço pode ser definida mais tarde). Ao fixar o eixo, leve em conta que o sentido do eixo é dado pelo sentido em que se pretende contar a variável de junta: se a junta for rotativa use a regra da mão direita (o polegar indica o sentido do eixo quando os demais dedos indicarem o sentido de crescimento de  $\theta_i$ ); se for prismática o sentido é dado pelo sentido de crescimento de  $d_i$ .

Na Figura 3.a, os eixos  $\hat{Z}_2$ ,  $\hat{Z}_3$  e  $\hat{Z}_4$  estão perpendiculares ao papel e, por este motivo, são representados como pontos.

FIGURA 3. Manipulador na pose de referência: a) fixação dos eixos; b) fixação dos eixos.



5. Fixe o eixo  $\hat{X}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$ ) sobre a perpendicular mútua entre os eixos  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  com sentido de  $\hat{Z}_i$  para  $\hat{Z}_{i+1}$  (dado pelo  $\hat{Z}_i \times \hat{Z}_{i+1}$  em que  $\times$  indica o produto vetorial ou externo de vetores). No caso geral, isso determina a origem do sistema de coordenadas  $\{i\}$ . Caso  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  sejam paralelos,  $\hat{X}_i$  não tem uma localização definida (ao menos ainda não) e portanto a origem do sistema de coordenadas  $\{i\}$  só será definida mais tarde. O caso em que  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  se cruzam (têm um ponto em comum) costuma causar muita confusão. Para evitar erros, faça  $\hat{X}_i \parallel (\hat{Z}_i \times \hat{Z}_{i+1})$  passando pelo ponto em comum de  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  ( $\times$  indica o produto vetorial ou externo de vetores) ou no sentido oposto ao de  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  quando o próximo sistema de coordenadas estiver nesta direção e sentido. Note que, na Fig. 3.b os eixos  $\hat{X}_1$  e  $\hat{X}_4$  podem estar na situação indicada ou no sentido contrário ao indicado na figura.

6. A localização do eixo  $\hat{X}_N$  é arbitrária, já que não há um eixo  $\hat{Z}_{N+1}$  para definir sua posição e orientação; é conveniente fazê-lo coincidente com o eixo  $\hat{X}_{N-1}$  quando a variável da última junta for zero.

7. Percorra a cadeia cinemática do efetuador para a base fixando as origens dos eixos  $\hat{X}_i$  (e, portanto,  $\hat{Z}_i$  e a origem do sistema de coordenadas  $\{i\}$ ) que não tinham uma localização definida. Para isso, procure alinhar o eixo  $\hat{X}_i$  ou  $\hat{Z}_i$  com algum eixo do sistema de coordenadas  $\{i + 1\}$  ou  $\{i - 1\}$ . É um pouco melhor alinhar com algum eixo do sistema  $\{i + 1\}$ , porque isso pode ajudar na cinemática inversa, já que faz com que parâmetros nulos apareçam antes na tabela. Daí, o eixo  $\hat{Z}_i$  das juntas prismáticas e o eixo  $\hat{X}_i$  das juntas prismáticas e das juntas paralelas à próxima terem sido deixados para depois nos passos 4 e 5: é conveniente ter uma visão mais global do manipulador antes de tomar uma decisão.

8. Monte uma tabela para registrar os valores dos parâmetros. Esta tabela terá  $N$  linhas, uma para cada segmento móvel do robô (excluindo a base, que é fixa) e que serão associadas, cada uma, a uma transformação homogênea; e quatro colunas para registrar os valores de:  $a_{i-1}$  comprimento do segmento  $\{i - 1\}$ ,  $\alpha_{i-1}$  - torção do segmento  $\{i - 1\}$ ,  $d_i$  - offset do segmento  $i$  e  $\theta_i$  ângulo da

junta  $i$ . Esqueça, por ora, as variáveis de junta; trate-as como parâmetros com valor numérico definido. Comece preenchendo a tabela pela segunda linha ( $i = 2$ , ou seja, pelo sistema de coordenadas {1} ou pela transformação de {1} para {2}), e vá determinando os valores de ângulos e distâncias obtidos nos passos descritos, a seguir, necessários para levar o sistema de coordenadas  $\{i - 1\}$  a coincidir com o sistema de coordenadas {1} :

