TEOREMA DE SCHRÖDER-BERNSTEIN E TEOREMA DE GEORG CANTOR

Prof. Carlos Magno Corrêa Dias [1]

RESUMO

Este artigo pretende apresentar algumas considerações sobre os teoremas de Schröder-Bernstein e de Georg Cantor, assim como conceitos relacionados com os mesmos. Pretende apresentar, também, observações particulares sobre conjuntos enumeráveis e não-enumeráveis. As considerações serão apresentadas de forma compendiada e utilizar-se-ão determinados princípios elementares da Teoria dos Conjuntos envolvidos nas demonstrações oferecidas. A partir, então, de conceitos básicos será apresentada, ainda, uma demonstração alternativa do teorema de Schröder-Bernstein.

Palavras-Chave: Teoria dos Conjuntos. Relações. Infinito. Números Naturais. Cardinais. Ordinais.

ABSTRACT

This paper aims at presenting some considerations about the teorems of Schröder-Bernstein and of Georg Cantor, as well as the concepts related therein. It also intends to present some observations about enumerated sets and not-enumerated sets. The considerations will be presented on a summarized form and they will utilize some elementary concepts from the Sets Theory involved in the demonstrations offered. An alternative demonstration of the teorem of Schröder-Bernstein will be presented.

Key Words: Set Theory. Relations. The infinite. The Natural Numbers. Cardinals. Ordinals.

---

1. Bacharel em Matemática e Licenciado em Ciências pela PUC-PR. Especialista em Métodos Computacionais e em Didática do Ensino Superior pela PUC-PR. Mestre em Educação/Lógica pela UFPR. Doutorando em Lógica e Filosofia da Ciência pela UNICAMP. Professor de Lógica Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral do CEFET-PR (Unidade de Curitiba) e da PUC-PR.

1. INTRODUÇÃO

O presente artigo tem por um de seus principais objetivos arregimentar observações gerais sobre os consagrados Teoremas de Schröder-Bernstein e de Georg Cantor, partindo-se, entretanto, de conceitos os mais elementares possíveis existentes na Teoria dos Conjuntos.

Em geral, as demonstrações de tais teoremas envolvem princípios não elementares da Teoria dos Conjuntos, tais como o Axioma da Escolha, o Lema de Zorn e outros com estes relacionados. Embora tais demonstrações sejam relativamente complicadas (principalmente para os iniciantes), pode-se, entretanto, demonstrar, alternativamente, os teoremas em questão servindo-se de conceitos bem mais elementares.

Assim, neste texto, apresenta-se, em um primeiro momento, uma demonstração mais simples do teorema de Schröder-Bernstein, demonstração esta que utilizará conceitos básicos tais como os de: Função Injetora e Bijetora, Relação de Inclusão, União e Interseção de conjuntos; enfim, aqueles conceitos usuais da Teoria Elementar dos Conjuntos.

Objetivando, entretanto, simplificar o trabalho a ser apresentado, definir-se-ão, também, as Relações de Equipotência, de Dominação e Dominação Estrita entre conjuntos; o que, ressalte-se, obrigará a tecer algumas poucas considerações sobre Números Cardinais, Números Ordinais, Números Naturais, Conjuntos Enumeráveis e Não-Enumeráveis.

Evidenciadas as Relações de Dominação e Dominação Estrita entre conjuntos, passar-se-á, em um segundo momento, a uma demonstração do Teorema de Cantor, apresentando-se, em correlação, determinadas considerações sobre conjuntos enumeráveis.

Observe, todavia, que conquanto se professe utilizar conceitos elementares (ou mais elementares possíveis) da Teoria dos Conjuntos para atingir os propósitos especificados, não se deve esquecer, também, que uma tal teoria constitui um corpo de conhecimentos "relacional", sendo impossível estudar conceitos mais complexos sem conhecer os elementares.

Não se fará, contudo, uma revisão conceitual sobre a Teoria dos Conjuntos, pois que se admitirá que as Relações e Operações básicas com conjuntos são de domínio de todo aquele que se interesse pelo correspondente texto. Desta forma, as considerações correspondentes serão apresentadas compendiadamente, procurando-se evidenciar, na medida do possível, algumas particularidades (diga-se, pontuais) de tópicos (elementares) da Teoria dos Conjuntos relacionados com os vários teoremas referenciados ao longo do texto.

2. EQUIPOTÊNCIA E DOMINAÇÃO

Observe-se, inicialmente, que, certamente, a maioria das pessoas não teria maiores dificuldades para decidir se existem mais elementos no conjunto finito definido por **S = { 1, 2, 3, 4, 5 }** do que no conjunto **T = { 2, 4, 6, 8, 10, 12 }**. Porém, se estas mesmas pessoas fossem convidadas a comparar o número de elementos do conjunto "infinito" **S' = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... }** com o número de elementos do conjunto "infinito" **T' = { 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, ... }**, muito provavelmente não teriam certeza da resposta a apresentar (claro que está a considerar-se aquelas pessoas que ainda não dominaram a "propriedade fundamental dos conjuntos infinitos").

É notório, entretanto, em termos gerais, mesmo no âmbito dos versados em Matemática, o problema da "comparação" entre os tamanhos de dois dados conjuntos quaisquer quando os elementos de tais conjuntos "parecem" não se relacionar de forma alguma uns com os outros (o que não é caso, obviamente, do exemplo anteriormente considerado).

Comparar os "tamanhos" de dois dados conjuntos constitui, em particular, o objetivo da "contagem". Sabe-se, todavia, que o método "usual" de contar os elementos de um dado conjunto é arranjá-los em determinada ordem apropriada; sendo, por outro lado, a teoria dos números ordinais aquela que constitui uma interessante abstração do método, mas que não atinge "completamente" (não no sentido lógico) o correspondente propósito.

Lembre-se, entretanto, que pelo Teorema da Boa Ordem de Zermelo (conseqüência do Axioma da Escolha – adiante qualificado), qualquer conjunto pode ser bem ordenado. Mas, alerte-se que um mesmo conjunto pode ser ordenado de diferentes maneiras.

Mostra-se, todavia, que se os conjuntos **A** e **B** são bem ordenados, então constitui condição necessária e suficiente para que **ord(A) < ord(B)** o fato do conjunto **A** ser semelhante a um segmento inicial do conjunto **B**.

Recorde-se, a propósito que, se um conjunto **X** é parcialmente ordenado e se $a \in X$, então o conjunto $\{ x \in X \; / \; x < a \}$ diz-se o segmento inicial determinado por **a** sendo denotado (usualmente) por **s(a)**; ou seja, o segmento inicial **s(a)** de um elemento $a \in X$ consiste de todos os elementos em **X** que estritamente precedem **a**.

Relembre-se, também, que dois conjuntos **A** e **B** parcialmente ordenados (ou, em particular, totalmente ordenados, ou ainda, bem ordenados) dizem-se semelhantes se existe entre eles uma correspondência um-a-um que vem preservar a ordem; o que se denota (usualmente) por $A \cong B$. Assim, $A \cong B$ passa a significar que existe uma função bijetora **f** de **A** em **B** tal que se a_1 e a_2 estão em **A**, então uma condição necessária e suficiente para que $f(a_1) \leq f(a_2)$ em **B** é que $a_1 < a_2$ em **A**.

Logo, é fácil perceber que para se comparar os tamanhos ordinais de dois conjuntos bem ordenados basta tomar o conceito de semelhança entre conjuntos; não necessitando, então, do conceito de números ordinais. Ora, parece razoável, portanto, que se se objetiva tão somente comparar os tamanhos de (dois ou mais) conjuntos entre si, não é relevante (ou, antes, necessário) precisar o que venha ser o "tamanho de um conjunto".

Muito embora o conceito de semelhança se aplique a conjuntos ordenados, o conceito de equipotência (ou, em certos contextos, "equivalência") entre conjuntos é aplicável a conjuntos arbitrários não ordenados. Ou seja, pode-se verificar se dois dados conjuntos infinitos quaisquer têm o mesmo número de elementos se os mesmos são equipotentes (ou "equivalentes", se assim se preferir) entre si.

