SÃO ANTINOMIAS OS PARADOXOS MATEMÁTICOS?

Carlos Magno Corrêa Dias [1]

RESUMO

O principal propósito deste trabalho é explorar o modo pelo qual se utiliza a concepção de Paradoxo em Matemática, mostrando sua importância para o desenvolvimento da mesma. Os Paradoxos são conhecidos desde os tempos do filósofo grego Zenão. A análise de vários paradoxos de difícil solução contribuiu para o desenvolvimento atual da Matemática.

Contudo, o estudo aqui apresentado não pretende ser uma compilação integral das possibilidades inerentes ao assunto abordado e, nem tão pouco, limita-se ao enfoque considerado. Porquanto, a importância dos paradoxos em Matemática não poderia ser completamente abordada, em quaisquer de suas dimensões, na limitação deste espaço; uma vez que o tema, a bem da verdade, encontrar-se-á, na melhor das reflexões, em pleno desenvolvimento.

Palavras-chave: Paradoxos. Contradições. Infinito. Teoria dos Conjuntos.

ABSTRACT

The main purpose of this article is to explore the idea of Paradox such as it is used in Mathematics, to demonstrate its importance in the development of Mathematics. Paradoxs has been known since the time of the Greek philosopher Zeno of Elea. Many Paradoxs, however, has been more difficult to resolve, and its study has contributed in the actual development of Mathematics. Yet the study here presented does not intend *to be a complete* compilation

---

1. Bacharel em Matemática e Licenciado em Ciências pela PUC-PR. Especialista em Métodos Computacionais e em Didática do Ensino Superior pela PUC-PR. Mestre em Educação/Lógica pela UFPR. Doutorando em Lógica e Filosofia da Ciência pela UNICAMP. Professor de Lógica Matemática e de Cálculo Diferencial e Integral do CEFET-PR (Unidade de Curitiba) e da PUC-PR.

of the inherent possibilities of the subject studied and it is neither limited to the focus here reputed. Whereas the importance of the Paradoxs could not be completely studied, in any of its dimensions, in the limits of this space, once the theme approached specifically, for the sake of truthfulness, will be at best, under full development.

Key Words: Paradoxs. Contradictions. Infinity. Set Theory.

1. INTRODUÇÃO

Considere a seguinte soma de uma determinada série infinita de termos, qual seja: $\mathbf{0 = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots}$. Reagrupe-se, no entanto, segundo as propriedades algébricas correspondentes, os termos da mesma série infinita da seguinte forma alternativa: $\mathbf{0 = (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \ldots}$ $\mathbf{+ = 1 = 1}$. Concluir-se-ia, então, surpreendentemente, que $\mathbf{0 = 1}$? Como isto é possível? O que está por trás desta contradição?

Considere, também, a equação $\aleph_0 + \mathbf{1} = \aleph_0$. Pode-se subtrair $\aleph_0$ de ambos os lados de uma tal equação e chegar-se à afirmação "paradoxal" de que $\mathbf{1 = 0}$, enquanto $\aleph_0$ (aleph zero) é o número cardinal dos conjuntos enumeravelmente infinitos? De forma similar, se **C** é a potência do contínuo, pode-se subtrair **C** de ambos os lados da equação $\mathbf{C + 1 = C}$ levando ao absurdo $\mathbf{1 = 0}$? Quando, porém, que a equação do tipo $\mathbf{A + 1 = A}$ é sempre verdadeira (não sendo absurda)? Existe uma tal possibilidade? Quando a equação $\mathbf{A + 1 = 1}$ é verdadeira, se **A** não é "zero"? Seria possível afirmar que $\mathbf{A + A = A}$ é verdadeira, se **A** é "qualquer" outro valor além do "zero"?

Por outro lado, pergunta-se: existe o "conjunto de todos os conjuntos"? Poder-se-ia definir o "conjunto de todos os números cardinais existentes"? Seria possível admitir o "conjunto de todos os conjuntos que não contém a si mesmo como membro"? Quais as conseqüências de se supor a existência do "conjunto de todos os números ordinais"? É possível que "uma parte tenha o mesmo tamanho que o todo"?

Ao longo da evolução da Ciência (principalmente no universo da Matemática e da Lógica), importantes pesquisadores se depararam com problemas (às vezes "elementares") tais que ao se partir de suposições muito plausíveis obtinham-se conclusões surpreendentes e contrárias, em muitas das vezes, a suas convicções ou, em outros casos, continham contradições internas independentes da intuição de quem os analisava. Ao conjunto de tais problemas, arbitrou-se denominar (indistintamente) Paradoxos ou Antinomias.

No entanto, em teorias formalizadas, os termos Paradoxo e Antinomia distinguem-se quanto à natureza. Embora a constatação de Paradoxos e Antinomias em uma teoria obrigue a reestruturação da teoria, a existência de Antinomias é mais grave e sua eliminação acarreta considerável redução na abrangência da teoria.

No presente compêndio, pretende-se apresentar, então, de forma geral, algumas considerações sobre Paradoxos e Antinomias, evidenciando-se, em conseqüência, ao assumir uma distinção necessária entre tais termos, que determinados Paradoxos considerados na Matemática são, em verdade, exemplos de Antinomias.

2. PARADOXOS E ANTINOMIAS

Os Paradoxos e as Antinomias têm desafiado o intelecto humano e foram (e continuam sendo, mesmo nos dias atuais) responsáveis por promover verdadeiras revoluções no conhecimento, gerando, em conseqüência da análise dos mesmos, em diversas áreas (particularmente em Matemática e em Lógica), profundas crises conceituais e renovados posicionamentos.

Freqüentemente, contudo, em termos da linguagem usual (da linguagem materna), encontram-se as palavras Antinomia e Paradoxo definidas como termos análogos; não se percebendo, em vários contextos, que os mesmos não podem ser confundidos um com o outro, pois que diferem quanto à natureza e as conseqüências.