- Gire o sistema de coordenadas  $\{i - 1\}$  em torno de  $\hat{X}_{i-1}$  de um ângulo  $\alpha_{i-1}$  até que o novo eixo dos  $zz$  (digamos  $\hat{Z}_{i-1}^\alpha$ ) fique paralelo ao eixo  $\hat{Z}_i$ ; desloque o sistema de coordenadas  $\{i-1\}^\alpha$  sobre o eixo  $\hat{X}_{i-1}$  de uma distância  $a_{i-1}$  até que o novo eixo dos  $zz$  ( $\hat{Z}_{i-1}^\alpha$ ) coincida com  $\hat{Z}_i$ . Note que você **pode** primeiro deslocar de uma distância  $a_{i-1}$  até que os eixos dos  $zz$  se cruzem e, então, girar de um ângulo  $\alpha_{i-1}$  até que os eixos dos  $zz$  coincidam.
- Gire o sistema de coordenadas  $\{i-1\}^{\alpha}$  em torno de  $\hat{Z}_i$  (ou  $\hat{Z}_{i-1}^{\alpha}$ , já que eles coincidem) de um ângulo  $\theta_i$  até que o novo eixo dos  $xx$  (digamos  $\hat{X}_{i-1}^\theta$ ) fique paralelo ao eixo  $\hat{X}_i$ ; desloque o sistema de coordenadas  $\{i-1\}^\theta$  sobre o eixo  $\hat{Z}_i^\theta$  de uma distância  $d_i$  até que o novo eixo dos  $xx$  ( $\hat{X}_{i-1}^\theta$ ) coincida com eixo  $\hat{X}_i$ . Note que você **pode** primeiro deslocar de uma distância  $d_i$  até que os eixos dos  $xx$  se cruzem e então girar de um ângulo  $\theta_i$  até que os eixos dos  $xx$  coincidam.

Jamais troque a ordem das regras acima: sempre gire e desloque primeiro segundo o eixo  $\hat{X}$  e **depois** segundo o eixo  $\hat{Z}$ , nunca ao contrário.

**Resumindo:** gire e translate em torno ou ao longo de  $\left\{ \begin{array}{l} \hat{X} \text{ para acertar } \hat{Z} \\ \hat{Z} \text{ para acertar } \hat{X} \end{array} \right\}$  coincidindo com o próximo sistema de coordenadas;

Aplicando as regras acima é fácil perceber que, no robô dado como exemplo, para atingir o sistema de coordenadas {2} basta girar o sistema de coordenadas {1} de  $-90^\circ$  em relação ao eixo  $\hat{X}_1$ , não são necessárias translações nem outra rotação em torno do eixo  $\hat{Z}$ . Transladando o sistema de coordenadas {2} de uma distância  $a_2$ , obtemos o sistema de coordenadas {3}. Transladando o sistema de coordenadas {3} de uma distância  $a_3$  ao longo de  $\hat{X}_3$  e girando em torno  $\hat{Z}_3^{\alpha}$  de  $-90^\circ$ , obtém-se o sistema de coordenadas {4}. Para a obtenção do sistema de coordenadas {5}, basta rodar ao redor de  $\hat{X}_4$  de  $+90^\circ$ . Assim, obtém-se as linhas 2 a 5 como mostrado na Tabela 1.

TABELA 1. Exemplo de tabela de parâmetros com as linhas de  $i = 1$  até  $i = 5$  preenchidas.

$i$	${}^{i-1}T$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\theta_i$	$d_i$
1	${}^0T$	?	?	?	?
2	${}^1T$	$-90^\circ$	0	0	0
3	${}^2T$	0	$a_2$	0	0
4	${}^3T$	0	$a_3$	$-90^\circ$	0
5	${}^4T$	$+90^\circ$	0	0	0

9. Ao terminar a última linha ( $i = N$ ), falta apenas a linha  $i = 1$ . Para isso, devemos localizar o sistema de coordenadas  $\{0\} = \{\text{BASE}\}$ . Há, basicamente, duas opções:

- fazer que  $\{0\} = \{1\}$ ; neste caso,  $a_0, \alpha_0, d_1$  e  $\theta_1$  serão nulos (lembre-se que  $d_1$  e  $\theta_1$  são considerados parâmetros, por enquanto); ou
- fazer  $\hat{X}_0 \perp \hat{Z}_1$  e localizar os outros eixos de  $\{0\}$  arbitrariamente. Assim, o eixo dos  $xx$  do sistema de coordenadas 0 pode girar livremente em torno do eixo dos  $zz$  do sistema de coordenadas 1 e se deslocar livremente no espaço tridimensional (deslocar a origem sobre uma reta perpendicular ao eixo dos  $zz$  do sistema de coordenadas 1). Os eixos dos  $yy$  e dos  $zz$  do sistema de coordenadas 0 podem ter uma orientação qualquer (desde que, obviamente, os três eixos sejam perpendiculares entre si e formem o terno tri-ortogonal positivo). Uma vez fixado o sistema de coordenadas 0, deve-se repetir o passo 8 para preencher a primeira linha da tabela. (para  $i = 1$ ).