Sejam, então, **A** e **B** dois conjuntos quaisquer. Diz-se que o conjunto **A** é equipotente ao conjunto **B** (isto é, $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$) se, e somente se, existe uma função $\mathbf{f}: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ tal que **f** é uma função bijetora, sendo a Relação de Equipotência denotada pelo símbolo $\approx$. Diz-se, neste caso, que a correspondente função **f** define uma correspondência biunívoca entre os conjuntos **A** e **B**.

Como neste texto tomar-se-ão funções bijetoras e injetoras na definição de determinados elementos, convenciona-se que $\mathbf{f}: \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{Y}$ denotará uma função bijetora **f** do conjunto **X** no conjunto **Y**; enquanto que, $\mathbf{g}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ denotará uma função injetora **g** de **X** em **Y**.

Assim, por exemplo, a Relação de Equipotência entre os conjuntos quaisquer **A** e **B** poderia ser definida, mais simplificadamente, por: $\mathbf{A} \approx \mathbf{B}$ **se, e somente se,** $\exists \mathbf{f}: \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$.

Observe, a propósito, que a Relação de Equipotência ($\approx$) entre conjuntos é uma Relação de Equivalência; isto é, uma tal relação verifica as propriedades:

I. Reflexiva: $\forall \mathbf{A};\ \mathbf{A} \approx \mathbf{A}$;

II. Simétrica: $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B};\ \mathbf{A} \approx \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} \approx \mathbf{A}$;

III. Transitiva: $\forall \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C};\ (\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \approx \mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{A} \approx \mathbf{C}$;

onde **A**, **B** e **C** são conjuntos quaisquer.

Por outro lado, observe que em decorrência da Relação de Equipotência outras interessantes definições podem ser estabelecidas; sendo, talvez, a mais importante a de conjunto infinito; ou seja, um conjunto qualquer diz-se conjunto infinito se, e somente se, é equipotente a um subconjunto próprio de si mesmo e diz-se, por outro lado, conjunto finito em caso contrário.

Resulta, também que, se um dado conjunto **E** é equipotente ao conjunto dos números naturais **N**, diz-se que **E** é enumerável e que tem cardinalidade $\grave{A}_0$ (aleph zero). Observe-se que o conjunto dos números naturais **N** diz-se um conjunto infinito enumerável de cardinalidade $\aleph_0$; onde $\aleph$ (aleph) é a primeira letra do alfabeto hebraico.

Georg Cantor (1845-1918) afirmou que os conjuntos infinitos não são todos iguais e demonstrou que não existe um infinito, mas infinitos tipos de infinito. O mesmo Cantor provou que tanto o conjunto dos quadrados perfeitos quanto o conjunto dos números triangulares apresentam a mesma potência que a do conjunto dos números inteiros positivos, dado que tais números podem ser colocados em correspondência biunívoca. Cantor, também, mostrou que existem tantos números racionais quanto naturais; isto é, que o conjunto dos números racionais é, também, enumerável (ou, que a potência do conjunto dos números racionais é a mesma que a do conjunto dos números naturais).

Assim, o infinito dos números naturais, dos números inteiros (positivos ou negativos), dos números racionais e de todos os conjuntos de números que se podem pôr em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais dizem-se conjuntos infinitos enumeráveis.

Cantor, também, demonstrou, por *reductio ad absurdum*, que nem todos os conjuntos infinitos são enumeráveis; mostrando que o conjunto dos números reais (de cardinalidade $\aleph_1$) apresenta potência maior que a do conjunto dos números racionais; isto é, que o infinito dos números reais é maior que o infinito do conjunto dos números racionais. Diz-se, então, que o infinito do conjunto dos números reais é um infinito não enumerável. Cantor provou, ainda, que os infinitos enumeráveis e os infinitos não enumeráveis são somente os primeiros de uma infinidade de infinitos.

Assim, ficou estabelecido que $\aleph_0 < \aleph_1$. Inevitavelmente, porém, surgiu a questão: não existiria um número cardinal $\aleph_0$ entre os cardinais $\aleph_0$ e $\aleph_1$? Isto é, $\exists \aleph \;/\; \aleph_0 < \aleph < \aleph_1$? Cantor conjeturou que não. E, uma tal conjetura ficou conhecida como a Hipótese do Contínuo.

Observe, então, que uma seqüência infinita qualquer de elementos distintos $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, \ldots$ é enumerável, dado que uma seqüência é, em essência, uma função $\mathbf{f(n) = a_n}$ cujo domínio é o conjunto dos números naturais **N**. Quer dizer, sendo os $\mathbf{a_n}$ distintos, a função **f** em questão é bijetora.

Sejam **NI** e **NP**, respectivamente, o conjunto dos números naturais ímpares e o conjunto dos números naturais pares. Logo, se **N** denota o conjunto dos números naturais, $\mathbf{NI \approx N}$ e $\mathbf{NP \approx N}$; pois existem funções bijetoras $\mathbf{f: NI \Rightarrow N}$ e $\mathbf{g: NP \Rightarrow N}$; ou seja, os conjuntos **NI** e **NP** são conjuntos infinitos enumeráveis (pois, podem ser postos em correspondência biunívoca com **N**).

Considere, por exemplo, a função $\mathbf{f: Z \Rightarrow N}$, definida por $\mathbf{f(x) = \{\ 2.x,}$ **se** $\mathbf{x > 0; -(\ 2.x + 1\ ),}$ **se** $\mathbf{x < 0; 0,}$ **se** $\mathbf{x = 0}$, onde **Z** e **N** denotam, respectivamente, o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números naturais. Assim, como é possível pôr os elementos do conjunto **Z** em correspondência biunívoca com os elementos do conjunto **N**, resulta que o conjunto dos números inteiros é, também, enumerável (ou seja, tem-se que $\mathbf{Z \approx N}$).

Pode-se demonstrar, por exemplo, também, que são conjuntos infinitos enumeráveis o conjunto de todos os números primos, o conjunto dos números racionais, o conjunto dos números racionais positivos, o conjunto dos números racionais negativos, o produto cartesiano dos números naturais pelos números naturais, o conjunto de todas as triplas ordenadas de números naturais, o conjunto dos números inteiros positivos, o conjunto dos números inteiros pares, dentre muitos outros.

Contudo, a despeito das observações anteriores, deve-se considerar que, se um conjunto **X** é apenas equipotente a um subconjunto de um conjunto **Y**, então diz-se que **X** precede **Y** (ou que **Y** domina **X**); instituindo-se, assim, o que se arbitrou denominar de Relação de Dominação. Uma tal relação entre os conjuntos **X** e **Y** é denotada por:

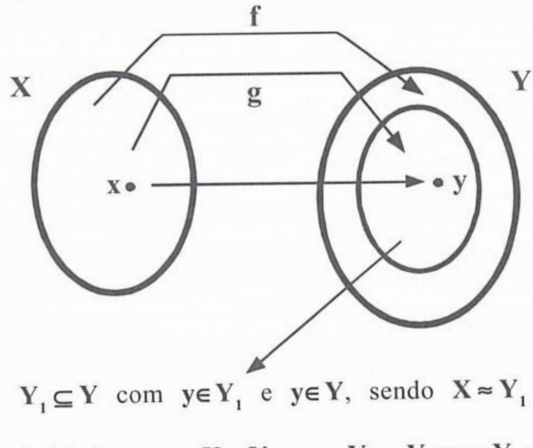
$$X \precapprox Y$$

Da Relação de Dominação em questão, é imediato, pois, que o conjunto **Y** domina o conjunto **X** (**X** é dominado por **Y**) se, e somente se, existe uma função **f** de **X** em **Y** tal que **f** é uma função injetora; ou, em símbolos, tem-se que:

$$\} \; X \precapprox Y \text{ se, e somente se, } \exists f: X \underline{\rightarrow} Y$$

A propósito do símbolo "}" (antecedendo uma expressão) ressalte-se que o mesmo é aqui utilizado para denotar que a expressão em referência é um teorema. Logo, a última expressão precedida do símbolo } denota um teorema.