Porém, neste artigo (e de forma técnica, e em geral), podem-se, considerar algumas diferenças (recomendáveis) entre os termos Paradoxo e Antinomia, dado que, de outra forma, em essência, não dizem respeito ao mesmo tipo de problema (lógico).

Dentre as possíveis classificações existentes dos termos Paradoxo e Antinomia, pode-se considerar aquela que propõe que:

(I) Paradoxo "é um argumento que produz uma conclusão surpreendente, a qual é contrária à nossa intuição", e,

(II) Antinomia "é um argumento constituído de uma contradição interna, a qual é independente de nossas convicções".

Assim, veja-se que uma Antinomia contém uma contradição interna (um "erro") responsável pela inconsistência da teoria. Tal contradição é independente da forma de argumentação e, se não descoberta, será disseminada por toda teoria, comprometendo-a seriamente. Um paradoxo não contém contradições internas, mas produz conclusões diferentes daquelas que se espera (**A + 1 = A**, se **A** não é "zero"? **A + + 1 = A** implica que **A + (-A) + 1 = A + (-A)**; **1 = 0**?).

Observe-se, também, que tanto os Paradoxos quanto as Antinomias podem ser subdivididos em Semânticos e Lógicos, conforme envolvam questões relacionadas com metateorias ou não. Podem estar relacionados com conjuntos finitos e infinitos, enumeravelmente infinitos ou conjuntos infinitos não enumeráveis. Quando não observada uma axiomatização estrita das teorias em desenvolvimento, estão presentes, principalmente, na Teoria dos Conjuntos, na Argumentação Lógica, na Epistemologia, na Linguagem, na Teoria do Conhecimento, em quaisquer Ciências, e mesmo, na Matemática, quando esta é tomada com um todo.

Neste compêndio, ressalte-se, em tempo, que questões estritamente técnicas relacionadas com Paradoxos e Antinomias fogem ao propósito do mesmo; não sendo analisadas em seus detalhes. O que, efetivamente, se objetiva é motivar o leitor sobre o assunto em questão, apresentando algumas considerações sobre determinados Paradoxos e Antinomias que levaram os matemáticos a promoverem importantes "ajustes" conceituais em suas teorias.

3. OS PARADOXOS E O INFINITO

Saliente-se, preliminarmente, que questões relacionadas com o infinito sempre motivaram e desafiaram tanto os matemáticos quanto os lógicos de diferentes períodos, sendo que a bem mais de dois mil e quinhentos anos vários problemas sobre o infinito intrigam os estudiosos e as tentativas de resolução de tais questões mostraram-se responsáveis por verdadeiras revoluções no domínio do intelectivo.

Muito embora o homem tenha tentado "aprisionar" ou "domesticar" o infinito através dos mais diversos artifícios, este, por sua vez, continua a revelar que em seu universo de domínio existem muitas coisas "estranhas" e "paradoxais" as quais quando não percebidas previamente são responsáveis pela destruição de teorias inteiras.

Os estudos desenvolvidos ao longo de centenas de anos sobre os Paradoxos e as Antinomias relacionados com o infinito mostraram ao homem, mais do que quaisquer outras análises, como o universo dos fundamentos da Matemática encontra-se repleto de armadilhas e de sutilezas, tanto quanto, como é fácil se deixar iludir quando não se pode "fugir" dos domínios do infinito.

Conta-se, por exemplo, que Zenão (336-264 a.C.), o eleático, propôs o problema sobre uma corrida entre "Aquiles e a Tartaruga" para provar que era impossível compreender o movimento em termos aritméticos. Embora um tal problema apresente-se quase como ingênuo (ao senso comum, principalmente) esconde questões de uma profundidade ímpar.

O problema em questão pode ser assim enunciado: "Aquiles em uma corrida com uma tartaruga: se a tartaruga tiver uma pequena dianteira, Aquiles (o atleta) jamais a alcançará". E, as justificativas sobre a conclusão de Zenão podem ser apresentadas da seguinte forma; quais sejam:

Primeiro: Aquiles e a tartaruga iniciam a corrida ao mesmo tempo, levando a tartaruga uma pequena vantagem, conforme Zenão julgou ser justo.

Segundo: no momento em que foi dada a partida, Aquiles encontrava-se em um ponto **X** e a tartaruga em um ponto **X'** (adiante no caminho a percorrer). No próximo momento, Aquiles encontrava-se em **X'** e a tartaruga em **X''**, e, assim, ocorrendo sucessivamente. Isto é, em cada momento, Aquiles encontra-se em um ponto e a tartaruga no outro seguinte e, assim, por diante.

Terceiro: como é possível considerar uma série infinita de pontos nas trajetórias percorridas por Aquiles e pela tartaruga, conclui-se que Aquiles e a tartaruga nunca se encontrarão. A tartaruga estará sempre um ponto à frente de Aquiles.

Observe que com base na argumentação anterior, Aquiles e a tartaruga nunca se encontrarão, pois, como cada um deve percorrer, sucessivamente, uma série infinita de pontos, não somente nunca chegarão no ponto final (que é um ponto infinito), como nunca Aquiles encontrará a tartaruga devido à dianteira inicial. Ou seja, a cada espaço de tempo, tanto Aquiles como a tartaruga avançam um ponto do espaço total. A cada momento, tanto um quanto a outra avançam um ponto apenas. Consequentemente, de fato, não poderão encontrar-se jamais.

Observe que, pelo senso comum, Aquiles encontraria a tartaruga após alguns poucos passos (é o que provaria a experiência?); contudo, nos termos em que Zenão o apresentou (nas condições em que foi enunciado e partindo-se das premissas correspondentes – das condições iniciais postuladas) é o mesmo totalmente coerente, sendo legítima a argumentação de Zenão.

Mas, afinal: na trajetória de pontos infinitos a percorrer, Aquiles alcança e ultrapassa a tartaruga? Quais dos competidores venceria a corrida proposta? O problema evidencia um Paradoxo? Ou, de outra forma, tem-se uma Antinomia?

