

HOMOGENEIDADE DE SÉRIES TEMPORAIS

Orlando Maciel Strobel ★

Abstract

2395910

Some aspects related to the temporal series are discussed, such as the goodness of fit to probabilities distribution laws, test for detection of outliers, homogeneity tests when the alternative hypothesis is the one general or specific heterogeneity, as the tendency and variability of variances. An application to some of the station of the 7th hydrographic region of the São Paulo State is done.

Resumo

São discutidos alguns aspectos relativos à análise de séries temporais, como o ajuste a leis de distribuição de probabilidades, testes para a detecção de eventos singulares, testes de homogeneidade, cuja hipótese alternativa é a de heterogeneidade geral ou heterogeneidade específica, como tendência e variabilidade de variâncias. É feita uma aplicação a alguns postos da 7ª Região hidrográfica do Estado de São Paulo.

Introdução

Séries temporais de eventos naturais são caracterizadas por uma seqüência de valores coletados ao longo do tempo, em intervalos discretos ou obtidos continuamente. Esta coletânea de valores, que representa a realização de uma variável física, pode ser composta por eventos puramente determinísticos, puramente estocásticos ou por uma combinação de ambos, o que é mais comum, mormente em se tratando de séries de eventos naturais.

Para que se obtenha um bom conhecimento das características intrínsecas dos valores seqüenciais, torna-se necessário separar, da combinação de eventos acima, a natureza e extensão da não-aleatoriedade existente, a qual deve-se basicamente à persistência, tendência, sazonalidade e eventuais erros sistemáticos e acidentais.

De uma forma geral, a maior parte da variabilidade de uma série temporal natural é devido à sua componente aleatória. A questão é, então, identificar porções da variância total que são devidas a aspectos não-aleatórios e, se possível, identificar se estes são ocasionados pela persistência, tendência, flutuações periódicas, aperiódicas, ou por uma combinação destas heterogeneidades.

Para o modelista, esta questão torna-se particularmente importante, pois o modelo a ser empregado deverá refletir as características essenciais da série sobre a qual ele é ajustado. O conhecimento das heterogeneidades é também importante na escolha do tipo de modelo, pois, por exemplo, caso a série exiba persistência — e esta seja caracterizada por um processo Marcoviano, parte-se para a escolha deste tipo de modelo. Caso exista tendência e ciclicidades, estas devem ser removidas, pois ocasionam graves distorções na modelagem.

Entretanto, a identificação das características das séries temporais não é imediata e está envolta numa gama de considerações, como a de que, normalmente, lida-se com séries relativamente curtas; neste caso, uma variável física que é realmente aleatória pode apresentar fortuitamente tendências e ciclos ou, ao contrário, caso esta variável realmente possua tendências e ciclos de longo período, estes poderão não aparecer na série registrada. Outra consideração é relativa a riscos e incertezas devido à natureza estocástica do problema; questiona-se sobre o grau de representatividade inerente à série analisada, ou seja, a dúvida existente sobre a futura invariabilidade dos parâmetros estimados da série, ao longo dos anos de vida útil da obra hidráulica em questão.

Quanto à primeira das considerações acima, dado que uma série temporal natural comumente apresenta alguma heterogeneidade, necessita-se saber se o grau desta é significativo (em consideração com a pequenez da amostra) ou se ela pode ser atribuída a algum arranjo fugaz e fortuito da variável em questão. Para tal análise pode-se aplicar uma série de testes estatísticos paramétricos e não-paramétricos, alguns dos quais serão aqui sucintamente expostos.

★ Orlando Maciel Strobel, é Mestre em Engenharia Hidráulica pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo; Professor do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná, Universidade Federal do Paraná e Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

O procedimento recomendável de análise de séries temporais envolve análise gráfica, análise de independência (homogeneidade, aleatoriedade), análise de valores singulares (atípicos, extremos, outliers), análise de tendência e análise espectral (por estrutura de autocorrelação ou por análise harmônica). Esta última análise, por sua extensão, não será aqui abordada. A seguir serão sucintamente expostas algumas metodologias concernentes às outras análises.

Análise Gráfica

A inspeção visual da série é importante e deve ser a primeira das análises a ser realizada, pois permite antever o grau de variabilidade, a amplitude da série, a sazonalidade e uma possível tendência. Também deve-se agrupar os dados por ordem de magnitude e separá-los em classes distintas; plotando-se, então, o histograma, obtém-se uma primeira idéia do tipo de lei de distribuição de probabilidades relativa a esta variável.

Algumas vezes a estação ou o aparelho registrador da variável foi deslocado de sua posição inicial, o que pode ocasionar registros com valores sistematicamente alterados, a partir do ano de mudança. Esta forma de heterogeneidade pode ser detectada através de um gráfico dito dupla-massa (duplo-acumulativo), onde, em um eixo, plotam-se os valores médios acumulados do posto sob análise, contra os valores médios dos postos da região. Esta análise permite também verificar alterações na medição da variável, alterações estas devido a outras causas como, no caso de precipitação, devido ao crescimento de árvores próximas, edificações surgentes ou alterações no microclima devido a lagos artificiais e à urbanização crescente.

Testes de ajuste à leis de distribuição de probabilidades

O histograma da série permite, como já se aventou, presumir uma dada lei de distribuição de probabilidades. Além desta presunção, o analista faz uso de prévios consensos já consagrados no meio técnico-científico que, em função da região e das características da variável em questão, o faz optar previamente por uma lei específica tal como a lei de Weibull (extremos mínimos), leis de Gumbel, log-Normal ou log-Pearson III (extremos máximos), lei Normal (valores médios), etc...

Entretanto, à parte do exposto acima, procura-se realmente saber se a série em questão poderia pertencer à população teórica aventada, para o que se realizam testes de ajuste, que, para o grau de confiabilidade desejado e através de metodologias específicas, indicam a possibilidade de pertinência. Para uma análise rápida pode-se fazer uso de um papel de probabilidades desenhado de acordo com a lei em pauta, plotando-se os postos amostrais neste gráfico e, caso eles se alinhem aproximadamente segundo uma linha reta, pode-se pressupor que a hipótese de pertinência é válida.

O conceito "aproximadamente", no parágrafo anterior, é relativo, pois há julgamentos e julgamentos, motivo pelo qual são preferíveis os métodos analíticos, os quais possuem um grau mais elevado de impessoalidade e precisão. Dois métodos analíticos consagrados na Estatística são o teste χ^2 (qui-quadrado) e o Kolmogorov-Smirnov. Basicamente, o teste χ^2 estipula que a somatória dos desvios quadráticos padronizados entre os valores observados e os teóricos, obedece a uma lei de distribuição de probabilidades χ^2 , enquanto o teste Kolmogorov-Smirnov baseia-se na máxima amplitude destes desvios (não-quadráticos). Para o grau de confiança desejado e em função do número de elementos da série (graus de liberdade), comparam-se os resultados obtidos com tabelas de valores críticos, decidindo-se então sobre a validade da hipótese aventada.

Além destes dois testes clássicos, convém citar dois testes que pouco a pouco estão sendo também empregados, quais sejam, os testes de Lilliefors e de Cramér - von Mises (Conover, 1971).

O teste de Lilliefors é específico para populações Normal e Log-Normal, testando a amostra sob a hipótese H_0 : a amostra aleatória é Normal, com média e variância desconhecidas. Sua metodologia é similar à de Kolmogorov - Smirnov, exceto no fato de que nela a amplitude máxima é obtida de uma amostra previamente padronizada, enquanto na outra baseia-se em observações originais não ajustadas. Também seus valores críticos tabelados são diferentes.