Observe que, intuitivamente, a definição anterior vem afirmar que:



$Y_1 \subseteq Y$ com $y \in Y_1$ e $y \in Y$, sendo $X \approx Y_1$

Assim, admitindo-se que $X \approx Y_1$ e que $Y_1 \subseteq Y$, com $Y_1 = g(X) = \{ g(x) / x \in X \}$ (onde $g(X) = Y_1$ denota a imagem direta de um conjunto por uma função), tem-se que $X \approx Y_1$ se, e somente se, $\exists g: X \Rightarrow Y_1$. Portanto, $\forall x_1, x_2 \in X$ tem-se que $f(x_1)$ ¹ $f(x_2)$, com $f(x_1), f(x_2) \in Y$, pois do contrário não se teria a bijeção $g: X \Rightarrow Y_1$. Logo, $\exists f: X \Rightarrow Y$ se, e somente se, $X \precapprox Y$.

Dada a natureza da definição de Relação de Dominação, é oportuno observar que: $\vdash X \subseteq Y \rightarrow X \precsim Y$.

Pode-se, também, definir uma Relação de Dominação Estrita entre dois dados conjuntos. Neste sentido, se **Y** domina **X** e **X** não domina **Y**, de modo que **X** não é equipotente a **Y**, diz-se que "**Y** domina estritamente **X**" ou que "**X** precede estritamente **Y**"; sendo um tal fato denotado por: $X \prec Y$. Assim, o símbolo "$\prec$" será utilizado para denotar a Relação de Dominação Estrita.

Portanto, tem-se estabelecido que **Y** domina estritamente **X** se, e somente se, **Y** domina **X** e **X** não é equipotente a **Y** (sendo **X** e **Y** conjuntos); ou seja:

$$\vdash X \prec Y \leftrightarrow X \precsim Y \wedge \sim (X \approx Y)$$

Veja-se que o conjunto dos pares ordenados **(X, Y)** de subconjuntos de algum conjunto **E** para os quais "**Y** domina **X**" constitui uma relação no conjunto potência de **E**. Assim, a Dominação é uma Relação de Ordem Parcial.

Mas, toda Ordem Parcial é Reflexiva, Anti-Simétrica e Transitiva. Ou seja, a Relação de Dominação é Reflexiva, Anti-Simétrica e Transitiva. Portanto, dados os conjuntos **X**, **Y** e **Z**, tem-se verificado que:

I. *Propriedade Reflexiva:* $\vdash X \precsim X$;

II. *Propriedade Anti-Simétrica:* $\vdash (X \precsim Y \wedge Y \precsim X) \rightarrow X \approx Y$;

III. *Propriedade Transitiva:* $\vdash (X \precsim Y \wedge Y \precsim Z) \rightarrow X \precsim Z$.

Cabe salientar que a verificação das propriedades Reflexiva e Transitiva é algo que se possa qualificar como trivial ou elementar; enquanto que a verificação da propriedade Anti-Simétrica envolve questões, no mínimo, interessantes as quais, por sua vez, fogem ao sentido do que se poderia qualificar de "elementar" (no sentido matemático, e não no sentido lógico).

Observe que muito embora a Relação de Dominação tenha sido anteriormente caracterizada como uma Relação de Ordem Parcial é, a mesma, uma Relação de Ordem Total.

Assim, sendo a Relação de Dominação uma Relação de Ordem Total, para dois conjuntos quaisquer **X** e **Y**, tem-se que:

$$\vdash X \precsim Y \vee Y \precsim X$$

Evidencie-se que o teorema anteriormente apresentado é conhecido como o Teorema da Comparabilidade para conjuntos; o qual é conseqüência imediata do Teorema da Comparabilidade para conjuntos bem ordenados.

Recorde-se, portanto, em primeiro lugar, que "se um conjunto **A** é bem ordenado, então todo subconjunto do conjunto **A** tem um primeiro elemento".

"Se **X** e **Y** não são conjuntos bem ordenados pode-se bem ordená-los segundo o teorema da Boa Ordem de Zermelo". "Sejam **X** e **Y** conjuntos bem ordenados. (**a**) Ou **X** e **Y** são semelhantes; (**b**) ou um deles é semelhante a um segmento inicial do outro. Em (**a**), **X** e **Y** são equipotentes; em (**b**) um deles é equipotente a um subconjunto do outro".

3. TEOREMA DE SCHRÖDER-BERNSTEIN

A Propriedade Anti-Simétrica da Relação de Dominação vem enunciar o denominado (e importante) Teorema de Schröder-Bernstein; ou seja: "Se cada um dos conjuntos **X** e **Y** é equipotente a um subconjunto do outro, então **X** e **Y** são equipotentes".

A Relação de Equipotência e a Relação de Dominação entre conjuntos podem ser associadas à cardinalidade dos conjuntos envolvidos; senão, considere o que a seguir se apresenta.

Assim, dado um conjunto **X**, define-se a cardinalidade do conjunto **X** como sendo o único cardinal a equipotente com o conjunto **X**; o que pode ser indicado por: $a = \mathbf{Card}(X) = |X| = \#(X)$.

Da definição anterior, tem-se, por imediata conseqüência, que dois conjuntos **X** e **Y** equipotentes entre si têm cardinalidades iguais; isto é: $X \approx Y$ se, e somente se, $\#(X) = \#(Y)$, ou seja:

$$\} \; X \gg Y \leftrightarrow \#(X) = \#(Y)$$

Observe, ainda, quanto à cardinalidade, que se **X** é um conjunto, então o cardinal de **X** ($\#(X)$), o número cardinal de **X**, é o menor número ordinal equipotente a **X**, ou seja, $\#(X)$ é um ordinal inicial que seja equipotente a **X** (cardinais são ordinais iniciais).

Mas, um conjunto j é definido como sendo um ordinal se, e somente se, j é um conjunto transitivo e está estritamente bem ordenado pela Relação de Pertinência.

Ressalte-se, porém, que um dado conjunto **A** é transitivo se, e somente se, todo elemento de um elemento de **A** é por sua vez um elemento de **A**; isto é, **A** é transitivo se, e somente se, tem-se que $\mathbf{x} \in \mathbf{a}$ e $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ implica que $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$, para todo **x** e **a**; ou seja: $\} \; \mathbf{x} \in \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} \in \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{A}$.

A Relação de Pertinência ($\in$) em um conjunto **A**, por sua vez, corresponde a uma Relação de Ordem Parcial Estrita no conjunto **A**; pois, é tal que:

I. $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{A}, \mathbf{x} \notin \mathbf{x};$

II. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}, \mathbf{x} \in \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y} \notin \mathbf{x};$

III. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{A}, (\mathbf{x} \in \mathbf{y} \wedge \mathbf{y} \in \mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{z}.$

Mas, observe, em relação aos ordinais, que como cada um dos conjuntos $\varnothing$; $\{ \varnothing \}$; $\{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$; $\{ \varnothing, \{ \varnothing \}, \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} \}$; ...; são conjuntos transitivos e bem ordenados pela relação de pertinência, tais conjuntos são exemplos de ordinais. Além do mais, como todos os elementos matemáticos devem ser conjuntos (em uma Axiomatização da Teoria dos Conjuntos), pode-se definir os Números Naturais da seguinte forma; qual seja:

$\mathbf{0} = \varnothing$;

$\mathbf{1} = \{ \varnothing \}$;

$\mathbf{2} = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \}$;

$\mathbf{3} = \{ \varnothing, \{ \varnothing \}, \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} \}; \ldots$;

ou seja, $\mathbf{0} = \varnothing$; $\mathbf{1} = \{ \mathbf{0} \}$; $\mathbf{2} = \{ \mathbf{0, 1} \}$; $\mathbf{3} = \{ \mathbf{0, 1, 2} \}$; ... .