Diversos Paradoxos envolvendo a concepção de infinito, tais como o de Zenão sobre Aquiles e a tartaruga, foram responsáveis por importantes descobertas tanto na Matemática quanto na Lógica; promovendo, em conseqüência, consideráveis abalos nas teorias então constituídas. O infinito atual disputa seu lugar com o infinito potencial. Quando se aceita o infinito completado surgem Paradoxos. Quando se nega o infinito completado outros Paradoxos e Antinomias mostram sua "cara". Tenta-se "aprisionar" o infinito através de restrições axiomáticas. O infinito rompe os grilhões impostos e "assusta" aqueles que com ele trabalha.

Para alguns, o infinito é uma espécie de *paraíso* na Terra para os matemáticos (paraíso este criado por Georg Cantor (1845-1918) – que como qualquer homem era um ser finito). Para outros, os matemáticos não precisariam do infinito e nem o usam (seres finitos não criam coisas infinitas, pois não as podem perceber). Seja como for, quando termina a seqüência **1, 2, 3, 4, 5, ...**, ? Quando se quiser parar, diriam os defensores do infinito potencial. Nunca, afirmariam aqueles que acreditam no infinito completado. O infinito é atual ou potencial?

Como se sabe, a noção de infinito potencial refere-se à possibilidade de se prosseguir *ad infinitum* o acrescentar, por exemplo, um número posterior ao último número da seqüência de números naturais **1, 2, 3, ...**; ou, de outra forma, prosseguir *ad infinitum* a subdivisão de uma linha entre dois pontos, que tenha sido previamente subdividida algumas vezes. Se, contudo, conceber-se a noção de todos os elementos da seqüência de números naturais, como a de todas as partes da linha não mais divisíveis, como dadas em sua completa totalidade, passa-se a considerar a noção de infinito atual (a qual é muito mais forte que a de infinito potencial).

O matemático só necessita da noção de infinito potencial para os objetos da demonstração matemática? Pode-se rejeitar a noção de infinito atual em Matemática? Em um procedimento matemático, qualquer passo a passo, isto é, em um procedimento em que se empreende o próximo passo, caso o precedente tenha sido dado, deve-se supor ou não a existência de um último passo? Persiste a questão: o infinito é atual ou potencial? Negando o infinito atual, teorias deixariam de existir. Negando o infinito potencial, teorias não poderiam existir. Se existe o infinito, como individualizá-lo, como distingui-lo efetivamente? Se o infinito é um todo, onde está sua infinitude? Se o infinito existe em potência, não seria finita cada potência atingida? Quando o infinito deixará de desafiar o homem?

Veja-se, entretanto, que mesmo nos dias atuais, por exemplo, um jovem iniciante em estudos da Teoria dos Conjuntos (tanto quanto os primeiros pesquisadores) certamente poderia conceber que se o conjunto dos Números Naturais Pares está contido propriamente no conjunto de todos os Números Naturais, então deve existir menos Números Naturais Pares que todos os Números Naturais (dado que estes últimos contêm, também, os Números Naturais Ímpares).

Quando, porém, se demonstrar para ele que existem tantos Números Naturais Pares quanto Números Naturais (que tais conjuntos têm o mesmo "tamanho"), o jovem estudante ficará, no mínimo, perplexo. Porquanto, para o senso comum é impossível admitir que uma parte seja igual ao todo. Encontrar-se-á, então, o jovem em questão, diante de um Paradoxo? Falsídico ou Verídico?

Contudo, neste caso, a parte (o conjunto dos Números Naturais Pares) é igual ao todo (o conjunto dos Números Naturais); isto é, existem tantos números na série **2, 4, 6, 8, ...** como na série **1, 2, 3, 4, 5, ...**; pois, a série (infinita) dos Números Naturais Pares é uma parte da série (infinita) dos Números Naturais, dado que é notadamente possível estabelecer a seguinte correspondência um-a-um; qual seja: **2** $\Longleftrightarrow$ **1**; **4** $\Longleftrightarrow$ **2**; **6** $\Longleftrightarrow$ **3**; **...**; **2n** $\Longleftrightarrow$ **n**; **...** .

Um tal Paradoxo é logicamente correto (ou seja, é um Paradoxo Verídico), uma vez que é um elemento da definição de "séries infinitas". Entretanto, afirmar que "uma parte é igual ao todo" é um absurdo quando se refere a uma "série finita".

Registre-se que o próprio Galileu Galilei (1564-1642) enfrentou a propriedade fundamental de um conjunto infinito (de que uma parte dele pode ser equivalente ao conjunto todo), não conseguindo concluí-la. Diga-se, a propósito, que o conhecido Paradoxo de Galileu sobre a correspondência um-a-um entre inteiros e quadrados perfeitos permaneceu um mistério por muito tempo.

Em fins da primeira metade do século XIX, instaurou-se, surpreendentemente, uma espécie de *horror infiniti*, na qual os mais célebres matemáticos da época defendiam ser impossível o estabelecimento de um infinito completado em Matemática e que todas as respectivas tentativas de identificar um tal infinito completado somente evidenciavam Paradoxos. Ao contrário, contudo, Bernard Bolzano (1781-1848), em suas suposições, acreditava que a infinidade dos Números Reais era de natureza distinta da infinidade dos Números Inteiros, sendo o conjunto dos Números Reais não enumerável e o dos Números Natuarias enumerável.