O teste de Cramér - von Mises, aplicável a qualquer lei de distribuição de probabilidades, também é semelhante ao de Kolmogorov - Smirnov, mas, ao invés de considerar apenas a maior das diferenças entre amostra e lei teórica, considera todas as "i" diferenças entre as duas curvas. Intuitivamente este teste parece fazer um uso mais completo dos dados e, portanto, deve ser mais efetivo que o de Lilliefors ou Kolmogorov - Smirnov. Sua estatística é:

$$T = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n [F^*(X^i) - \frac{2i-1}{2n}]^2, \quad (1)$$

onde "n" é o número de dados da série, "i" é a ordenação seqüencial crescente e "F*(Xⁱ)" é o valor da função de distribuição hipotetizada para o i-ésimo elemento observado.

Presença de eventos singulares

Já na análise gráfica da série temporal ou na plotagem em papel de probabilidades podem aparecer pontos amostrais com magnitude muito alta ou muito baixa quando comparados com o restante da série. Tal ocorrência não deve surpreender, pois, descartados os erros grosseiros, em qualquer distribuição contínua existe uma probabilidade finita, ainda que pequena, de ocorrência de valores muito baixos ou muito altos.

Em se tratando de séries temporais, a ocorrência destes eventos dentro do período de observação traz um certo desconforto, sendo que a maneira de se lidar com tais ocorrências tem dividido a opinião dos hidrólogos, pois não se dispõe de meios para atribuir à ocorrência um período de retorno (uma probabilidade) adequado(a). Caso se resolva pela exclusão destes pontos, como se fossem observações espúrias, corre-se um grande risco de não estimar adequadamente as condições futuras da variável em questão. O mesmo pode-se dizer caso se mantenham estes valores na série.

Assim, a questão é realmente crucial já que se está lidando com variáveis estocásticas e, portanto, desconhecem-se as futuras realizações desta. Em termos de passado, a questão poderia ser amenizada caso se obtivesse seguras relações com outras variáveis hidrológicas mais extensas, ou relações confiáveis com outros elementos físicos (por exemplo, a dendrohidrologia). Tais aspectos demandariam a laboriosos estudos e normalmente, por questões de custo, tempo e disponibilidade, não são utilizados na prática corrente da Engenharia Hidrológica.

Assim, resta tratar o problema no campo puramente probabilístico, ou seja, utilizar testes estatísticos que indiquem, para a lei de distribuição de probabilidades concernente, nível de confiabilidade desejado e graus de liberdade, a representatividade estatística deste evento extremo. Em Barnett e Lewis (1978), encontra-se uma grande variedade destes testes, dentre os quais abordaremos sucintamente alguns relativos à população Normal. A validade de tais testes com suas tabelas de valores críticos respectivas é restrita às condições que deram origem aos mesmos e, portanto, podem apresentar resultados disparees quando comparados mutuamente. Entretanto, sua utilização é uma ferramenta à mão do hidrólogo que permite amparar suas decisões, ficando assim a crucialidade do problema restrita aos domínios naturais de riscos e incertezas já inerentes à própria série histórica, eximindo o modelista de decisões de caráter puramente pessoal.

A forma mais simples dos testes estatísticos para a análise de eventos extremos baseia-se na amplitude padronizada ou no desvio absoluto do evento sob análise, o que é aplicável tanto para o evento inferior como para o superior, dada a simetria da lei de distribuição Normal. Assim tem-se:

$$N_1 = \frac{X_n - \bar{X}}{S} \quad (2)$$

sendo X e S, respectivamente, a média e o desvio padrão amostral, e X_n o valor superior ou inferior sob análise. Esta estatística N₁ é comparada com valores críticos tabelados em Barnett e Lewis (1978), para o nível de significância adotado e extensão da série histórica.

Outro teste baseia-se no coeficiente de assimetria (viciado):

$$TA = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^3}{n S^3} \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Para X_i < X, obviamente teríamos TA negativo. Este valor seria comparado com valores críticos tabelados.

Os testes anteriores analisam a possibilidade de apenas um evento extremo, sendo que, quando a estatística é significativa, deve-se excluir o elemento em questão e reaplicar o teste para os novos extremos (corrigindo-se X e S). Um teste que já considera k eventos extremos (em ambas as direções) é concernente à estatística E_k de Tietjen e Moore:

$$E_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} (r_{(i)} - \bar{r}_{n-k})^2}{\sum_{i=1}^n (r_{(i)} - \bar{r})^2} \quad (4)$$

onde $r_i = |X_i - X|$, é desvio absoluto em relação à média; $r_{(i)}$ são os valores de r_i em ordem ascendente ($r_{(1)} < r_{(2)} < \dots < r_{(n)}$); \bar{r} é a média de todos os r_i , e \bar{r}_{n-k} é a média dos $(n-k)$ menores valores de $r_{(i)}$. É um teste pragmático e seus valores críticos estão tabelados na referência citada.

Em USWRC (1977) explicitam-se tratamentos diferenciados para valores altos e baixos, com base em método, não abordado aqui, de limites de confiança. Se identificado um ou mais baixos valores singulares, estes deveriam ser excluídos e as probabilidades dos restantes serem recalculadas considerando-se dados incompletos. Se identificado um alto valor singular, este deveria permanecer caso não se consiga estabelecer um período de retorno ponderado com postos próximos. Em Dias e Damázio (1985), o método é estendido a outras distribuições de probabilidades.

Testes de Homogeneidade

Normalmente, na prática corrente de engenharia, ao se analisar uma série hidrológica, desconhecem-se fatos ligados a ela, como relocações do instrumento medidor ou mudança do tipo deste. Assim, procura-se basicamente respostas a duas perguntas:

- 1) A série é aleatória (independente)?
- 2) Caso não seja, que tipos de heterogeneidades estão presentes?

Existe uma série de testes relativamente simples que podem ser utilizados na análise de séries temporais no sentido de validar hipóteses de homogeneidade e, assim, dar resposta às perguntas acima, ainda que dentro de um campo probabilístico. De uma forma geral, estes testes podem ser classificados em três categorias:

- a) testes de características gerais, geralmente calcados na hipótese básica da constância da média. Estes testes são eficientes em determinar a que extensão valores individuais da série consistem de elementos independentes extraídos de uma população de média constante. Não possuem o poder, entretanto, de distinguir alternativas específicas como tendência, oscilações de longo período, etc;
- b) testes cuja hipótese alternativa é a de que existe uma heterogeneidade, devido especificadamente à tendência (contínua, fragmentária ou cíclica);
- c) testes cuja hipótese básica é a da invariabilidade das variâncias de segmentos da série.

Estes testes podem ser paramétricos e não-paramétricos, sendo que, na sua grande maioria, os paramétricos foram desenvolvidos na hipótese de população Normal e, portanto, só devem ser usados se a distribuição de freqüências da variável em questão, ou da estatística comparativa (amplitude, correlação serial, etc), seja próxima desta. Já os não-paramétricos independem da real lei de distribuição e, portanto, são ditos robustos.

A seguir serão expostas brevemente as características relevantes de alguns testes, sendo que maiores detalhes e tabelas com valores críticos podem ser obtidos em WMO (1966), Conover (1971), Buishand (1982) e Dixon e Massey (1969).