Logo, **0, 1, 2, 3, ...** são ordinais. Define-se, então, o conjunto w de todos os Números Naturais. Mas, w é um conjunto transitivo e está bem ordenado pela relação de pertinência. Logo, w é um ordinal, e é o primeiro ordinal infinito; sendo que **0, 1, 2, 3, ...** são os únicos ordinais finitos.

Saliente-se, também, que o sucessor de um conjunto **A**, denotado por **Suc(A)** ou $\mathbf{A}^+$, é definido por $\mathbf{Suc(\ A\ ) = A^+ = A \cup \{ A \}}$.

Assim, **0** não tem antecessor,

$\mathbf{1} = \mathbf{Suc(\ 0\ )}$ (ou, $\mathbf{0^+ = 0 + 1 = 1}$),

$\mathbf{2} = \mathbf{Suc(\ 1\ )}$ (ou, $\mathbf{1^+ = 1 + 1 = 2}$),

$\mathbf{3} = \mathbf{Suc(\ 2\ )}$ (ou, $\mathbf{2^+ = 2 + 1 = 3}$), ...

Mas, observe, ainda, que w não é sucessor de um ordinal anterior, sendo $\mathbf{Suc(\ \omega\ ) = \omega + 1 = \omega^+}$.

Apresentadas, nos parágrafos precedentes, as breves considerações sobre os ordinais, retorne-se às ponderações sobre os cardinais. Neste sentido, então, sendo **X** e **Y** conjuntos quaisquer tais que a = #(**X**) e b = #(**Y**) pode-se tomar a Relação de Desigualdade ($\leq$) para os números cardinais a e b da forma a seguir considerada; qual seja:

$$\} \ \alpha \leq \text{b } \textbf{se, e somente se, } \mathbf{X} \leqq \mathbf{Y}$$

Perceba-se que, em decorrência da definição acima apresentada, a Relação de Desigualdade para Números Cardinais é tanto uma Relação de Ordem Parcial (verificando essencialmente as propriedades Reflexiva, Anti-Simétrica e Transitiva) como, também, é uma Relação de Ordem Total (isto é, dados dois cardinais a e b, tem-se que ou a $\leq \beta$ ou $\beta \leq \alpha$).

Tem-se, conseqüentemente, o que se arbitrou denominar Lei da

Tricotomia para Números Cardinais; ou seja, para os cardinais a e b, tem-se que uma das seguintes afirmações deve ser, necessariamente, verdadeira; quais sejam: ou $\alpha < \beta$, ou $\alpha = \beta$, ou $\alpha > \beta$.

De forma correspondente, a Relação de Dominação Estrita entre conjuntos implica a Relação de Desigualdade Estrita para números cardinais; senão, observe o que a seguir é considerado.

Sejam, então, os conjuntos quaisquer **X** e **Y** de tal forma que $\alpha = \#(X)$ e $\beta = \#(Y)$. Portanto, afirma-se que: **$X \prec Y$ se, e somente se, $\alpha < \beta$**; isto é, tem-se que: $\vdash X \prec Y \leftrightarrow \alpha < \beta$.

Claramente, então, pode-se afirmar que para os cardinais a e b tem-se que: $\vdash \alpha < \beta \leftrightarrow (\alpha \leq \beta \wedge \alpha \neq \beta)$.

Portanto, do anteriormente exposto, resulta, quanto à Relação de Equipotência, que para os conjuntos **X** e **Y** tais que $\alpha = \#(X)$ e $\beta = \#(Y)$ uma das seguintes possibilidades deve ser verdadeira:

I. X e Y são equipotentes (implicando afirmar que $\alpha = \beta$);

II. X não é equipotente a Y, mas X é equipotente a um subconjunto de Y (implicando afirmar que $\alpha < \beta$);

III. Y não é equipotente a X, mas Y é equipotente a um subconjunto de X (implicando afirmar que $\beta < \alpha$);

IV. X é equipotente a um subconjunto de Y e Y é equipotente a um subconjunto de X (implicando que $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$).

Observe, pois, que (X ≾ Y Ù Y ≾ X) ® X » Y implica

$$(\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha) \rightarrow \alpha = \beta$$

Evidencie-se que do já considerado e levando-se em conta os conjuntos X e Y tais que $\alpha = \#(X)$ e $\beta = \#(Y)$, o Teorema de Schröder-Bernstein pode ser enunciado de uma das seguintes formas; quais sejam:

E_1: $\vdash (X \precsim Y \wedge Y \precsim X) \rightarrow (X \approx Y)$;

E_2: $\vdash (f: X \rightrightarrows Y \wedge g: Y \rightrightarrows X) \rightarrow (\exists h: X \Rightarrow Y)$;

E_3: $\vdash (\alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha) \rightarrow (\alpha = \beta)$, com $\alpha = \#(X)$ e $\beta = \#(Y)$;

E_4: **Se X e Y são conjuntos tais que cada um é equipotente a um subconjunto do outro, então X e Y são equipotentes;**

E_5: $\vdash (X \prec Y) \rightarrow \sim(Y \precsim X)$;

E_6: **Seja f uma aplicação de X em Y e g uma aplicação de Y em X. Existem, então, subconjuntos A e B de X e Y, respectivamente, tais que f(A) = B e g(Y - B) = X - A;**

E_7: **A Relação de Dominação entre dois conjuntos X e Y verifica a propriedade Anti-Simétrica;**

E_8: $\vdash ((X \supset Y \supset X_1) \wedge (X \approx X_1)) \rightarrow (X \approx Y)$.

Existem, por certo, várias maneiras de se demonstrar cada uma das formas do Teorema de Schröder-Bernstein, bem como a equivalência entre as mesmas. Muitas das demonstrações encontradas na literatura correspondente são demasiadamente técnicas e escondem algumas das importantes particularidades que se encontram na base do teorema em referência.

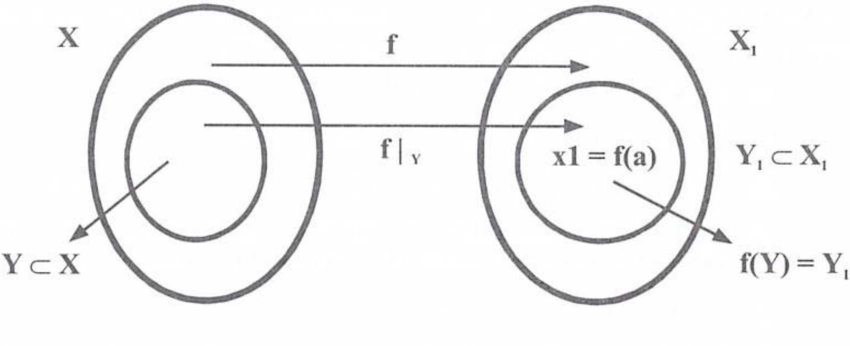
Desta forma, apresenta-se, a seguir, uma demonstração que procura fazer uso, tão somente, de conceitos elementares (ou, os mais elementares possíveis) da Teoria dos Conjuntos e onde pretende-se evidenciar, na medida do necessário, algumas daquelas particularidades anteriormente mencionadas, sem, contudo, servir-se de elementos matemáticos de maior complexidade.

Assim sendo, demonstre-se, por uma simples questão de "escolha", o Teorema de Schröder-Bernstein enunciado na forma:

$$\vdash ((X \supset Y \supset X_1) \wedge (X \approx X_1)) \rightarrow (X \approx Y).$$

Observe que, por hipótese, $\mathbf{X \supset Y \supset X_1}$ e $\mathbf{X \approx X_1}$. Contudo, se $\mathbf{X \approx X_1}$, existe uma função bijetora $\mathbf{f: X \Rightarrow X_1}$. Seja, também, a função conjunto $\mathbf{f(Y)}$ e definida por $\mathbf{f(Y) = Y_1 = \{ x_1 / f(a) = x_1, a \in Y \wedge x_1 \in X_1 \}}$ (onde $\mathbf{f(Y)}$ é o conjunto dos pontos imagem de elementos de $\mathbf{Y \subset X}$), sendo $\mathbf{f(Y) = Y_1}$ e $\mathbf{Y_1 \subset X_1}$.