Uma alternativa interessante para o robô do exemplo pode ser: 1) deslocar de uma distância  $d_1$  no sentido positivo do eixo  $\hat{Z}_1$ , portanto  $d_1$  será uma constante conhecida; 2) rodar de  $+90^\circ$  em torno do eixo  $\hat{Z}_1$  fazendo com que o versor  $\hat{X}_0$  fique perpendicular ao plano do papel e saindo do papel; e 3) rodar de  $+180^\circ$  (ou  $-180^\circ$ ) em torno do novo eixo dos  $xx$  fazendo com que  $\hat{Z}_0$  fique vertical para cima. Isso faz com que o sistema da base ( $\{0\}$ ) seja igual ao sistema da base escolhido pelo fabricante (Mitsubishi, 1994) com o eixo dos  $zz$  para cima, dos  $yy$  para a direita e dos  $xx$  saindo do papel na Figura 3. Note que a restrição de que é atendida e, portanto, o sistema é perfeitamente válido. Repetindo o passo 8 para a primeira linha, obtém-se a Tab. 2.

TABELA 2. preenchimento da linha  $i = 1$ .

$i$	${}^{i-1}_i T$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\theta_i$	$d_i$
1	${}^0_1 T$	$180^\circ$	0	0	$-d_1$
2	${}^1_2 T$	$-90^\circ$	0	0	0
3	${}^2_3 T$	0	$a_2$	0	0
4	${}^3_4 T$	0	$a_3$	$-90^\circ$	0
5	${}^4_5 T$	$+90^\circ$	0	0	0

Desta forma, o eixo dos  $zz$  se torna vertical para cima, o que é mais convencional, e o sistema de coordenadas  $\{0\}$  tem sua origem na base de fixação do robô. A orientação do eixo dos  $xx$  e dos  $yy$  é a mesma que o fabricante escolheu o que é interessante para validar os resultados.

10. Agora que você já obteve todos os “parâmetros”, some a variável de junta ( $d_i$  ou  $\theta_i$ ) aos valores tabelados de  $d_i$  ou  $\theta_i$ , conforme o tipo de junta. Observe que os valores tabelados se tornam os **valores iniciais**<sup>8</sup> das variáveis de junta. Assim, a Tab. 3 descreve a cinemática do robô de forma completa.

TABELA 3. Tabela completa (incluindo as variáveis de junta).

$i$	$i-1T$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$\theta_i$	$d_i$
1	${}^0_1T$	$180^0$	0	$\theta_1 - 90^0$	$-d_1$
2	${}^1_2T$	$-90^0$	0	$\theta_2$	0
3	${}^2_3T$	0	$a_2$	$\theta_3$	0
4	${}^3_4T$	0	$a_3$	$\theta_4 - 90^0$	0
5	${}^4_5T$	$+90^0$	0	$\theta_5$	0

Caso os valores iniciais das variáveis de junta sejam não-nulos (é o caso das juntas 1 e 4 no exemplo), não será possível usar o *Toolbox* do Matlab (Corke, 1996), (Matlab, 1993) para modelar este robô. Pode-se evitar que isso aconteça encontrando uma nova pose de referência onde os eixos  $\hat{X}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ) fiquem sempre paralelos e refazendo a tabela para esta nova pose. Achar esta pose é um pouco complicado porque é muito difícil imaginar todos os eixos se movimentando. É esta abordagem usada por vários autores consagrados como: Craig (1986); Gonzalez, Fu e Lee (1987); Niku (2001); Paul (1981); Sciavicco e Siciliano (1996); e Stone (1987).