Testes de características gerais

- TESTE DO COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO SERIAL (r_1) —

$$r_1 = \frac{\frac{n^2}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i \cdot X_{i+1} - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2}{N \sum_{i=1}^n X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2} \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Este coeficiente (ordem 1, não circular) é comparado com:

$$T = \frac{-1 \pm Z_{\alpha_1} \sqrt{n-2}}{n-1} \quad (6)$$

onde Z_{α_1} é obtido da tabela da distribuição Normal (unilateral), para o nível de confiança requerido. Se $r_1 < T$, concluiu-se que a série pode ser aleatória.

• **TESTE DE WALD-WOLFOWITZ (Aproximado)** — É uma versão do teste do sinal, (frequência de fase), onde cada vez que ocorre uma inversão na tendência dos valores sucessivos, conta-se num escore T_W , o qual é comparado com:

$$W = \frac{2mn}{m+n} + 1 + Z_{\alpha_2} \sqrt{\frac{2mn(2mn - m - n)}{(m+n)^2(m+n-1)}} \quad (7)$$

onde Z_{α_2} é o desvio Normal para o α desejado (bilateral) e m e n são o número de elementos positivos e negativos existentes nas diferenças sucessivas. Quanto $T_W < W$, a hipótese básica de aleatoriedade é rejeitada.

• **TESTE TURNING-POINT** — É similar ao anterior, sendo que a contagem dos picos e vales da série, P , é colocada na estatística: [Clarke (1973)].

$$G = \frac{P - 2(n-2)/3}{[(16n-29)/90]^{0.5}} \quad (8)$$

Se $G < Z$, considera-se a série independente. Este teste parece ser também conhecido como teste de Wallis e Moore [ver Damazio (1986); Koch e Rego (1985)].

• **TESTE DE SNEYER** — Cada valor da série é substituído pelo seu valor de ordem k_i (rank). Computa-se a estatística.

$$SN = \frac{6 \sum_{i=1}^{n-1} k_i k_{i+1}}{(n^2-1)(2n+1)} \quad (9)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Se

$$SN > \frac{(3n+2) \pm Z_{\alpha_1} \sqrt{n-2,8}}{4n+2} \quad (10)$$

a série é dita aleatória.

• **TESTE DA RAZÃO DE VON NEUMANN** — É um teste clássico, definido como sendo a razão dos desvios quadráticos sucessivos com relação à variância

$$V = \frac{n \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - X_{i+1})^2}{n-1 \left[\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \right]} \quad (11)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

Se

$$V > \frac{2n-2}{n-1} Z_{\alpha_1} \sqrt{n-2} \quad (12)$$

a série é dita aleatória.

• **TESTE DE STUDENT** — Também é um teste clássico onde se verifica a homogeneidade entre subperíodos da amostra e sendo, portanto, particularmente útil na identificação de mudanças bruscas e tendências.

$$TD = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\left[\frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \right]^{0.5}} \quad (13)$$

onde X_1 e X_2 são as médias dos subperíodos, n_1 e n_2 o número de seus elementos e S_1, S_2 são os respectivos desvios padrão. Se

$$|TD| > t_{\alpha_2}$$

sendo $t_{\alpha/2}$ o desvio relativo à distribuição t para o nível α (bilateral), com $n - 2$ graus de liberdade, diz-se que as médias são homogêneas.

• **TESTE DE CRAMÉR** — Este teste compara a homogeneidade da média de um subperíodo com a média de toda a série. Sua estatística é:

$$C = T_k \sqrt{\frac{n_k (n - 2)}{(n - n_k - n T_k^2)}} \quad (14)$$

sendo n_k o número de observações do subperíodo e T_k a variável padronizada entre as médias

$$T_k = \frac{\bar{X}_k - \bar{X}}{S} \quad (15)$$

Se $C < t_{\alpha/2}$ a série é dita homogênea.

• **TESTE DOS DESVIOS CUMULATIVOS** — Parte das características estatísticas de somas parciais ajustadas dos desvios das observações cronológicas. Sendo

$$S_k^* = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}) \quad (16)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$S_k^{**} = S_k^* / S1G \quad S_0^* = 0 \quad (17)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n$$

S_k^{**} é dito soma parcial ajustada reseqüenciada e $S1G$ é o desvio padrão amostra. Se

$$\max |S_k^{**}| < T_{S\alpha}$$

sendo $T_{S\alpha}$ um valor tabelado crítico (Buishand, 1982), a série é dita homogênea.

• **TESTE DE AMPLITUDE** — Possui os mesmos princípios acima, somente que se

$$R = (\max S_k^{**} - \min S_k^{**}) < T_{R\alpha} \quad (18)$$

sendo $T_{R\alpha}$ um valor tabelado, a série é homogênea.

• **TESTE DA RAZÃO DE VEROSSIMILHANÇA DE WORSLEY** — Faz uso das propriedades das somas parciais ajustadas balanceadas Z_k^*

$$Z_k^{**} = [k (n - k)]^{-0.5} \cdot S_k^* / S1G \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (19)$$

$$V_W = \max |Z_k^{**}| \quad (20)$$

$$W = \sqrt{\frac{(n - 2) \cdot V_W}{(1 - V^2)}} \quad (21)$$

Se $W < T_{W\alpha}$ a série é homogênea. $T_{W\alpha}$ está tabelado em Worsley (1979).

• **TESTE BAYESIANO DE GARDNER** — Segue a mesma linha também seguida por Chernoff e Zacks (1964) e baseia-se na estatística G

$$G = \sum_{k=1}^{n-1} p_k (S_k^{**})^2 \quad (22)$$

onde p_k é a probabilidade de que a heterogeneidade ocorra após a k -ésima observação. Ao se admitir que a probabilidade de mudança seja igual ao longo da série (distribuição uniforme), tem-se:

$$U = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n-1} (S_k^{**})^2 \quad (23)$$

Em se admitindo que $p_k \propto 1/[k(n-k)]$, ou seja, que a probabilidade de mudança seja maior nos extremos, tem-se

$$A = \sum_{k=1}^{n-1} (Z_k^{**})^2 \quad (24)$$

Se U ou A , quando comparados com valores críticos tabelados, forem menores que estes, a série é dita homogênea.

Testes cuja hipótese alternativa é a tendenciosidade

• **TESTE DE MANN-KENDALL** — Compara-se cada valor da série temporal com os outros restantes, sempre em ordem temporal. Conta-se o número de vezes que os termos restantes são maiores que o em análise. A estatística M é a somatória de todas estas contagens. Computa-se a estatística K :

$$K = \frac{4M}{n(n-1)} - 1 \quad (25)$$

Se

$$|K| < Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{4n+10}{9n(n-1)}} \quad (26)$$

a série não apresenta tendência significativa.

• **TESTE DE SPEARMAN-RHO** — Substitui-se os valores da série pelas suas grandezas de ordem (ranks) k_i . Para cada termo da série computa-se a diferença d_i entre o valor de ordem de magnitude (rank) e o valor índice de ordem temporal

$$d_i = k_i - i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (27)$$

$$S_p = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n d_i^2}{n(n^2 - 1)} \quad (28)$$

$$\rho = S_p \sqrt{\frac{n-2}{1 - S_p^2}} \quad (29)$$

Se: $|\rho| < t_{\alpha/2}$ não há tendência significativa.

• **TESTE DE HOTELLING-PABST** — Trata-se de uma versão modificada do teste de Spearman-Rho, onde apenas a somatória

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \quad (30)$$

é confrontada com valores críticos tabelados.