Como $\mathbf{f: X \Rightarrow X_1}$ e $\mathbf{Y \subset X}$ (pela hipótese), então tem-se que $\mathbf{f}$ induz uma função $\mathbf{f|_Y}$ (onde $\mathbf{f|_Y}$ é a função restrição de $\mathbf{f}$ para $\mathbf{Y}$) também bijetora; isto é:



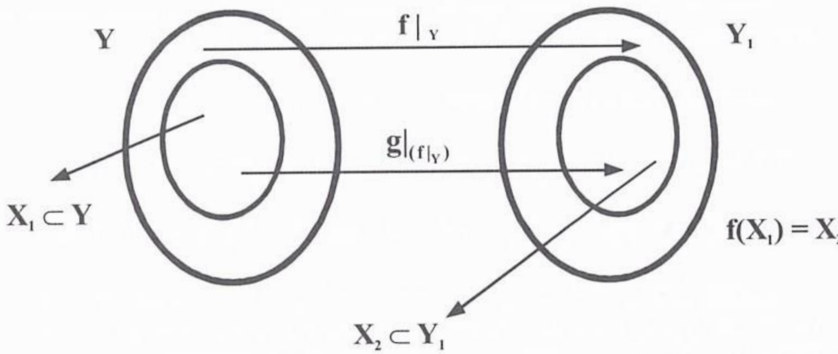
Veja que $\mathbf{f|_Y : Y \Rightarrow Y_1}$ ($\mathbf{f|_Y : Y \Rightarrow f(Y)}$) é definida por $\mathbf{f|_Y(a) = f(a)}$. Mas, pela Equipotência, tem-se que $\mathbf{Y \approx Y_1}$, pois $\mathbf{f|_Y : Y \rightarrow Y_1}$ é bijetora; isto é, $\mathbf{f|_Y : Y \Rightarrow Y_1}$.

Assim, pela hipótese, tem-se que $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X}$ e $\mathbf{X_1} \subset \mathbf{Y}$. Pelo anteriormente concluído, resulta afirmar que $\mathbf{Y_1} \subset \mathbf{X_1}$; podendo-se afirmar, em conseqüência, que $\mathbf{X} \supset \mathbf{Y} \supset \mathbf{X_1} \supset \mathbf{Y_1}$ e que $\mathbf{X} \approx \mathbf{X_1}$ e $\mathbf{Y} \approx \mathbf{Y_1}$.

Analogamente, se $\mathbf{f}|_{\mathbf{Y}} : \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{Y_1}$ e (pela hipótese) $\mathbf{X_1} \subset \mathbf{Y}$, então tem-se que: $\mathbf{f}|_{\mathbf{Y}}$ induz uma função bijetora de $\mathbf{X_1}$ em $\mathbf{X_2}$ a qual é definida por:

$$\mathbf{g}|_{(\mathbf{f}|_{\mathbf{Y}})} : \mathbf{X_1} \Rightarrow \mathbf{X_2}$$

Mas, se $\mathbf{g}|_{(\mathbf{f}|_{\mathbf{Y}})} : \mathbf{X_1} \Rightarrow \mathbf{X_2}$, então pela definição de Relação de Equipotência tem-se que $\mathbf{X_1} \approx \mathbf{X_2}$. Ou seja:



Assim, se $\mathbf{X} \supset \mathbf{Y} \supset \mathbf{X_1} \supset \mathbf{Y_1}$ e $\mathbf{X_2} \subset \mathbf{Y_1}$, então $\mathbf{X} \supset \mathbf{Y} \supset \mathbf{X_1} \supset \mathbf{Y_1} \supset \mathbf{X_2}$. Desta forma, seguindo-se o processo acima, sucessivamente, vem que:

$$\mathbf{X} \supset \mathbf{Y} \supset \mathbf{X_1} \supset \mathbf{Y_1} \supset \mathbf{X_2} \supset \mathbf{Y_2} \supset \mathbf{X_3} \supset \ldots \qquad \textbf{(A)}$$

Além do mais, existem conjuntos equipotentes $\mathbf{X}, \mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \ldots$ tais que $\mathbf{X} \approx \mathbf{X_1}, \mathbf{X_1} \approx \mathbf{X_2}, \mathbf{X_2} \approx \mathbf{X_3}, \ldots$, bem como, conjuntos equipotentes $\mathbf{Y}, \mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}, \ldots$ tais que $\mathbf{Y} \approx \mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_1} \approx \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_2} \approx \mathbf{Y_3}, \ldots$.

Observe, também, que $\mathbf{f(X_1) = X_2}$, $\mathbf{f(X_2) = X_3}$, $\mathbf{f(X_3) = X_4}$, ... , bem como, que $\mathbf{f(Y) = Y_1}$, $\mathbf{f(Y_1) = Y_2}$, $\mathbf{f(Y_2) = Y_3}$, ..., correspondentemente.

Das operações elementares com conjuntos, tem-se estabelecido que:

$$\} (\alpha \subset \beta) \rightarrow (\alpha = \alpha \cap \beta) \qquad \textbf{(B)}$$

Portanto, de (**A**) e (**B**) pode-se escrever que:

a. $\mathbf{Y} \subset \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cap \mathbf{X} = \mathbf{X} \cap \mathbf{Y}$;

b. $\mathbf{X_1} \subset \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X_1} = \mathbf{X_1} \cap \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \cap \mathbf{X_1}$.

Mas, por (**a**), $X_1 = (X \cap Y) \cap X_1 = X \cap Y \cap X_1$;

c. $\quad Y_1 \subset X_1 \rightarrow Y_1 = Y_1 \cap X_1 = X_1 \cap Y_1$.

Mas, por (**b**), $Y_1 = (X \cap Y \cap X_1) \cap Y_1 = X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1$.

Portanto, generalizando o procedimento anterior, tem-se, em conseqüência que: $X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1 \cap X_2 \cap Y_2 \cap \ldots$.

Defina-se, porém, $\mathbf{B} = X \cap Y \cap X_1 \cap Y_1 \cap X_2 \cap Y_2 \cap \ldots$ $\quad$ (**C**).

Por outro lado, observe que das operações elementares com conjuntos, resulta afirmar, também, que: $\beta \supset \alpha \rightarrow \beta = (\beta - \alpha) \cup \alpha$ $\quad$ (**D**)

Assim, de (**A**), (**C**) e (**D**) pode-se concluir que:

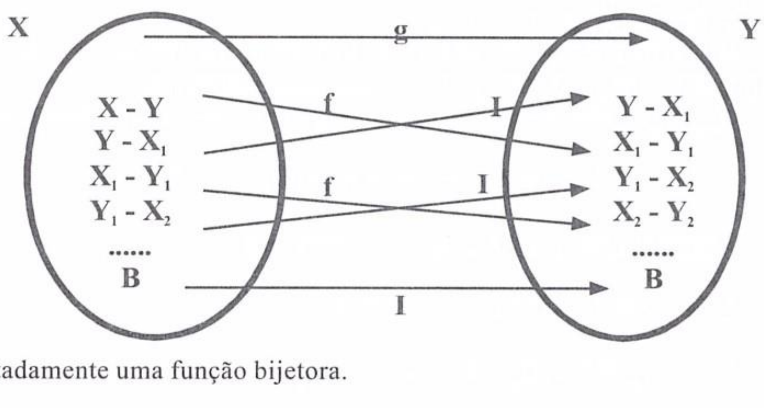
$$X = (X - Y) \cup (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup (Y_1 - X_2) \cup \ldots \cup \mathbf{B} \quad \textbf{(E)}, \text{ e,}$$

$$Y = (Y - X_1) \cup (X_1 - Y_1) \cup (Y_1 - X_2) \cup (X_2 - Y_2) \cup \ldots \cup \mathbf{B} \quad \textbf{(F)}.$$

Como $X \approx X_1 \approx X_2 \approx X_3, \ldots$ e $Y \approx Y_1 \approx Y_2 \approx Y_3, \ldots$, então, tem-se que $(X - Y) \approx (X_1 - Y_1) \approx (X_2 - Y_2) \approx \ldots$. Assim, $\mathbf{f}\colon (X_n - Y_n) \Rightarrow (X_{n+1} - Y_{n+1})$, com $\mathbf{n} = \mathbf{0, 1, 2, 3, \ldots}$, é uma função bijetora em conseqüência da definição de Relação de Dominação.