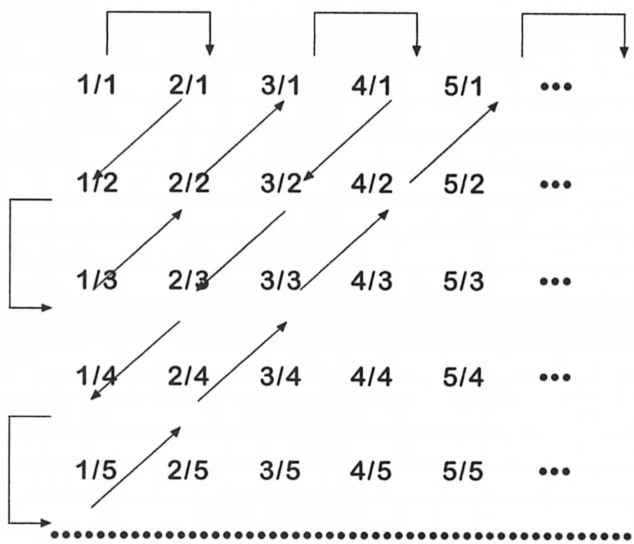
Saliente-se, entretanto, que, como uma unanimidade, afirma-se que desde os tempos de Zenão até 1872 não se sabia ao certo do que se estava a falar quando o infinito era mencionado. Porém, em 1872, J. W. R. Dedekind (1831-1916), analisando os Paradoxos de Bolzano, concluiu que os mesmos não traziam em si nenhuma contradição, mas sim continham a propriedade universal dos conjuntos infinitos. Dedekind, então, em seu *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, definiu precisamente conjunto infinito, ou seja "diz-se que um sistema **S** é infinito se, e somente se, é semelhante a uma parte própria dele mesmo; sendo que em caso contrário **S** diz-se finito".

Mas, felizmente, o matemático alemão Georg Cantor, que como Dedekind também havia reconhecido a propriedade fundamental dos conjuntos infinitos, foi mais longe ao afirmar que os conjuntos infinitos não são todos iguais, demonstrando (para espanto de insignes matemáticos da época) que não existe um infinito, mas infinitos tipos de infinito em Matemática.

Cantor provou que tanto o conjunto dos Quadrados Perfeitos quanto o conjunto dos Números Triangulares apresentam a mesma potência que a do conjunto dos Números Inteiros Positivos, dado que tais Números podem ser colocados em correspondência biunívoca. Cantor, também, mostrou que existem tantos Números Racionais quanto Números Naturais; isto é, que o conjunto dos Números Racionais é, também, enumerável (ou, que a potência do conjunto dos Números Racionais é a mesma que a do conjunto dos Números Naturais).

Assim, o infinito dos Números Naturais e de todos os conjuntos de Números que se podem por em correspondência biunívoca com o conjunto dos Números Naturais diz-se infinito enumerável.

Para provar que o conjunto dos Números Racionais tem a mesma potência do conjunto dos Números Inteiros Positivos (isto é, que ambos são enumeráveis), basta seguir simplesmente, as flechas indicadas no esquema abaixo (que ficou universalmente conhecido como "o passeio de Cantor") e contar as frações encontradas na seqüência; ou seja:



Por algum tempo pensou-se, então, que todos os todos os conjuntos eram enumeráveis. Cantor, entretanto, mostrou, através de uma *reductio ad absurdum*, que o conjunto dos Números Reais apresenta potência maior que a do conjunto dos Números Racionais; isto é, que o infinito dos Números Reais é maior que o infinito do conjunto dos Números Racionais. A partir da prova de Cantor, passou-se a dizer que o infinito do conjunto dos Números Reais é um infinito não enumerável.

Muito embora o caminho do matemático nos dias atuais encontre-se, até certo ponto (em determinados campos e sob rígidas restrições), balizado quando se percorre a estrada do infinito, a única coisa certa é que o infinito sempre reservará algumas surpresas; estará sempre pronto a promover o desvio do caminho programado e exigirá (constantemente) a colocação de novas "bandeiras" no caminho a percorrer.

Na Antigüidade estabeleceu-se extensa análise dos Paradoxos e Antinomias. As correspondentes questões ultrapassaram o Período Medieval, permanecendo o correspondente estudo meio que adormecido na Idade Moderna (1453-1789). Contudo, as questões sobre os Paradoxos e Antinomias ressurgiram com grande importância em fins do século XIX e início do século XX, dado que foram levantadas novas (e importantes) questões sobre o assunto.

A partir do momento em que a Teoria dos Conjuntos passou a influenciar vários ramos da Matemática, diversas contradições relacionadas foram sendo evidenciadas (com grande preocupação). A estas últimas contradições, que podem ser efetivamente eliminadas através de um desenvolvimento axiomático, arbitrou-se denominar (indevidamente – pelo menos de forma estrita) "Paradoxos" da Teoria dos Conjuntos.

Dado o desconforto e as drásticas conseqüências da existência de Paradoxos e Antinomias em uma teoria, diversos estudos por vários especialistas foram sendo desenvolvidos no sentido de eliminá-los ou, antes, controlá-los. Tais estudos mostraram que muito dos Paradoxos tinham a ver com questões sobre "circulo vicioso", "auto-referência" ou com indevidas "interpretações metalingüísticas".

Diga-se, porém, que apesar dos esforços registrados para se "administrar" os Paradoxos e Antinomias, muitos dos quais objeto de aprofundamentos e de controvérsias, diversas questões não se apresentam respondidas (ou, em outros termos, as possíveis respostas não podem ser aceitas universalmente) e, infelizmente, até o presente momento, nada permite afirmar que todos os Paradoxos e Antinomias foram eliminados, dado que alguns deles ainda não são conhecidos.

Levando-se em conta, porém, que Antinomias escondem contradições lógicas (tais como o "Paradoxo" de Russell, na seqüência apresentado) e que os Paradoxos (propriamente ditos) são aqueles enunciados que embora não contenham contradições internas desafiam as nossas intuições, mostre-se que os chamados "Paradoxos" da Teoria dos Conjuntos são, na verdade, Antinomias.

4. TEOREMA DE CANTOR

Contudo, antes de se evidenciar o acima considerado, julga-se necessário a apresentação de um arrazoado sobre determinados elementos que serão utilizados para se evidenciar as "contradições internas" presentes em tais "Paradoxos". Motivo pelo qual são apresentadas as considerações a seguir.