• **TESTE DE COX E STUART** — É um teste geral para tendência, o qual detecta, mas não distingue, tendências lineares, tipo senoidal ou qualquer outra tendência periódica. Se a série é constituída de um número par, particiona-se 1ª parte: $i = 1, 2, \dots, n/2$; 2ª parte: $i = (n/2) + 1, \dots, n$ e são formados os pares consecutivos entre as partes. Assim, o 1º par é $[X_{(1)}, X_{(\frac{n}{2}+1)}]$

Se o número de elementos n for ímpar, o elemento central é ignorado. São computados os sinais algébricos decorrentes das diferenças entre os elementos do par e extraídas suas probabilidades, que são comparadas com valores críticos segundo a distribuição binomial.

• **TESTE DE NOETHERS** — É específico para tendência cíclica, muito embora a identificação de periodicidade seja melhor detectada pela análise espectral (harmônica). Os dados são divididos em grupos de 3 observações e é feita inspeção sobre sua monotonicidade, extraídas suas probabilidades e comparadas com valores críticos segundo a distribuição binomial, em função do grau de confiança e graus de liberdade da série.

Testes para homogeneidade de variância

• **ESTATÍSTICA F** — Pode-se empregar a lei de distribuição de probabilidades F (Snedecor) e verificar a homogeneidade de subperíodos da série, num procedimento análogo ao de von Neumann para médias.

• **TESTE DE BARTLETT** (usando estatística F) — A hipótese básica a ser testada é a de que as variâncias de k subperíodos são iguais. Para tal, computa-se:

$$MM = (N - k) \ln S_p^2 - \sum_{i=1}^n [(n_i - 1) \ln S_i^2] \quad (31)$$

$$S_p^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(n_i - 1) S_i^2}{N - k} \quad (32)$$

$$A = \frac{1}{3(k-1)} \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n_i - 1} \right) - \frac{1}{N - k} \right] \quad (33)$$

$$V1 = k - 1 \quad (34)$$

$$V2 = \frac{k + 1}{A^2} \quad (35)$$

$$b = \frac{V2}{1 - A + (2/V2)} \quad (36)$$

$$FB = \frac{V2 \cdot MM}{V1 \cdot (b - MM)} \quad (37)$$

onde N é o número de elementos da série, k o número de subperíodos, S_i são os desvios padrão das subamostras, n_i o número de seus elementos e outros símbolos são grandezas auxiliares. O valor do FB calculado é comparado com $F(V1, V2)$ tabelado. Se $FB < F(V1, V2)$, existe homogeneidade de variâncias.

• **TESTE DE BARTLETT (Versão Curta)** — É uma aproximação do teste anterior, onde divide-se a série em k subperíodos iguais e computa-se suas variâncias. Seleciona-se a maior e a menor destas. Se Var_{max}/Var_{min} for menor que valores tabelados [WMO, (1966)], aceita-se a hipótese de homogeneidade.

Eliminação da Tendência

Basicamente, quase todas as séries apresentam algum tipo de tendência e justamente para avaliar a significância estatística desta é que se faz uso dos testes de tendência anteriormente expostos. Entretanto, somente, quando a hipótese básica destes é rejeitada, é que se deve usar as técnicas para a eliminação desta. Contudo, ainda não se chegou a um consenso sobre a existência de tendenciosidade real em séries climatológicas [WMO, (1966)], mesmo sobre as de grande período (por exemplo, a secular).

Assim, se uma série é rejeitada nos testes para homogeneidade de tendência e apresenta, por exemplo, um comportamento ascendente, não se pode afirmar que no futuro esta tendência continue, que estacione ou que decresça; de uma forma geral este comportamento é meramente resultado de flutuações amostrais. Como deseja-se moldar o comportamento da variável estocástica em questão a fim de obter subsídios para eventuais projetos de engenharia, deve-se eliminar esta heterogeneidade, tornando a série próxima a estacionária, pois, caso contrário, corre-se o risco de obter resultados irreais [Salas, Deleur, Yevjevich, Lane (1980)].

Os testes são incapazes de discernir o tipo de tendência presente, nem, portanto, de indicar o grau do polinômio que melhor se ajuste a ela. Um método que tem sido empregado é o de ajuste por mínimos quadrados, através da formulação:

$$\sum_{k=0}^k b_k \sum_{n=1}^N (nh)^{k+\ell} = \sum_{n=1}^N X_n (nh)^\ell \quad (38)$$

$$= 0, 1, 2, \dots, k$$

$$n = 1, 2, \dots, N$$

onde k é o grau do polinômio, $nh = N$ (período da série) é o número de soluções (equações) do sistema, e b_i são os coeficientes. Por exemplo, para $k = 1$ (tendência linear), tem-se:

$$b_0 \sum_{n=1}^N (nh)^\ell + b_1 \sum_{n=1}^N (nh)^{\ell+1} = \sum_{n=1}^N X_n (nh)^\ell \quad (39)$$

$$= 0, 1$$

$$\therefore b_0 = \frac{2(2N+1) \sum_{n=1}^N X_n - 6 \sum_{n=1}^N n X_n}{N(N-1)} \quad (40)$$

$$b_1 = \frac{12 \sum_{n=1}^n n X_n - 6(N+1) \sum_{n=1}^N X_n}{N(N-1)(N+1)} \quad (41)$$

A equação de ajuste fica (para $k = 1$):

$$\hat{X}_{(t)} = b_0 + b_1 t \quad (42)$$

Salienta-se ainda que a eliminação da tendência é particularmente importante quando se pretende usar modelos de análise espectral [Bendat e Piersol, (1971)].

Aplicação e Resultados

As técnicas descritas foram aplicadas a séries anuais de precipitação de 7 postos da 7ª Região Hidrográfica do Estado de São Paulo, expostos na figura 1, quais sejam:

POSTO DNAEE	NÚMERO DAEE	SUBREGIÃO	DENOMINAÇÃO	PERÍODO
02047021	B4-003	I	Usina Dourados	1937/81
02147037	C4-021	II	Fazenda Monte Alegre	1940/81
02247005	D4-030	II	Cresciumal	1937/81
02247017	D4-027	II	Fazenda Belmonte	1937/78
02047025	B4-015	III	Orlândia	1939/80
02148001	C5-040	IV	Pitangueiras	1942/78
02146003	C3-040	V	Fazenda Açude	1940/79

A subregião mencionada (3ª coluna) provém de um estudo sobre regiões hidrologicamente homogêneas em Strobel (1987). A escolha destes postos, de um total de 40 postos, se deve unicamente ao fato de apresentarem pouca falha de dados.

Inicialmente procedeu-se a plotagem (médias anuais) das ocorrências temporais conforme figura 2. Apesar de ser uma ferramenta indispensável, somente com grande experiência consegue-se extrair informações definitivas no caso estudado. Além da observação da época de ocorrência de valores máximos, mínimos e da variabilidade geral, consegue-se visualizar uma leve tendência genérica positiva, mormente a partir do centro da série.

Para o histograma mostrado na figura 3, utilizou-se o critério de Sturges, conforme Haan (1977).

$$k = 1 + 3,3 \log_{10} n \quad (43)$$

onde k é o número de classes e n o número de elementos da série.

Nas figuras 4 e 5 estão as curvas dupla-massa do posto Fazenda Monte Alegre, sendo que na primeira, a variável de confronto é a média das 3 estações do subgrupo II, enquanto na última é a das 7 estações analisadas. Inicialmente achávamos que a linearidade na figura 3 deveria ser bem maior do que na figura 4, já que são da mesma região homogênea. Não o foi, não só devido ao número pequeno de postos em confronto, mas também devido ao fato de que a divisão regional foi com base na variância, e não na média. As séries analisadas foram de 1942 a 1978, observando-se um comportamento anômalo principalmente no início e fim das séries, prenunciando que os testes de homogeneidade, quando aplicados a estes períodos, terão a hipótese básica rejeitada.