Mas, finalmente, a função $\mathbf{g}\colon X \rightarrow Y$, definida por:

$$\mathbf{g(x)} = \begin{cases} \mathbf{f(x), se \ \ x \in X_i - Y_i (ou \ \ x \in X - Y)} \\ \mathbf{x, se \ \ x \in Y_i - X_{i+1} (ou \ \ x \in B)} \end{cases}$$, isto é, a função:



é notadamente uma função bijetora.

Mas, pela Relação de Equipotência entre conjuntos $\exists g$: $X \Rightarrow Y$ se, e somente se, $X \approx Y$.

Assim, de fato, é válido o Teorema de Schröder-Bernstein enunciado na forma $\vdash ((X \supset Y \supset X_1) \wedge (X \approx X_1)) \rightarrow (X \approx Y)$, é válido.

4. CONJUNTOS INFINITOS E A RELAÇÃO DE DOMINAÇÃO

Apresentadas, contudo, as ponderações anteriores sobre o Teorema de Schröder-Bernstein, considere, a seguir, correspondentes observações sobre o Teorema de Cantor.

Antes, porém, de se abordar, efetivamente, um tal teorema, segundo objetivo declarado no prólogo deste texto, julga-se interessante apresentar, preliminarmente, algumas considerações sobre conjuntos finitos e infinitos através da Relação de Dominação e da Relação de Dominação Estrita.

Primeiramente, então, observe-se que: "Um conjunto **X** diz-se finito se, e somente se, é equipotente a um número natural; isto é, se $n \in N$ (onde N denota o conjunto dos Números Naturais), então **X** diz-se conjunto finito se, e somente se, $X \approx n$"; "Um conjunto **X** é denominado conjunto infinito se, e somente se, $\sim(X \approx n)$"; "ω é infinito dado que $\sim(\omega \approx n \in N)$"; "Como conseqüência do Axioma da Escolha, um conjunto diz-se infinito se, e somente se, é equipotente a um subconjunto próprio de si mesmo, sendo finito em caso contrário"; "Também como conseqüência do Axioma da Escolha, tem-se que todo conjunto infinito tem um subconjunto equipotente a ω".

Também observe, como já precisado, que **0**, **1**, **2**, **3**, ... são ordinais e são os únicos ordinais finitos. ω (um conjunto transitivo e bem ordenado pela relação de pertinência) é um ordinal e é o primeiro ordinal infinito. w é o número ordinal dos Números Naturais. Sendo **N** o conjunto dos Números Naturais, tem-se que $\omega = \mathbf{ord}(N)$.

Acrescente-se, ainda, que tomando-se uma família qualquer não vazia de **n**-conjuntos não vazios $\{A_1, A_2, A_3, ..., A_n\} = \{A_i\}_{i \in I}$ onde $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$, o Axioma da Escolha afirma que é possível escolher simultaneamente um elemento de cada conjunto. Assim, o Axioma da Escolha afirma que existe um subconjunto **B** da união de conjuntos $\cup_{i \in I} A_i$ tal que a interseção de **B** com cada conjunto A_i consiste de exatamente um elemento. Ou, em outros termos, o Axioma da Escolha possibilita afirmar que o produto cartesiano de uma família não vazia de conjuntos não vazios é não vazio.

Recordados os fatos acima, considere-se, então, que:

(A) Se um conjunto X é dominado por um conjunto Y e Y é um conjunto finito, então X é um conjunto finito.

Para a verificação do imediatamente afirmado basta notar que se **Y** domina **X**, **X** é equipotente a um subconjunto de **Y**, segundo afirma a Relação de Dominação. Mas, se **Y** é finito, todo subconjunto de **Y** é finito, dado que todo subconjunto de um conjunto finito é finito. Assim, se **X** é equipotente a um conjunto finito, então **X** é finito.

(B) **X é um conjunto infinito se, e somente se, X domina** w; isto é: **X é infinito se, e somente se,** $\omega \precsim X$.

Evidencie-se, inicialmente, que **se X é infinito, então X domina** ω.

Como conseqüência do Axioma da Escolha, como **X** é infinito, **X** tem um subconjunto equipotente a ω. Mas, se é equipotente a um subconjunto de **X**, então, pela definição de Dominação, tem-se, portanto, que **X domina** w.

Reciprocamente, para se evidenciar que **se X domina** ω**, então X é infinito**, observe que se **X** domina ω, então é impossível que exista um número natural $n \in N$ tal que $X \approx n$, senão ter-se-ia que $\omega \approx n$, e isto contrariaria o fato de ω ser infinito. Ou seja, por definição se **X** domina ω, então w é equipotente a um subconjunto de **X**. Mas, ω é infinito. Assim, ω não pode ser equipotente a um conjunto finito. Portanto, **X** é infinito.

(C) **Um conjunto X é finito se, e somente se,** w **domina estritamente** X; isto é: $\vdash$ **X é finito** $\leftrightarrow X \prec \omega$.

Veja-se, primeiramente, que **se X é finito,** $X \prec \omega$.

Claramente, se **X** é finito, então $X \approx n \in N$. Mas, como ω é infinito, ω domina **n** e é fato que $\sim(n \approx \omega)$. Logo, $n \prec \omega$. Portanto, se $X \approx n \in N$ e $n \prec \omega$, então $X \prec \omega$.

Reciprocamente, evidencie-se que **se** $X \prec \omega$**, então X é finito**.

Suponha que **X** é infinito. Mas, **se X é infinito, então X domina** ω. Contudo, se **X domina** ω e ω **domina estritamente** X, então, pela transitividade da Relação de Dominação Estrita, ω **domina estritamente** ω ($\omega \prec \omega$). Mas, ainda, pela definição de Dominação Estrita, $\omega \prec \omega \leftrightarrow$ (ω **domina** ω) $\wedge \sim(\omega \approx \omega)$, o que é um absurdo. Logo, **X** não é infinito, **X** é finito.

Por outro lado, entretanto, há de se observar, também, que as Relações de Dominação e de Equipotência podem ser empregadas para se caracterizar definições de conjuntos enumeráveis e enumeravelmente infinitos.

Assim sendo, estabelece-se, para um conjunto **X** qualquer que:

i. X é enumerável se, e somente se, ω *domina X;*

ii. X é enumeravelmente infinito se, e somente se, X é equipotente a ω.

Mas, pelo anteriormente considerado, é muito claro que as afirmações (**i**) e (**ii**), imediatamente precedentes, são legítimas.

Observe, a propósito, que muitas construções da Teoria dos Conjuntos quando realizadas com conjuntos enumeráveis conduzem a novos conjuntos enumeráveis tais como:

"Todo subconjunto de w é enumerável.";

"Todo subconjunto de cada conjunto enumerável é enumerável.";

"A reunião de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.";

"O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é enumerável.";

"Cada conjunto infinito contém um subconjunto que é enumerável.";

"O conjunto de todos os subconjuntos finitos de um conjunto enumerável é enumerável."; e, muitas outras possibilidades.

5. TEOREMA DE CANTOR

Estudando os vários conjuntos enumeráveis, poder-se-ia supor (erroneamente) que todo conjunto é enumerável. Contudo, como se sabe, nem todo conjunto é enumerável. E, uma prova deste fato pode ser obtida a partir do Teorema de Cantor, o qual enuncia-se por: "Todo conjunto **X** é dominado estritamente por seu conjunto potência $\wp$Ã(**X**); isto é: $\mathbf{X} \prec \wp(\mathbf{X})$, para qualquer que seja o conjunto **X**".

Para mostrar um tal teorema, considere as observações que, a seguir, são apresentadas.