De uma forma mais simples, pode-se evitar que valores iniciais sejam não-nulos considerando que a pose de referência escolhida não é a pose zero. Por esta abordagem, no exemplo dado,  $\theta_4 = -90^0$  faz com o eixo da junta 5 ( $\hat{Z}_5$ ) fique como na pose de referência representada na Figura 3.b. Quando  $\theta_4 = -0$ , o eixo da junta 5 se torna vertical para baixo e o segmento 5 fica em cima do segmento 4 (veja o segmento tracejado na Figura 2.b) e os valores admissíveis para  $\theta_4$  vão

<sup>8</sup> Geralmente o valor inicial de uma variável é chamado de *offset* mas em robótica este termo deve ser evitado para não confundir com o deslocamento  $d_i$ . O valor inicial é o valor que relaciona o número zero com a verdadeira grandeza que o número zero representa. Por exemplo, um sensor de pressão de 0 a 100 bars com saída de 4 a 20 mA (muito comum na indústria) deve apresentar na saída 4 mA quando a pressão na entrada for de 0 bar; para converter o valor de corrente  $I$  para o valor medido de pressão  $P$  usa-se a equação  $P = (I - 4)100/16$  onde a corrente é dada em mA e a pressão em bars. O valor inicial da corrente é de -4 mA. Se o interesse for em estimar o valor de corrente para uma dada pressão, pode-se usar a equação  $I = (P + 25)4/25$ , o valor inicial da pressão é de 25 bars.

de  $-180^\circ$  a  $0^\circ$  (e não de  $-90^\circ$  a  $+90^\circ$ ). Ainda, o eixo dos  $xx$  do sistema de coordenadas 0 fica paralelo ao do sistema de coordenadas 1 quando  $\theta_1 = 0$ , o que altera a orientação da base do robô. Assim, pode-se retirar o “valor inicial” ( $-90^\circ$ ) que está sendo somado a  $\theta_1$  e  $\theta_4$ , o que permite utilizar o *Toolbox* do Matlab (Corke, 1996), (Matlab, 1993) para modelar este robô.

Note que o modelo obtido vai apenas até o **punho** do robô ( $\{PUNHO\}=\{WRIST\}=\{N\}$ ) e não até a ferramenta  $\{TOOL\}$ , ou mesmo a interface mecânica onde a ferramenta é fixada. O punho do robô pode ser entendido de duas formas: 1) um ponto em que os últimos eixos do robô se cruzam; 2) a origem do sistema de coordenadas que modela a posição e orientação do último segmento. Modelar a posição e orientação do punho ao invés da ferramenta faz com que as equações cinemáticas obtidas sejam independentes da ferramenta usada (tipo, tamanho, etc.), permitindo que esta possa ser trocada sem acarretar na necessidade de remodelamento do robô. Em alguns casos especiais, sobretudo em exemplos de dinâmica, a transformação até a ferramenta será incluída. Ao longo do tempo, observou-se que a maioria dos erros ocorrem na fixação do eixo  $\hat{X}_i$  (no passo 5). Portanto, deve-se prestar atenção aos três casos possíveis:

1. os eixos  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  são paralelos:  $\hat{X}_i$  estará no plano que contém  $\hat{Z}_i$  e,  $\hat{Z}_{i+1}$  orientado de  $\hat{Z}_i$  para  $\hat{Z}_{i+1}$  e perpendicular à ambos (já que eles são paralelos), a posição da origem do sistema de coordenadas  $\{i\}$  ainda não pode ser definida, ou seja, a fixação do eixo  $\hat{X}_i$  só ocorrerá no passo 7;
2. os eixos  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  se cruzam em um ponto: a origem do sistema de coordenadas  $\{i\}$  será o ponto de cruzamento,  $\hat{X}_i$  está na direção perpendicular à  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  (perpendicular ao plano que contém esses eixos) com um sentido arbitrário (preferencialmente apontando para um dos eixos do sistema de coordenadas  $\{i + 2\}$ );
3. os eixos  $\hat{Z}_i$  e  $\hat{Z}_{i+1}$  não se cruzam, mas também não são paralelos: neste caso haverá uma, e apenas uma, reta que é perpendicular aos dois eixos,  $\hat{X}_i$  estará sobre esta reta orientado de  $\hat{Z}_i$  para  $\hat{Z}_{i+1}$ .