As estatísticas principais das séries estudadas estão expostas na tabela 1. Por se tratar de séries de totais anuais, verificou-se o ajuste às leis de distribuição Normal e Log-Normal através dos métodos de Lilliefors, Cramér-von Mises, Kolmogorov-Smirnov e X^2 , sendo que todas as séries foram aceitas a um nível de confiabilidade de 95%, exceto os postos Pitangueiras e Fazenda Belmonte, para a distribuição Normal e X^2 , tendo sido aceitas, entretanto, para a distribuição Log-Normal.

Para a hipótese de existência de eventos extremos na série, as três técnicas anteriormente descritas (teste com base na variável padronizada, com base no coeficiente de assimetria, e na estatística E_k de Tietjen e Moore), foram aplicadas sob duas hipóteses de população probabilística (Leis Normal e Log-Normal). Dos resultados expostos na tabela 2, observa-se que o teste com base no coeficiente de assimetria é mais poderoso que os outros dois.

Todos os testes de homogeneidade anteriormente descritos foram aplicados às séries e seus resultados estão sumarizados na tabela 3. A hipótese básica H_0 foi a de que existe homogeneidade (entre médias, na variabilidade, etc.) contra a hipótese alternativa H_1 , de que havia algum tipo de heterogeneidade. Todos os testes foram realizados a um nível de confiança de 95%, sendo que os valores críticos para este nível e graus de liberdade concernentes à amostra em estudo foram extraídas de tabelas constantes da bibliografia já citada. Estes valores críticos, por problemas computacionais, muitas vezes foram discretizados em intervalos.

A separação em subperíodos foi feita arbitrariamente nos testes que assim o exigiam, muito embora deva-se ter em mente que quanto maior o número, menor o grau de representatividade da subamostra, podendo prejudicar a confiabilidade no teste. No teste de Student, utilizou-se três subperíodos e perfez-se os testes: 1º terço versus restante, terço médio vs. restante e 3º terço vs. restante. No teste de Cramér utilizou-se subperíodos de 3 anos, num total de 4 a 5 subperíodos (dependendo do número de anos da série). Também no teste de Bartlett (versão curta), dividiu-se a série em 5 subperíodos distintos.

Dentro de suas respectivas classes, os testes de Wald-Wolfowitz, de desvios cumulativos, de Worsley e Cox e Stuart são mais elásticos na relaxação da hipótese básica (de homogeneidade), enquanto os de Mann-Kendall, Hotelling-Pabst e o de Bartlett são mais rigorosos.

Como já se havia prenunciado quando da análise gráfica, os períodos inicial e final parecem ser os maiores responsáveis pelas heterogeneidades das séries, como bem o indica o teste de Cramér.

Os postos que mais apresentaram heterogeneidades foram Usina Dourados (B4-003), Fazenda Belmonte (D4-027), Cresciumal (D4-030) e Fazenda Monte Alegre (C4-021). Estes três últimos estão bem próximos e na mesma vertente do vale. É interessante observar também que estes postos pertencem às subregiões homogêneas I (Usina Dourados) e II (os demais) e que, como já havia sido apontado em estudo anterior por Strobel (—), estes dois primeiros fatores são responsáveis pela maior explicação da variância existente.

Entretanto, a origem física da causa das inconsistências é de difícil determinação, sendo que seu estudo se inicia com uma exaustiva análise da série histórica a intervalos mensal e diário, com o confronto dos valores de um posto com o de outras séries, de tal forma a identificar espuriosidades ou ratificar observações, e se prolonga até o estudo climatológico local (chuvas orográficas, etc.).

Os mesmos testes foram aplicados também aos logaritmos dos dados, sendo que as únicas diferenças constam entre parênteses na tabela 3. Estas ocorreram para os postos Usina Dourados e Cresciumal, e somente para os testes de correção serial e o de von Neumann.

Ajustou-se, através do método de mínimos quadrados descrito, uma equação, linear aos dados. Um procedimento mais completo seria o de verificar o grau de polinômio e realizar testes para avaliar os coeficientes significativamente diferentes de zero. Para o Posto Fazenda Belmonte, por exemplo, obtém-se:

$$\hat{X}_{(t)} = 1.014,1 + 13,09 t \quad (44)$$

Na figura 6, estão plotadas as séries natural e ajustada deste posto. Todos os postos analisados apresentam uma tendência positiva (valores crescentes).

Comentários Finais

A escolha de um teste específico a ser usado deve partir do conhecimento das características intrínsecas de sua formulação, bem como de seu poder quando comparado com outros testes. Isto permite, às vezes, identificar a posição e o tipo da heterogeneidade presente. Estudos comparativos realizados por Buishand (1982), revelam que o teste de von Neumann é menos poderoso que os de Worsley e o de desvios cumulativos, o que não ficou evidente neste trabalho, possivelmente, devido ao pequeno número de postos aqui analisados.

Cita-se ainda que, quando de fato existe uma disposição heterogênea no meio da seqüência, o teste de desvios cumulativos é superior ao de Worsley em detectá-la, ocorrendo o contrário quando a heterogeneidade se situa nas extremidades. Naqueles estudos observou-se também que o poder dos testes de Gardner são comparáveis aos dos desvios cumulativos e de Worsley.

O teste da amplitude é menos poderoso do que o dos desvios cumulativos para detectar uma única mudança que ocorra no meio da série, mas a situação se inverte quando ocorrem duas ou mais mudanças nesta, o que permite concluir que os dados dos postos de Fazenda Belmonte e o de Cresciumal estão nesta categoria.

Pode-se ainda identificar graficamente o principal ponto de heterogeneidade em se plotando as funções soma parcial ajustada reseqüenciada (S_k^{**}) e a soma parcial ajustada balanceada reseqüenciada (Z_k^{**}). Numa pré-estimativa, o ponto onde se tivesse o máximo destas funções seria o ponto concernente à heterogeneidade.

Quando a validade dos testes se restringir a variáveis normalmente distribuídas, pode-se promover uma normalização da variável não-gaussiana desde que se tenha o fator de transformação. Assim, no caso de totais mensais e diários de chuvas, que freqüentemente se distribuem segundo uma lei de distribuição de probabilidades de Poisson, elas podem ser aproximadamente Normalizados pela expressão:

$$X_i^1 = \sqrt{X_i} + \sqrt{X_i + 1} \quad (45)$$

Aplica-se, então, os testes sobre estas variáveis transformadas.

A aplicação dos testes também pressupõe a estacionariedade da série. Quando o intervalo utilizado é menor do que o anual surge o aspecto de sazonalidade, a qual deve ser removida através de esquemas clássicos de padronização.

Outra questão sobrevém da presença de persistência significativa na série, a qual contribui com algum grau para a heterogeneidade. Como a maioria dos testes é de hipótese alternativa geral, é interessante obter-se um procedimento que, sabendo-se da significância da persistência, retire os efeitos desta na série de tal forma que a hipótese alternativa fique restrita a outros tipos de heterogeneidades que não o devido à persistência. Um procedimento aproximado que atenderia esta questão é relativa ao uso da extensão efetiva da série histórica, N' . Se a população é aleatória em todos os aspectos exceto que contém uma persistência Marcoviana linear de 1ª ordem (R_2 R_2^2 ; R_3 R_3^2 ; etc), realiza-se a transformação

$$n' = n \left(\frac{1 - R_1}{1 + R_1} \right) \quad (46)$$

onde, como R_1 é geralmente positivo, tem-se $n' < n$, e aplica-se os testes normalmente, apenas substituindo n (número total de observações), por n' . Mesmo nos testes de fragmentação de amostra (Student, Cramér, Bartlett), o número de observação real na classe pode ser substituído pelo número efetivo de observações, conforme WMO (1966).