Sejam, então, **X** e **Y** conjuntos quaisquer. Diz-se que o conjunto **X** é equipotente ao conjunto **Y**, que se indica por:

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{Y},$$

se, e somente se, existe uma função $\mathbf{f: X \to Y}$ tal que **f** é uma função bijetora; onde o símbolo » denota a Relação de Equipotência.

Se o conjunto **X** é equipotente a um subconjunto do conjunto **Y**, então diz-se que o conjunto **X** precede o conjunto **Y** ou que o conjunto **Y** domina o conjunto **X**; instituindo-se, assim, o que se arbitrou denominar de Relação de Dominação, que por sua vez é denotada por:

$$\mathbf{X \precapprox Y}$$

Da Relação de Dominação anteriormente definida, é imediato que o conjunto **Y** domina o conjunto **X** se, e somente se, existe uma função $\mathbf{f: X \to Y}$ tal que a função **f** é uma função injetora.

Convencione-se, entretanto, que, nestas notas, $\mathbf{f: X \Rightarrow Y}$ passará a denotar que a função **f** é uma função bijetora do conjunto **X** no conjunto **Y**; $\mathbf{g: X \underline{\to} Y}$ denotará que a função **g** é uma função injetora do conjunto **X** no conjunto **Y**; e, que o símbolo $\vdash$ (antecedendo uma expressão) será utilizado (indistintamente) para denotar que a expressão que se segue é uma lei, um teorema (ou uma definição).

Disto posto, resulta, imediatamente, que:

$$\vdash \mathbf{X \approx Y \leftrightarrow \exists\, f: X \Rightarrow Y};\ \text{e},$$

$$\vdash \mathbf{X \precapprox Y \leftrightarrow \exists\, g: X \to Y};$$

onde, o símbolo $\leftrightarrow$ vem denotar o conectivo "se, e somente, se".

Pode-se, também, definir uma Relação de Dominação Estrita entre dois dados conjuntos. Neste sentido, se o conjunto **Y** domina o conjunto **X** e o conjunto **X** não domina o conjunto **Y**, de modo que o conjunto **X** não é equipotente ao conjunto **Y**, diz-se que o conjunto **Y** domina estritamente o conjunto **X**, ou que o conjunto **X** precede estritamente o conjunto **Y**; sendo tal fato denotado por:

$$\mathbf{X \precapprox Y}.$$

Nestas condições, resulta, portanto, afirmar que:

$$\vdash \mathbf{X \prec Y \leftrightarrow X \quad Y \wedge \sim(X \approx Y)};$$

isto é, o conjunto **Y** domina estritamente o conjunto **X** se, e somente se, o conjunto **Y** domina o conjunto **X** e o conjunto **X** não é equipotente ao conjunto **Y**; onde, o símbolo Ù denota o conectivo "e" (a conjunção lógica).

A Relação de Equipotência e a Relação de Dominação entre conjuntos podem ser associadas à cardinalidade dos conjuntos envolvidos; senão, considere o que a seguir se apresenta.

Dado um conjunto **X**, define-se a cardinalidade do conjunto **X** como sendo o único cardinal a equipotente com o conjunto **X**; o que pode ser simbolizado pelas seguintes notações; quais sejam:

$$\alpha = \mathbf{Card(X)} = |\mathbf{X}| = \#(\mathbf{X}).$$

Da definição acima, tem-se, por imediata conseqüência, que dois conjuntos **X** e **Y** equipotentes entre si ($\mathbf{X} \approx \mathbf{Y}$) têm cardinalidades iguais ($\#(\mathbf{X}) = \#(\mathbf{Y})$); isto é:

$$\vdash \mathbf{X} \approx \mathbf{Y} \leftrightarrow \#(\mathbf{X}) = \#(\mathbf{Y}).$$

Observe, ainda, quanto à cardinalidade, que, se **X** é um conjunto, então $\#(\mathbf{X})$, o número cardinal de **X** é o menor número ordinal equipotente a **X**; ou seja, $\#(\mathbf{X})$ é um ordinal inicial equipotente a **X** (cardinais são ordinais iniciais).

De outra forma, sendo **X** e **Y** dois conjuntos quaisquer tais que $\alpha = \#(\mathbf{X})$ (o cardinal **X** é α) e $\beta = \#(\mathbf{Y})$ (o cardinal de **Y** é β), pode-se definir a Relação de Desigualdade ($\leq$) para os números cardinais α e β da seguinte forma; qual seja:

$$\vdash \alpha \leq \beta \leftrightarrow \mathbf{Y\ domina\ X}.$$

De forma correspondente, a Relação de Dominação Estrita entre conjuntos implica a Relação de Desigualdade Estrita para números cardinais; senão, observe o que a seguir é considerado.

Sejam os conjuntos quaisquer **X** e **Y** tais que $\alpha = \#(\mathbf{X})$ e $\beta = \#(\mathbf{Y})$. Portanto, afirma-se que: $\mathbf{X} \prec \mathbf{Y}$ se, e somente se, $\alpha < \beta$; isto é, tem-se que:

$$\vdash \mathbf{X} \prec \mathbf{Y} \leftrightarrow \alpha < \beta.$$

Claramente, então, pode-se afirmar que para os cardinais a e b tem-se que:

$$\vdash \alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \leq \beta \wedge \alpha \neq \beta.$$

Observe-se, entretanto, que para os conjuntos **X** e **Y** tais que $\alpha = \#(\mathbf{X})$ e $\beta == \#(\mathbf{Y})$, é correto afirmar-se que "se **X** domina **Y** e simultaneamente **Y** domina **X**, então **X** e **Y** são equipotentes"; ou seja:

$$\vdash \mathbf{X} \precapprox \mathbf{Y} \wedge \mathbf{Y} \precapprox \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} \approx \mathbf{Y}.$$

Ou, ainda, que "se α é menor ou igual a β e, simultaneamente, β é menor ou igual a α, então α e β são iguais"; ou seja:

$$\vdash \alpha \leq \beta \wedge \beta \leq \alpha \rightarrow \alpha = \beta,$$

onde o símbolo $\rightarrow$ denota o conectivo "Se ..., então ...".