Outra observação diz respeito às juntas prismáticas uma vez que, neste caso, o eixo do movimento não é tão bem definido como no caso da junta rotativa. Isso porque apenas a direção e o sentido são definidos, mas não a localização da reta ao longo da qual o movimento se dá já que qualquer reta orientada paralela com a direção e sentido da junta pode ser usada. Assim, é possível usar esta liberdade de localização do sistema de coordenadas de forma a produzir um modelo mais simples de tal forma a levar a uma cinemática inversa mais fácil. Para isso, é conveniente alinhar os eixos dos  $zz$  e dos  $xx$  com os eixos do próximo sistema de coordenadas (seja ele o sistema de um segmento ao da

ferramenta<sup>9</sup>). Sobretudo, é importante fazer coincidir a origem do sistema de coordenadas que descreve o segmento movido por uma junta rotativa com a origem do próximo sistema de coordenadas. Com efeito, a variável de junta  $d_i$  modelará a distância total entre os segmentos  $i$  e  $i + 1$  evitando o aparecimento de outras constantes ( $a_i$  ou  $d_{i+1}$ ) que podem tornar mais difícil o cálculo da cinemática inversa.

Como regra geral, deve evitar ao máximo o uso de comprimentos constantes ( $a_i$  e  $d_i$ ) não nulos. Ainda, no projeto de manipuladores, é muito importante buscar eixos paralelos ou ortogonais (mesmo que eles não se cruzem) para que os ângulos  $\alpha_i$  e  $\theta_i$  (na juntas prismáticas) sejam de  $0^0$ ,  $\pm 90^0$  e  $180^0$  o que faz com que o seno ou o co-seno destes ângulos seja 0, 1 ou -1, o que simplifica bastante a Eq. (1) quando aplicada caso a caso. Quase todos modelos industriais modernos seguem este princípio com a notável exceção de robôs que possuem um único eixo que forma um ângulo arbitrário com o seu antecessor. Isso é feito para aumentar a destreza da máquina e geralmente só aparece em robôs destinados à pintura, aplicação de cola ou solda a arco.

#### 4. Construção do Molelo Cinemático

O objetivo da cinemática direta de robôs é obter uma descrição da posição e orientação da ferramenta  $\{TOOL\}$  em função dos ângulos (no caso de juntas rotativas) ou comprimento (no caso das juntas prismática) de junta do robô que são chamados de “variáveis de junta”. Já foi visto que esta descrição pode ser feita através de sistemas de coordenadas (a submatriz de rotação fornece uma descrição da orientação ao passo que a última coluna fornece uma descrição da posição). Essa descrição será usada para resolver o problema inverso: conhecendo a posição/orientação desejadas para a ferramenta, deve-se calcular o valor das variáveis para atingir esta posição/orientação Usando a Eq. (1), é fácil obter a descrição do punho do robô em função das variáveis de junta. Aplica-se a Eq. (1) para cada linha da tabela de parâmetros que descreve a cinemática do robô e multiplica-se todas as transformações homogêneas obtidas. Contudo, esse método proporciona uma descrição da posição/orientação do punho do robô ( $\{PUNHO\}=\{WRIST\}=\{W\}=\{N\}$ ) e não da ferramenta  $\{TOOL\}$ . Assim, é necessário incluir uma transformação homogênea constante  ${}^N_T$  (que não varia em função das variáveis de junta) para descrever a posição/orientação da ferramenta com relação ao sistema de coordenadas da base ( $\{BASE\}=\{B\}=\{0\}$ ). Também, é conveniente usar uma segunda transformação homogênea constante  ${}^S_0T$  que

---

<sup>9</sup> Como geralmente a cinemática direta e, em decorrência, a inversa são deduzidas para uma ferramenta genérica, é comum usar o sistema de coordenadas na interface mecânica de fixação da ferramenta para esse fim. Geralmente a origem deste sistema de coordenadas é chamada de TCP (*Tool Center Point*).

descreve a base imóvel do robô em relação a sistema de coordenadas conveniente  $\{S\}=\{STATION\}$ .

$${}^S_T T = {}^S_0 T \quad {}^0_1 T \quad {}^1_2 T \quad {}^2_3 T \quad K \quad {}^{N-1}_N T \quad {}^N_T T$$

Note que a primeira e a última transformações homogêneas do lado direito da equação acima são constantes (não são alteradas por mudanças no valor das variáveis de junta). A transformação  ${}^N_T T$  é particular para cada ferramenta, o que permite que a ferramenta seja trocada sem que haja a necessidade de se modelar o manipulador novamente e, sobretudo, sem a necessidade de resolver a cinemática inversa novamente. Nem mesmo é necessário conhecer a ferramenta para modelar o manipulador e resolver o problema da cinemática inversa: a solução obtida é genérica e independente da ferramenta escolhida. Naturalmente, para que o resultado obtido seja usado na prática, é necessário possuir a descrição da ferramenta que está em uso em relação ao punho ( $\{WIRST\}=\{W\}$ ).