Considere o conjunto de todas as funções g do conjunto **X** em **2** (onde, como observado anteriormente, $\mathbf{2} = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} = \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}$); isto é, seja o conjunto denotado por $\mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ e definido por $\mathbf{2}^{\mathbf{X}} = \{ \gamma / \gamma\text{: } \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{2}\}$.

Observe, entretanto, que a função $\mathbf{f}\text{: } \wp(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ é uma função bijetora; isto é, $\mathbf{f}\text{: } \wp(\mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ (em que Þ é utilizado como convencionado e $\wp(\mathbf{X})$ denota o conjunto das partes de **X**).

Diga-se que **f** faz corresponder a cada subconjunto **A** de **X** (cada elemento de $\wp(\mathbf{X})$, $\mathbf{A} \in \wp(\mathbf{X})$) a função característica de **A** (um elemento de $\mathbf{2}^{\mathbf{X}}$).

Mas, se $\mathbf{f}\text{: } \wp(\mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$, então $\wp(\mathbf{X}) \approx \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$, pela Relação de Equipotência. Logo, se $\mathbf{X} \prec \wp(\mathbf{X})$ e $\wp(\mathbf{X}) \approx \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$, então $\mathbf{X} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$; ou seja, o Teorema de Cantor pode, também, ser enunciado por: "$\mathbf{X} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$; para qualquer que seja o conjunto **X**".

Mostre-se, desta forma, que para qualquer conjunto **X**, o conjunto potência do conjunto **X** (o conjunto $\mathbf{2}^{\mathbf{X}}$) domina estritamente o conjunto **X**, isto é, que $\mathbf{X} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$.

Observe, inicialmente, que $\mathbf{X} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ é equivalente a tomar a seguinte conjunção; qual seja: $\mathbf{X} \precsim \mathbf{2}^{\mathbf{X}} \wedge \sim (\mathbf{X} \approx \mathbf{2}^{\mathbf{X}})$.

Assim, deve-se demonstrar que 2^X **domina** X e que os conjuntos X e 2^X não são equipotentes.

Pelo anteriormente considerado, 2^X domina X se, e somente se, existe uma função γ injetora de X em 2^X, isto é, $\exists g: X \rightrightarrows 2^X$. Ora, é imediato, que uma função $g: X \rightarrow 2^X$ que envia cada elemento $x \in X$ para o conjunto constituído apenas do elemento x, isto é, a função g definida por $g(x) = \{x\}$ é uma função injetora.

Assim, $\exists g: X \rightrightarrows 2^X$, e, de fato, 2^X domina X.

Deve-se, agora, demonstrar que $\sim (X \approx 2^X)$.

Suponha-se o contrário; isto é, que $X \approx 2^X$. Assim, $X \approx 2^X$ se, e somente se, $\exists f: X \Rightarrow 2^X$.

Seja, portanto, $x \in X$ tal que $x \notin f(x)$ (isto é, sejam os $x \in X$ tais que x não é membro do conjunto que é sua imagem).

Defina-se o conjunto Y dos $x \in X$ tais que $x \notin f(x)$; isto é, seja o conjunto $Y = \{x / x \in X \wedge x \notin f(x)\}$.

Mas, Y é um subconjunto de X e, portanto, $Y \in 2^X$.

Desta forma, como a função f aplica X sobre 2^X e $Y \in 2^X$, existe um elemento $a \in X$ tal que $f(a) = Y$. Logo, o elemento a ou pertence ao conjunto Y ou não pertence.

Se, porém, $a \in Y$, pela definição de Y, deve-se ter que $a \notin f(a)$; o que é impossível, pois $f(a) = Y$. Por outro lado, se $a \notin Y$, então, mais uma vez, pela definição de Y, deve-se ter que $a \in f(a)$; sendo igualmente impossível (pois, $\forall x, x \notin f(x)$).

Portanto, como a suposição inicial de que $X \approx 2^X$ conduziu a uma contradição (em ambos os casos possíveis), resulta, pois, afirmar que $\sim (X \approx 2^X)$.

Nestas condições, para qualquer que seja o conjunto X, tem-se, de fato, que $X \prec 2^X$; ou, como sempre $\wp(X) \approx 2^X$, então, para todo conjunto X, tem-se sempre que $X \prec \wp(X)$.

Entretanto, como a Relação de Dominação implica desigualdade de cardinais, se $\alpha = \#(X)$ e $2^\alpha = \#(2^X)$, então $X \prec \wp(X)$ implica $X \prec 2^X$, que por sua vez implica $\#(X) < \#(2^X)$, que por seu turno implica $a < 2^\alpha$.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como estabelecido anteriormente, o número cardinal de conjuntos enumeráveis é designado por $\aleph_0$. Contudo, os números cardinais são bem ordenados.

Assim, o sucessor imediato de $\aleph_0$ é $\aleph_1$. O sucessor imediato de $\aleph_1$ é $\aleph_2$, sendo seu sucessor imediato $\aleph_3$; tendo-se os $\aleph_v$. O número cardinal que sucede todos os $\aleph_v$, é, então, dado por $\aleph\omega$.

Mas, se N é o conjunto dos Números Naturais, então o número cardinal de **N** é $\aleph_0 = \#(\mathbf{N})$. Se **R** é o conjunto dos Números Reais, então o cardinal de **R** é $\aleph_1 = \#(\mathbf{R}) = 2^{\aleph_0}$.

Assim, pelo teorema de Cantor, para o conjunto **N** dos Números Naturais (e de resto para qualquer conjunto), $\#(\mathbf{N}) < \#(2^{\mathbf{N}})$. Mas, se $\aleph_0 < \aleph_1$, e $\aleph_0$ é a potência dos conjuntos enumeráveis, então, a potência dos Números Reais é maior. Logo, diz-se que os Números Reais são não-enumeráveis.

Ou, em outros termos, como w = **ord(N)** (um conjunto transitivo e bem ordenado pela relação de pertinência - o primeiro ordinal infinito), tem-se, também, por Cantor que $\omega < 2\omega$ (onde 2ω significa o conjunto de todas as seqüências infinitas de **0** e **1**, isto é, das funções de w em **2**).

Conseqüentemente, nem todo conjunto infinito é enumerável.

Encerrando, entretanto, este trabalho, por julgar conveniente e esclarecedor (ou, no mínimo, interessante), apresentam-se, a seguir, considerações sobre o fato de **R** (o conjunto dos números reais) ser não-enumerável.

Sejam os intervalos reais **[0, 1]**, **] 0, 1 [**,**[0, 1 [** e **] 0, 1]**.

Primeiramente, observe que, da definição de Equipotência entre conjuntos, $\mathbf{R} \approx \,]\,0, 1\,[$ se, e somente se, existe uma função bijetora $\mathbf{f}: \mathbf{R} \rightarrow \,]\,0, 1\,[$, ou seja, existe $\mathbf{f}: \mathbf{R} \Rightarrow \,]\,0, 1\,[$.

Mas, a função $\mathbf{f}: \mathbf{R} \Rightarrow \,]\,0, 1\,[$ definida por $\mathbf{f(x)} = (1/2)(1 + x/(1+|x|))$ é uma função bijetora. Logo: $\mathbf{R} \approx \,]\,0, 1\,[$.

Analogamente, $[\,0, 1\,] \approx \,]\,0, 1\,[$ se, e somente se, existe uma função bijetora $\mathbf{h}: [\,0, 1\,] \rightarrow \,]\,0, 1\,[$, ou seja, existe $\mathbf{h}: [\,0, 1\,] \Rightarrow \,]\,0, 1\,[$.

Mas, a função $\mathbf{h}: [\,0, 1\,] \Rightarrow \,]\,0, 1\,[$ definida por $\mathbf{h(x)} = \{\, 1/2$, **se** $x = 0$; $1/(n+2)$, **se** $x = 1/n$ **com** $n \in \mathbf{N}$; x, **se** $x \neq 0, 1/n$ **com** $n \in \mathbf{N}$ é uma função bijetora. Logo: $[\,0, 1\,] \approx \,]\,0, 1\,[$.