Para a presente análise fez-se uso de um computador DEC-10 e de um IBM 370 (4341), com programas em que foram utilizadas algumas subrotinas do IMSL — International Mathematical and Statistical Libraries. O tempo de CPU para a análise de cada série foi, em média, de 15 segundos.

Tabela 1 — Principais estatísticas

Estatísticas	VALORES OBTIDOS				log ₁₀ DOS VALORES OBTIDOS				
	Postos	n (anos)	X (mm/ano)	Var (mm/ano) ²	S (mm/ano)	R ₁	X	S	R ₁
U. Dourados	45	1.468,7	58.251,3	241,35	0,229	3,161	0,075	0,215	0,137
F. M. Alegre	42	1.451,4	82.808,4	287,76	-0,001	3,153	0,090	0,070	-0,530
Cresciumal	45	1.228,2	88.492,0	297,48	0,174	3,075	0,115	0,286	-0,105
Faz. Belmonte	42	1.295,6	126.131,0	355,15	0,304	3,090	0,161	-0,320	-0,803
Orlândia	42	1.593,7	100.856,0	317,58	-0,146	3,193	0,098	-0,134	-0,637
Pitangueiras	37	1.324,7	54.383,8	233,2	-0,029	3,115	0,084	-0,030	-0,631
Faz. Açude	40	1.508,7	93.578,5	305,91	-0,146	3,169	0,095	-0,155	-0,951

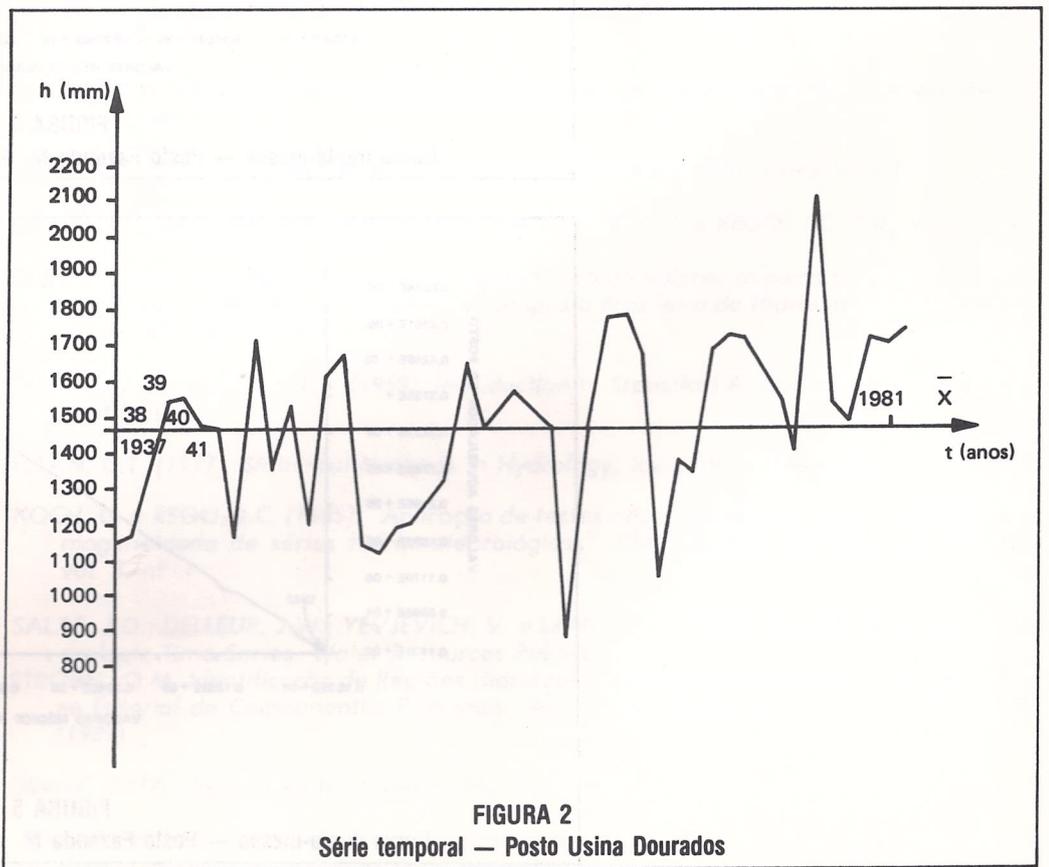
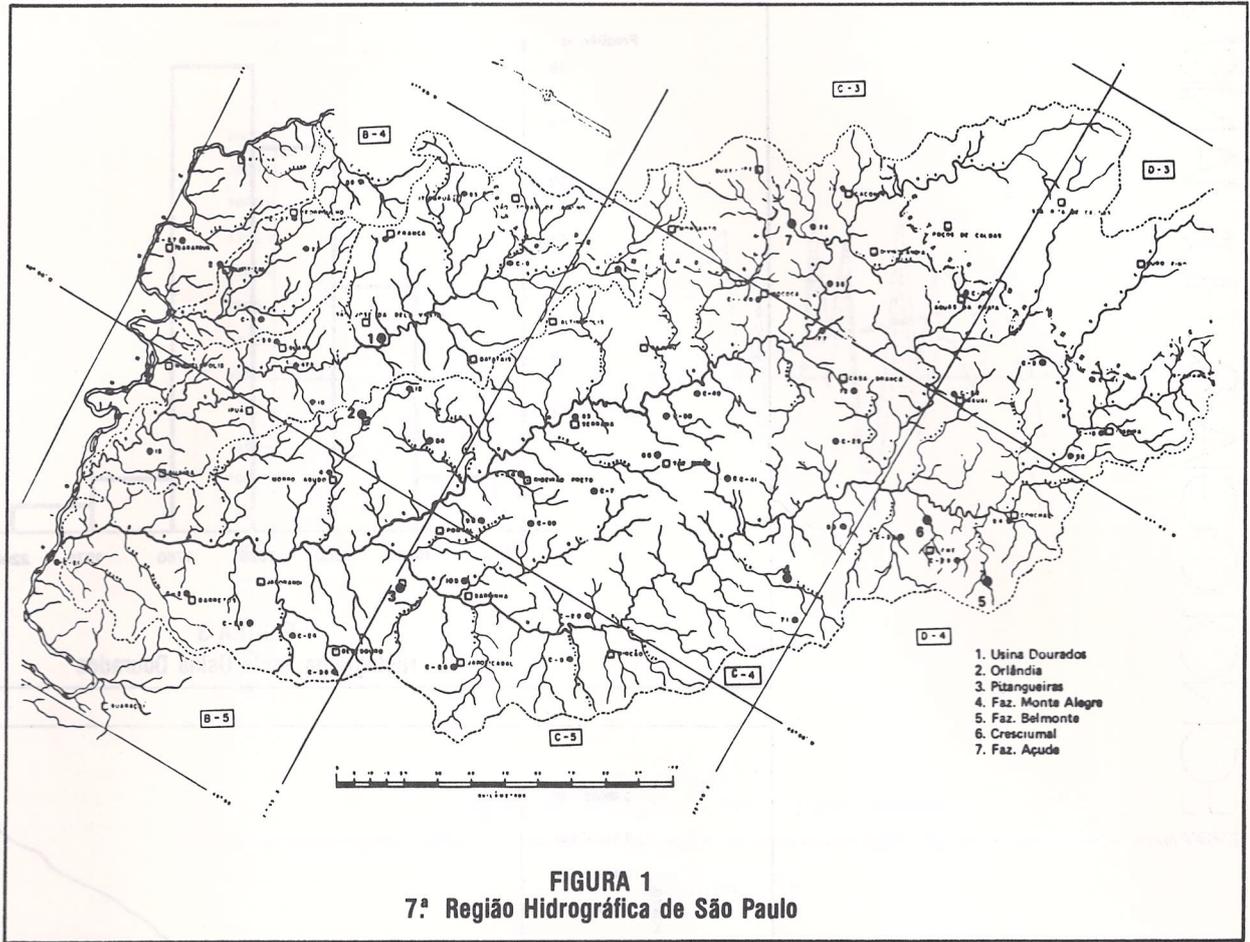
TABELA 2
Resultado dos testes para verificação da existência de eventos singulares.