Nestas condições, enuncie-se, então, o Teorema de Cantor; qual seja: "Todo conjunto **X** é dominado estritamente por seu conjunto potência $\wp(\mathbf{X})$; isto é:

$$\vdash \mathbf{X} \prec \wp(\mathbf{X}),$$

para qualquer que seja o conjunto **X**".

Considere, todavia, o conjunto de todas as funções γ do conjunto **X** em **2** (onde, observe, $\mathbf{2} = \{ \varnothing, \{ \varnothing \} \} = \{ \mathbf{0}, \mathbf{1} \}$); isto é, seja o conjunto denotado por $\mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ e definido por $\mathbf{2}^{\mathbf{X}} = \{ \gamma \,/\, \gamma\colon \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{2}\}$.

Mas, a função $\mathbf{f}\colon \wp(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ é uma função bijetora; isto é, $\mathbf{f}\colon \wp(\mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ (onde, $\Rightarrow$ é tomado como anteriormente convencionado).

Portanto, $\mathbf{f}\colon \wp(\mathbf{X}) \Rightarrow \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$ se, e somente, se $\wp(\mathbf{X}) \approx \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$, pela Relação de Equipotência. Assim, se $\mathbf{X} \prec \wp(\mathbf{X})$ e $\wp(\mathbf{X}) \approx \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$, então $\mathbf{X} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{X}}$; ou seja, o Teorema de Cantor pode, também, ser enunciado por:

$$\vdash \mathbf{X} \prec \mathbf{2}^{\mathbf{X}};$$

para qualquer que seja o conjunto **X**.

Apresentadas as observações anteriores, leve-se em conta, então, alguns dos denominados "Paradoxos" da Teoria dos Conjuntos.

5. ANTINOMIAS NA TEORIA DOS CONJUNTOS

Ao longo da história da Matemática, diversas foram as Antinomias descobertas e inúmeros foram os estudos realizados com o objetivo de resolver as contradições internas diagnosticadas. Dos constantes trabalhos em torno das Antinomias resultaram, de um lado, o desenvolvimento de várias teorias matemáticas e, de outro, uma grande preocupação para os matemáticos. Porquanto, embora se tenha conseguido "administrar" as Antinomias conhecidas (por meio de restrições conceituais), não se tem instaurada a certeza de que outras não estejam escondidas no universo da Matemática.

Das Antinomias descobertas, talvez aquelas evidenciadas na Teoria dos Conjuntos sejam as mais significativas; dado constituir a Teoria dos Conjuntos a base de diversas teorias da Matemática moderna.

Por motivos dos mais variados, entretanto, os termos Antinomias e Paradoxos se encontram, na maior parte dos registros, tomados como sinônimos. Assim, fala-se em "Paradoxo" de Cantor, "Paradoxo" de Burali-Forti, "Paradoxo" de Russell ou "Paradoxo" dos Cardinais, quando estes, em termos estritos, são exemplos de Antinomias.

Mostre-se, portanto, e por exemplo, que os quatro exemplos anteriormente citados, por conterem contradições internas, são, efetivamente Antinomias.

5.1. "PARADOXO" DE CANTOR

Primeiramente, verifique-se que o denominado "Paradoxo" de Cantor, também conhecido como "Paradoxo" do Conjunto de todos os Conjuntos, conduz, efetivamente, a uma contradição; senão observe o que a seguir se apresenta.

Admita-se a existência de um conjunto **C** tal que **C** seja o "conjunto de todos os conjuntos possíveis".

Mas, se o conjunto **C** é o conjunto de todos os conjuntos, então (notadamente) cada subconjunto de **C** é, também, um membro de **C**.

Logo, o conjunto potência de **C**, o conjunto $\mathbf{2^C}$, é um subconjunto de **C**; isto é, tem-se, necessariamente, que: $\mathbf{2^C} \subset \mathbf{C}$.

Mas, se $\mathbf{2^C} \subset \mathbf{C}$, então existe ao menos um subconjunto do conjunto **C** que será equipotente ao conjunto $\mathbf{2^C}$; resultando afirmar, pela Relação de Dominação, que:

$$\mathbf{2^C} \precsim \mathbf{C}.$$

Entretanto, se $\mathbf{2^C} \precsim \mathbf{C}$, então $\#(\mathbf{2^C}) \leq \#(\mathbf{C})$.

Assim, pelo parágrafo anterior, a potência do conjunto $\mathbf{2^C}$ é menor ou igual à potência do conjunto **C**.

Todavia, o teorema de Cantor estabelece que $\#(\mathbf{C}) < \#(\mathbf{2^C})$ para qualquer que seja o conjunto **C**; isto é: $\mathbf{C} \prec \mathbf{2^C}$. Ou, seja, a potência do conjunto **C** é menor que a potência do conjunto $\mathbf{2^C}$ se, e somente se, o conjunto **C** (qualquer que seja) é dominado estritamente pelo conjunto $\mathbf{2^C}$.

Dos últimos parágrafos, resultaria, portanto, que $\mathbf{2^C}$ seria dominado por **C** (isto é, $\#(\mathbf{2^C}) \leq \#(\mathbf{C})$) e **C** seria estritamente dominado por $\mathbf{2^C}$ (isto é, $\#(\mathbf{C}) < \#(\mathbf{2^C})$); o que evidenciaria uma contradição ($\#(\mathbf{2^C}) < \#(\mathbf{2^C})$).

Portanto, a conjectura do "conjunto de todos os conjuntos" conduz a uma contradição. Assim, o chamado "Paradoxo" de Cantor é, na verdade, uma Antinomia. Independentemente das convicções que se tenha, não é possível admitir o conjunto de todos os conjuntos; pois que uma tal admissão traz, internamente, uma contradição.