Como é sabido, a Relação de Equipotência verifica a propriedade simétrica. Então, de $[\,0, 1\,] \approx \,]\,0, 1\,[$, resulta que $]\,0, 1\,[\, \approx [\,0, 1\,]$. Entretanto, a Equipotência entre conjuntos verifica, também, a propriedade transitiva. Portanto, se $\mathbf{R} \approx \,]\,0, 1\,[$ e $]\,0, 1\,[\, \approx [\,0, 1\,]$, resulta que $\mathbf{R} \approx [\,0, 1\,]$.

Observe-se, também, que a função $\mathbf{g}: [\,0, 1\,] \rightarrow [\,0, 1\,[$, definida por $\mathbf{g(x)} = \{\, 1/(n+1)$, **se** $x = 1/n$ **com** $n \in \mathbf{N}$; x, **se** $x \neq 1/n$ **com** $n \in \mathbf{N}$ é uma função bijetora. Portanto, da Equipotência tem-se que $[\,0, 1\,] \approx [\,0, 1\,[$.

Notadamente, pela transitividade da Equipotência tem-se, de $\mathbf{R} \approx [\,0, 1\,]$ e $[\,0, 1\,] \approx [\,0, 1\,[$, que $\mathbf{R} \approx [\,0, 1\,[$. Mas, pela propriedade simétrica da Relação de Equipotência, de $\mathbf{R} \approx [\,0, 1\,[$, vem que $[\,0, 1\,[\, \approx \mathbf{R}$.

Ainda, observe que $\mathbf{m}: [\,0, 1\,[\, \rightarrow \,]\,0, 1\,]$ definida por $\mathbf{m(x)} = 1 - x$ é uma função bijetora. Conseqüentemente, pela Relação de Equipotência entre conjuntos, pode-se afirmar que $[\,0, 1\,[\, \approx \,]\,0, 1\,]$.

Assim, dos resultados anteriores e tomando-se as propriedades da Equipotência, conclui-se que: $\mathbf{R} \approx [\,0, 1\,] \approx \,]\,0, 1\,[\, \approx [\,0, 1\,[\, \approx \,]\,0, 1\,]$.

Por outro lado, mostre-se que o conjunto de números reais (o intervalo real) **[0, 1]** não é enumerável, e, que, em conseqüência, o conjunto **R**, o conjunto dos números reais, é um conjunto não-enumerável. Tome-se para tanto, entretanto, a forma já consagrada de se evidenciar o fato em questão. Desta forma, considere-se o oposto, isto é, que **[0, 1]** é enumerável, denotando por **A** o intervalo real **[0, 1]**.

Escreva-se os elementos de **A** em uma seqüência, ou seja,

$$A = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ... \}.$$

Cada elemento de **A** pode, então, ser escrito sob a forma de um decimal infinito da seguinte maneira:

$$x_1 = 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} ... a_{1n} ...$$
$$x_2 = 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} ... a_{2n} ...$$
$$x_3 = 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} ... a_{3n} ...$$
$$.......................................$$
$$x_n = 0, a_{n1}\, a_{n2}\, a_{n3} ... a_{nn} ...$$

onde $a_{ij} \in \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ e cada decimal contém um número infinito de elementos diferentes de zero.

Tome-se os decimais infinitos sob a forma **0,999...** . Por exemplo, tome-se **1/2 = 0,5000... = 0,4999...** . Assim, escreva-se os números na forma decimal infinita na qual um número infinito de noves apareça (tal que exista um número infinito de noves ou que sejam todos, exceto um conjunto finito de algarismos, zeros; como no exemplo).

Construa-se, em seguida, o número real $y = 0, b_1\, b_2\, b_3 ... b_n ...$ que pertencerá a **A**, da seguinte maneira: escolha b_1 tal que b_1 ¹ a_{11} e b_1 ¹ **0**, escolha b_2 tal que $b_2 \neq a_{22}$ e $b_2 \neq 0$, e assim proceda-se para os demais casos.

Observe, então, que $y \neq x_1$, pois $b_1 \neq a_{11}$ e $b_1 \neq 0$, $y \neq x_2$, pois $b_2 \neq a_{22}$ e $b_2 \neq 0$, e assim correspondentemente. Logo, $y \neq x_n$ para $n \in$ N (onde N representa o conjunto dos Números Naturais). Portanto, resulta que $y \notin A$, contrariando o fato de que $y \in A$.

O que permite afirmar que a suposição inicial de **A** ser um conjunto enumerável conduz a uma contradição. Logo, **A = [0, 1]** não é enumerável. Mas, como **[0, 1] ≈ R**, **R** (o conjunto dos números reais) não é enumerável.

Tome-se, entretanto, a seguinte propriedade dos números reais; isto é: seja $I_1 = [a_1, b_1]$, $I_2 = [a_2, b_2]$, $I_3 = [a_3, b_3]$, ... uma seqüência de intervalos fechados para os quais $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset ...$. Nestas condições, então, diz-se que existe um número real **y** que pertence a quaisquer de tais intervalos.

Pode-se, no entanto, alternativamente, demonstrar que o intervalo fechado **[0, 1]** não é enumerável servindo-se da propriedade considerada precedentemente; o que, diga-se, é outra das formas clássicas de demonstração.

Logo, suponha-se o contrário e considere $A = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ... \}$ como no caso anterior.

Proceda-se a construção dos intervalos fechados $\mathbf{I}_1$, $\mathbf{I}_2$, $\mathbf{I}_3$, ... como a seguir indicado.

Sejam os seguintes subintervalos fechados de **[0, 1]**, isto é, os intervalos **[0, 1/3]**, **[1/3, 2/3]**, **[2/3, 1]**, cada qual de comprimento **1/3**. Assim sendo, $\mathbf{x}_1$ não poderá pertencer a todos os três intervalos. Contudo, se $\mathbf{x}_1$ fosse um dos extremos, poderia pertencer a dois intervalos.

Seja o intervalo $\mathbf{I}_1 = [\ \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\ ]$ um dos intervalos considerados e tal que $\mathbf{x}_1 \notin \mathbf{I}_1$. Considere, também, os três subintervalos fechados de $\mathbf{I}_1 = [\ \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1\ ]$; isto é: $[\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + 1/9\ ]$, $[\ \mathbf{a}_1 + 1/9, \mathbf{a}_1 + 2/9\ ]$, $[\ \mathbf{a}_1 + 2/9, \mathbf{b}_1\ ]$, tendo cada um comprimento **1/9**.

De forma similar, seja $\mathbf{I}_2$ um dos intervalos anteriores tal que $\mathbf{x}_2$ não pertence a $\mathbf{I}_2$. Prossiga, assim, sucessivamente.

Resulta, em conseqüência, uma seqüência de intervalos fechados tais que $\mathbf{I}_1 \supset \mathbf{I}_2 \supset \mathbf{I}_3 \supset$... onde $\mathbf{x}_n \notin \mathbf{I}_n$ para cada $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$ (**N** denota o conjunto dos Números Naturais).

Entretanto, pela propriedade dos Números Reais considerada, existe um número real $\mathbf{y} \in [\ \mathbf{0}, \mathbf{1}\ ]$ tal que **y** pertence a cada um dos correspondentes intervalos. Mas, como $\mathbf{y} \in \mathbf{A} = \{\ \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, ...\ \}$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}_m$ para algum $\mathbf{m} \in \mathbf{N}$.

Portanto, seguindo a construção estabelecida anteriormente, verifica-se que $\mathbf{y} = \mathbf{x}_m$ e $\mathbf{x}_m \notin \mathbf{I}_m$, contrariando o fato de **y** pertencer a qualquer intervalo. O que se dá devido à suposição inicial de tomar o conjunto **A** como enumerável.

Assim, devido à contradição constatada, resulta afirmar que o conjunto **A** em questão não é enumerável; ou seja, **[0, 1]** não é enumerável; sendo pela Equipotência, o conjunto dos Números Reais não-enumerável.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DIAS, C. M. C. *Compêndios de matemática e lógica matemática: uma abordagem extemporânea*. 2ª. ed. Curitiba: C. M. C. Dias, 1999.