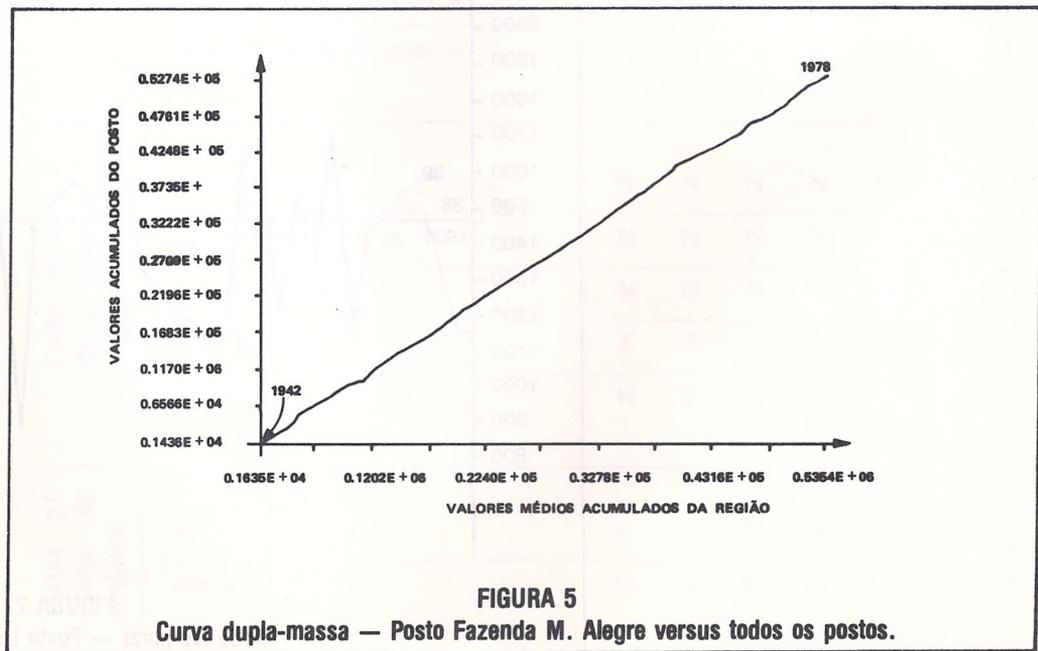
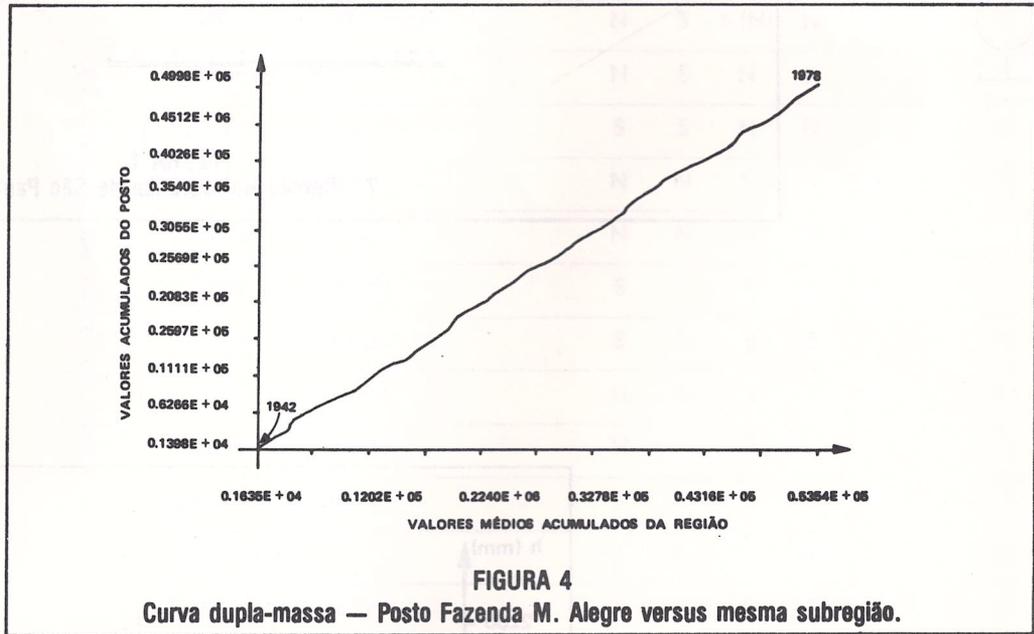
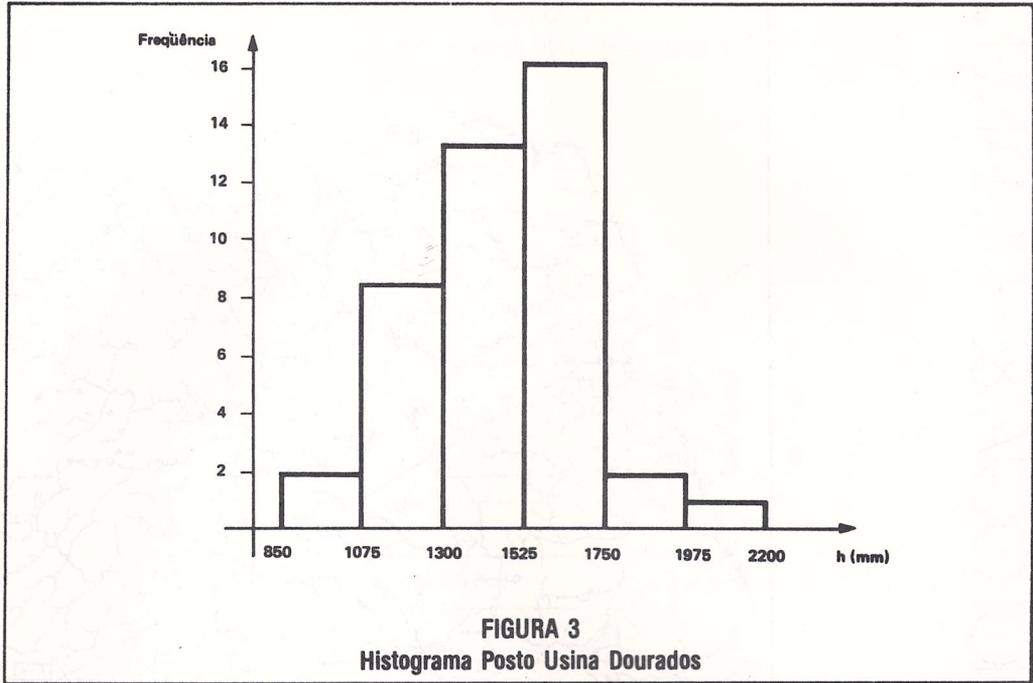
Testes para detecção de outliers		Variável Padronizada		Coeficiente de Assimetria		E _k - Tietjen e Moore	
Postos	Leis de probabilidade	Normal	Log-Normal	Normal	Log-Normal	Normal	Log-Normal
Usina Dourados		N	N	N	S	N	N
Faz. Monte Alegre		N	N	N	S	N	N
Cresciumal		N	N	N	S	S	N
Faz. Belmonte		N	N	S ★	S ★	N	N
Orlândia		N	N	S ★	S ★	N	N
Pitangueiras		N	N	S ★	S ★	N	N
Faz. Açude		N	N	N	S	S	N