5.2. "PARADOXO" DE BURALI-FORTI

Para evidenciar-se que o "Paradoxo" de Burali-Forti, o qual se enuncia supondo a existência do "conjunto de todos os números ordinais", é uma Antinomia; admita-se que um conjunto **C** denote o "conjunto de todos os números ordinais".

Como da teoria dos números ordinais "todo conjunto de números ordinais é bem ordenado pela relação de desigualdade ($\leq$)", tem-se que **C** é bem ordenado; pois, como assumido, **C** é o conjunto de todos os ordinais.

Mas, se o conjunto **C** é bem ordenado, então deve existir uma família l de conjuntos bem ordenados semelhantes ao conjunto **C**; onde l diz-se número ordinal e é tal que: $\lambda = \mathbf{ord.}(\,\mathbf{C}\,)$ (denote-se tal informação por: $\mathbf{D_1}$).

Do estudo da semelhança entre conjuntos, resulta afirmar que "um conjunto bem ordenado não pode ser semelhante a um de seus segmentos iniciais" (denote-se tal informação por: $\mathbf{D_2}$).

Considere, portanto, $\mathbf{s}(\,\lambda\,)$ o conjunto de todos os números ordinais menores que l. Logo, se $\mathbf{s}(\,\lambda\,)$ é o conjunto dos ordinais menores que o ordinal l, então, necessariamente, $\lambda = \mathbf{ord.}(\,\mathbf{s}(\,\lambda\,)\,)$ (denote-se tal informação por: $\mathbf{D_3}$).

Mas, observe que se $\mathbf{s}(\,\lambda\,)$ corresponde ao conjunto de todos os elementos em **C** que precedem λ, então $\mathbf{s}(\,\lambda\,)$ é um segmento inicial de **C**.

Assim, de $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_3}$, resulta afirmar que: $\mathbf{ord.}(\,\mathbf{C}\,) = \mathbf{ord.}(\,\mathbf{s}(\,\lambda\,)\,)$.

Contudo, se $\mathbf{ord.}(\,\mathbf{C}\,) = \lambda = \mathbf{ord.}(\,\mathbf{s}(\,\lambda\,)\,)$, então tem-se que o conjunto **C** é semelhante a um de seus segmentos iniciais (o conjunto $\mathbf{s}(\,\lambda\,)$). Mas, tal fato, evidentemente, contraria $\mathbf{D_2}$.

Portanto, de fato, a concepção de um "conjunto de todos os números ordinais" conduz a uma contradição; tendo-se, segundo as definições anteriores, que o "Paradoxo" de Burali-Forti é, na verdade, uma Antinomia. Existe uma contradição interna na suposição de que exista o conjunto de todos os números ordinais.

5.3. "PARADOXO" DE RUSSELL

Admita-se, a seguir, que um conjunto **C** seja o "conjunto de todos os conjuntos que não contém a si mesmo como membro"; isto é, admita-se que **C** seja definido por: $\mathbf{C} = \{\, \mathbf{X} \,/\, \mathbf{X} \notin \mathbf{X} \,\}$. Nestas condições, pergunta-se: o conjunto **C** pertence ou não pertence a si mesmo?

De imediato, evidenciam-se dois casos passíveis de questionamento:

(I) "**C** pertence a **C**?"

(II) "**C** não pertence a **C**?"

Veja-se, então, que no caso (I), se **C** pertence a **C**, então, pela definição de

C, **C** não pertence a si mesmo. Já, no caso (II), se **C** não pertence a **C**, então, também, pela definição de **C**, **C** pertence a si mesmo.

Das conclusões anteriores, é inevitável, portanto, que "o conjunto **C** pertença ao conjunto **C** se, e somente se, o conjunto **C** não pertence ao conjunto **C**".

Mas, da Lógica Elementar, resultar que um enunciado da forma "**p** se, e somente se, não **p**", isto é, $\mathbf{p} \leftrightarrow \sim \mathbf{p}$, é uma contradição lógica; senão observe que:

$$\mathbf{p} \leftrightarrow \sim \mathbf{p} \Leftrightarrow (\mathbf{p} \rightarrow \sim\mathbf{p}) \wedge (\sim\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}) \Leftrightarrow (\sim\mathbf{p} \vee \sim\mathbf{p})\, \grave{\mathrm{U}}(\sim\sim\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sim\mathbf{p} \wedge (\mathbf{p} \vee \mathbf{p}) \Leftrightarrow \sim\mathbf{p} \wedge \mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{c};$$

onde **c** denota uma proposição logicamente falsa, isto é, uma contradição.

Portanto, o "Paradoxo" de Russell conduz a uma contradição, sendo, efetivamente, um exemplo de Antinomia.

5.4. "PARADOXO" DO CONJUNTO DOS CARDINAIS

Por fim, para se evidenciar que o "Paradoxo" do "conjunto de todos os números cardinais" é, na verdade, uma Antinomia, defina-se o conjunto **C** como sendo o conjunto de todos os números cardinais existentes.

Mas, se α é a designação de uma família de conjuntos equipotentes a um conjunto $\mathbf{A}_\alpha$, α é denominado número cardinal e pode ser designado por $\alpha = \#(\mathbf{A}_\alpha)$. Portanto, para a $\in$ **C**, existe um conjunto $\mathbf{A}_\alpha$ tal que $\alpha = \#(\mathbf{A}_\alpha)$.

Admita-se, em seguida, o conjunto β dado pela união de todos os conjuntos $\mathbf{A}_\alpha$ tais que $\alpha \in \mathbf{C}$; isto é, seja $\beta = \cup\alpha \in {}_{\mathbf{c}}\mathbf{A}_\alpha$.

Nestas condições, admita-se, ainda, o conjunto potência de β, isto é, considere o conjunto $\mathbf{2}^\beta$ de todos os subconjuntos de β.