Usando o MuPAD (2003) e a função *dhm* dada acima, pode-se obter o modelo cinemático direto (da base até o punho) do Mitsubishi RV-M1 por:

```
T05:=dhm(PI,0,q1-PI/2,-d1)*simplify(dhm(-PI,0,q2,0)*dhm(0,a2,q3,0)*dhm(0,a3,
q4-PI/2,0))*dhm(PI/2,0,q5,0);
```

em que  $q_i$  foi usado no lugar de  $\theta_i$  e a função *simplify* (nativa do MuPAD) foi usada para simplificar a soma dos ângulos  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  e  $\theta_4$  porque os eixos segundo o qual estes ângulos são medidos são sempre paralelos. Não é interessante usar a funções *simplify* sobre o resultado final porque o resultado acaba sendo mais complicado do que o obtido com a linha de código acima. Como regra geral, só se aplica a função *simplify* para o produto de transformações homogêneas que advêm de eixos que sejam sempre paralelos.

## 5. Conclusão

A método apresentado foi desenvolvido ao logo de um ano e testado ao longo de mais quatro anos com cerca de duzentos alunos dos cursos de graduação de Tecnologia Mecânica e de Engenharia. Em comparação com métodos tradicionais, os alunos têm relatado uma maior facilidade de aplicação e clareza.

A facilidade de se usar um *software* de processamento simbólico também é um ponto bastante atraente. As tabelas obtidas por Craig (1986), que são as mais semelhantes às obtidas pelo método apresentado, carecem de adaptação e interpretação antes serem usadas na obtenção do modelo cinemático. Notadamente, há a necessidade de se deslocar duas colunas e obter mais dois parâmetros não listados por Craig (1986).

## 6. Agradecimentos

Ao meu amigo, co-autor e orientador de mestrado, Prof. Dr. Alfranci Freitas Santos, por todo o apoio e ajuda nos teste do método proposto. Aos alunos que serviram de “cobaia” para os testes didáticos do método.

## 7. Referências

CORKE, P. I. A Robotics Toolbox for MATLAB. **IEEE Robotics and Automation Magazine**, 3(1):24-32, September 1996.

CRAIG, J. J. **Introduction to robotics : mechanics & control**. Reading: Addison Wesley, 1986.

DENAVID, J.; HARTENBERG, R. S. A Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices, **Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics**, vol. 22, pp. 215-221, 1955.

GONZALEZ, R. C.; FU, K. S.; LEE, C. S. **Robotics: control, sensing, vision, and intelligence**. New York : McGraw-Hill, 1987.

LAUS, L. P. **Identificação da Cinemática de Robôs Industriais**. Curitiba, Brasil. Dissertação (Mestrado em Ciências: Informática Industrial) Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, 1998.

MATLAB, **Matlab with Simulink**. MATLAB version 4.0, SIMULINK version 1.2c. Programa para processamento matemático e meta linguagem. The MathWorks Inc. Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná. Curitiba, 4 de agosto de 1993. IBM-PC.

Mitsubishi Electric Corporation. **Industrial micro-robot system: Model RV-M1, BFP-A5191E-B**, Japan, 1994.

MuPAD, **MuPAD Light Version 2.5.3**. *Software* para processamento simbólico. Universidade de Paderborn, Alemanha. Licenciado para: “Luis Laus, 11 de setembro de 2003” como cortesia da Universidade de Paderborn. IBM-PC compatível, sistema operacional Windows.

NIKU, S. B. **Introduction to robotics: analisis, systems, applications**. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2001.

PAUL, R. P. **Robot manipulator: mathematics, programming and control**. Cambridge, MA : MIT, 1981.

Sciavicco, L.; SICILIANO, B. **Modeling and control of robot manipulators**, New York: McGraw-Hill, 1996.

SHETH, P. N.; UICKER, J. J. A generalized symbolic notation for mechanisms. **ASME Journal of Engineering for Industry**, v. 93, n. 1, p. 102-112, 1972.

STONE, H. W. **Kinematic modeling, identification and control of robotic manipulators**. New York: Kluwer Inc., 1987.

#### **8. Informação sobre responsabilidade**

Os autores são os únicos responsáveis pelo material impresso incluído neste artigo.