OBS.: N = não há outlier; S = há outlier; S ★ = há só outlier inferior

TABELA 3
Resumo dos testes para homogeneidade

	Usina Dourados	Faz. Monte Alegre	Cresciumal	Faz. Belmonte	Orlândia	Pitangueiras	Faz. Açude
Testes para verificar homogeneidade geral	Correlação Serial	N (S)	S	S (N)	N	S	S
	Wald-Wolfowitz (aproximado)	S	S	S	S	S	S
	Turning-Point	N	S	S	S	S	S
	Sne yer	N	S	S	N	S	S
	Razão de von Neumann	N	S	S (N)	N	S	S
	Student 1º terço	N	S	N	N	S	S
	Student 2º terço	S	S	N	N	S	S
	Student 3º terço	N	N	S	N	S	S
	Cramér 1º período	N	N	N	N	N	N
	Cramér 2º período	S	S	S	S	S	S
	Cramér 3º período	S	S	S	S	S	S
	Cramér 4º período	N	N	N	N	N	N
	Cramér 5º período	N	—	N	—	—	—
	Desvios cumulativos	S	S	S	S	S	S
	Amplitude	S	S	N	N	S	S
	Razão de Worsley	S	S	S	S	S	S
	Bayesiano de Gardner U	N	N	N	N	S	S
Bayesiano de Gardner A	N	N	N	N	S	S	
Testes para verificar tendência de ciosidade.	Mann-Kendall	N	N	N	N	N	N
	Spearman-Rho	N	N	N	N	S	S
	Hotelling-Pabst	N	N	N	N	N	N
	Cox e Stuart	S	S	S	S	S	S
	Noethers	N	S	S	S	S	S
Testes p/ homog. de variâncias.	Bartlett (F)	N	N	N	N	N	N
	Bartlett (V. curta)	N	N	N	N	N	N





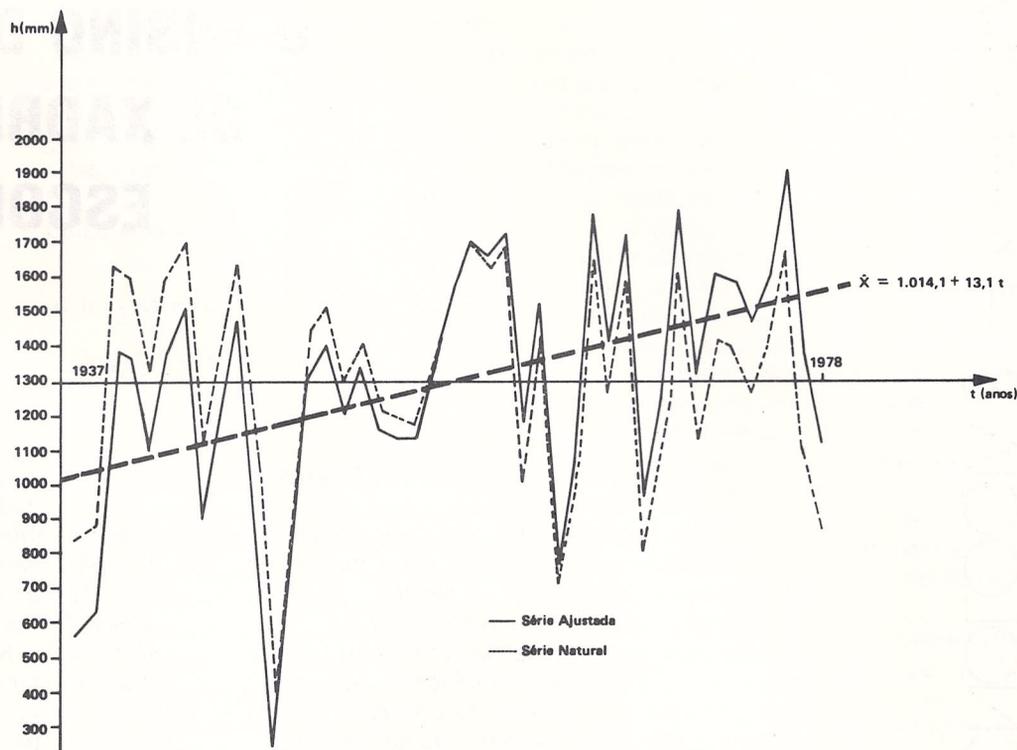


FIGURA 6
Ajuste da Tendência — Posto Fazenda Belmonte

Bibliografia

- BARNETT, V. e LEWIS, T. (1978). *Outliers in Statistical Data*. John Wiley Sons.
- BENDAT, L.S. e PIERSOL, A.G. (1971). *Random Data: Analysis and Measurements Procedures*. Wiley Interscience.
- BUISSHAND, T.A. (1982). "Some Methods for testing the Homogeneity of Rainfall Records". *Journal of Hydrology*, 58, pages 11-27.
- CHERNOFF, H. e ZACKS, S. (1964). "Estimating the Current Mean of a Normal Distribution Which is Subjected to Changes in time". *Annals of Mathematics and Statistics*, 35, pages 999-1018.
- CLARKE, R.T. (1975). *Mathematical models in hydrology*. FAO. Irrigation and Drainage paper n.º 19.
- CONOVER, W.J. (1971). *Practical Nonparametric Statistics*. John Wiley Sons Inc.
- DAMAZIO, L.M. (1986). Comentário ao artigo de KOCH, U. e REGO, J.C. *RBE*, vol 4, n.º 1.
- DIAS, N.L.C. e DAMAZIO, L.J. (1985). "Tratamento de valores atípicos pequenos na estimação de vazões decamilenares". VI Simpósio Brasileiro de Hidrologia e Recursos Hídricos, São Paulo, 1985.
- DIXON, W.J. e MASSEY, F.J. (1969). *Introduction to Statistical Analysis*. International Student Edition.
- HAAN, C.T. (1977). *Statistical Methods in Hydrology*, Iowa State University.
- KOCH, U. e REGO, J.C. (1985). "Aplicação de testes não paramétricos para verificar a homogeneidade de séries hidrometeorológicas". *RBE*, Caderno de Recursos Hídricos, vol. 3, n.º 1.
- SALAS, J.D.; DELLEUR, J.W.; YEVJEVICH, V. e LANE, W.L. (1980). *Applied Modeling of Hydrologic Time Series*. Water Resources Publication.
- STROBEL, O.M. Identificação de Regiões Hidrologicamente Homogêneas através de Análise Fatorial de Componentes Principais. *Revista Tecnologia & Humanismo*, CEFET-PR (1987).
- USWRC (1977). *Guidelines for Determining Flood Flow Frequency*. Bulletin 17A.
- WORSLEY, K.J. (1979). "On the likelihood ratio test for a shift in location of normal populations". *Journal of the American Statistical Association*. Volume 74, page 366.