Pela relação de equipotência entre conjuntos, tem-se, naturalmente, que o conjunto $\mathbf{2}\beta$ é equipotente ($\approx$) a um conjunto b de cardinalidade $\mathbf{2}^\beta$; ou seja, tem-se que $\mathbf{2}^\beta \approx \beta_{\#(2^\beta)}$. Mas, $\beta_{\#(2^\beta)}$ é um subconjunto de β.

Nestas condições, se $\mathbf{2}^\beta$ é equipotente a um subconjunto de b, resulta, pela relação de dominação entre conjuntos, que b domina $\mathbf{2}^\beta$; isto é: $\mathbf{2}^\beta \precapprox \beta$.

Portanto, se $\mathbf{2}^\beta \precapprox \beta$, então $\#(\mathbf{2}^\beta) \leq \#(\beta)$.

Entretanto, o resultado anterior contraria, uma vez mais, o teorema de Cantor que afirma que para qualquer conjunto β tem-se sempre que $\beta \prec \mathbf{2}^\beta$, ou, em conseqüência, que $\#(\beta) < \#(\mathbf{2}^\beta)$. Logo, ter-se-ia a proposição logicamente falsa dada por $\#(\mathbf{2}^\beta) < \#(\mathbf{2}^\beta)$.

Assim, ao se supor a existência do "conjunto de todos os números cardinais" está se admitindo, também, uma contradição; sendo, consequentemente o referido "Paradoxo", na verdade, uma Antinomia.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Deve-se observar que os exemplos anteriormente evidenciados não constituem a totalidade das Antinomias da Teoria dos Conjuntos. Senão, por exemplo, seria talvez possível definir a "família de todos os conjuntos equipotentes a um conjunto" ou existiria a "família de todos os conjuntos semelhantes a um conjunto bem ordenado"?

Apresentados, portanto, os exemplos de Antinomias da Teoria dos Conjuntos, bem como as demais considerações sobre Paradoxos, como se pode, efetivamente, evitar tais situações indesejáveis em uma dada teoria?

Como se tem evidenciado, bem se pode evitar tais ocorrências na Teoria dos Conjuntos, por exemplo, através de uma axiomatização estrita. Em 1908, o matemático alemão Ernest Zermelo (1871-1953), discípulo de Cantor, propôs pela primeira vez um conjunto de axiomas escolhidos de tal forma a evitar contradições, onde passou a considerar tão somente a existência de conjuntos que são garantidos pelos axiomas previamente assumidos.

Posteriormente, em 1922, o matemático alemão A. Fraenkel, nascido em Munique, em 1891, apresentou uma modificação dos axiomas de Zermelo, sendo que, nos dias atuais, tem-se o se consagrou denominar Teoria Axiomatizada dos Conjuntos de Zermelo-Fraenkel, a qual mais recentemente, ainda, foi desenvolvida pelo matemático norte-americano (de origem húngara e discípulo de David Hilbert (1862-1943)) Johannes Von Neumann (1903-1957).

Mas, concluindo, finalmente, este compêndio, onde se espera que o leitor tenha perspectivado a importância dos Paradoxos e Antinomias para a instituição de avanços em Matemática, ou pelo menos, tenha obtido motivação suficiente para prosseguir em estudos correlatos, apresenta-se, a seguir, um problema "elementar" cuja análise e solução são sugeridas ao leitor.

Assim sendo, admita-se a existência de um hotel que contenha um número infinito e enumerável de quartos enumerados por $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \ldots, \mathbf{q}_n, \ldots$; tal que todos os quartos estejam ocupados por turistas.

Uma bela noite, de madrugada, chega um turista inesperado (sem reserva no hotel) para se hospedar. O dono do hotel tranqüilamente pede, então, a cada um de seus hóspedes que se mude para o quarto da direita, de forma a liberar o quarto $\mathbf{q}_1$ para o hóspede inesperado. Em outra noite chegam dois novos hóspedes, e o dono do hotel pede a cada um de seus hóspedes que se mude dois quartos à direita, liberando os quartos $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$. E, desta maneira, o dono do hotel procederá de forma semelhante caso apareçam três, quatro, cinco, ..., hóspedes inesperados.

Uma noite, entretanto, chega um ônibus trazendo infinitos e enumeráveis turistas sem reserva para se hospedarem no hotel. O dono do hotel, mantendo a costumeira calma, não se abala e pede, agora, a cada um de seus hóspedes que se mudem para o quarto cujo número seja o dobro do seu (de $\mathbf{q}_n$ para $\mathbf{q}_{2n}$), liberando espaço para todos os novos hóspedes.

Portanto, o dono do hotel continua recebendo quantos infinitos e enumeráveis novos hóspedes aparecer. Infelizmente, contudo, em dada noite estaciona em frente do hotel um ônibus contendo um número real de turistas, e o dono do hotel fica apavorado, sem saber o que fazer.

Saliente-se, a propósito do anteriormente enunciado, que o problema em referência (e suas várias e correspondentes adaptações) é conhecido, na respectiva literatura, como o "Hotel de Hilbert".

Muito bem! Tomando-se, então, as considerações apresentadas anteriormente e levando-se em conta, estritamente, o contexto do problema em questão, o mesmo diz respeito a um Paradoxo ou a uma Antinomia? O leitor poderia encontrar (e explicitar) alguma contradição? Se o universo fosse infinito, seria possível a existência de um tal hotel? Seria, de todo, possível acomodar os últimos turistas? Como se poderia utilizar o Teorema de Cantor para resolver o problema em questão? Enfim, por que o dono do hotel se apavorou?

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DIAS, C. M. C. *Compêndios de matemática e lógica matemática:* uma abordagem extemporânea. 2. ed. Curitiba: C.M.C. DIAS, 1999.

————. *Lógica matemática:* introdução ao cálculo proposicional. Curitiba: C.M.C. DIAS, 1999.