SEÇÕES CÔNICAS EM COORDENADAS POLARES COM CABRI GÉOMÈTRE II

Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano[1]

RESUMO

Neste trabalho pretendemos compatibilizar o sistema de coordenadas polares construído em SANGUINO (2002, p.76), com o sistema próprio do Cabri, de forma que seja possível determinar automaticamente a equação polar de algumas curvas.

ABSTRACT

In this paper we intend compatibilize the system of polar coordinates constructed in SANGUINO (2002, p.76), with the own system of Cabri, in such a way that it may be possible to determine automatically the polar equation of some curves.

INTRODUÇÃO

No trabalho (SANGUINO, 2002, p.76), construímos o sistema de coordenadas polares diferente do sistema de coordenadas do próprio Cabri Géomètre II, e foram inicialmente testado durante o **IBEROCABRI 2002**, (Primeiro Congresso Ibero-americano de Cabri Géomètre, realizado em Santiago de Chile, entre 24 e 26 de julho de 2002).

Onde colocamos que o *sistema de coordenadas polares*, era necessário de se considerar, porque apresenta algumas vantagens sobre as coordenadas retangulares, para certas curvas e tipos de problemas. O sistema de coordenadas apresentado nos permite traçar curvas a partir de suas equações polares e usamos para isto o "rastro On/Off". Foi proposto em (SANGUINO, 2002, Bienal) traçar a curva cuja equação é:

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$$

[1] Bacharel em Matemática Pura pela UNMSM Lima- Peru. Mestre e Doutor em Matemáticas Aplicadas pela IM-UFRJ. Grupo de Ensino e Pesquisas em Educação Matemática. GEPEM, Curso de Licenciatura em Matemática do Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná – Unidade de Pato Branco. E-mail: *srichardwsb@yahoo.com.br*.

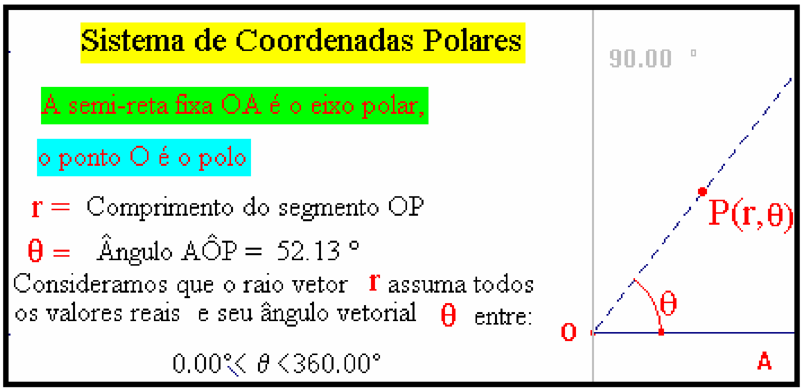
onde "*e*" é a excentricidade e "*p*" a distância da diretriz ao polo, chamada de seções cônicas. Por outro lado sabemos que o Cabri Géomètre II permite construir cônicas e ainda o software determina sua equação polar. Isto nos motiva a explorar e compatibilizar o sistema de coordenadas polares construído em (SANGUINO, 2002, p.76), com o sistema próprio do Cabri, de forma que seja possível determinar automaticamente a equação polar de algumas curvas por exemplo das cônicas.

Cabe lembrar que, Jean-Marie Laborde e Franck Bellemain desenvolveram o Cabri Geometry II no Institut d'Informatique et Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG), um laboratório de pesquisa da Université Joseph Fourier em Grenoble, França, em cooperação com o Center National de la Recherche Scientifique (CNRS) e a Texas Instruments.

Cabri é uma sigla composta pelas iniciais dos termos: **CA**hier de **BR**ouillon **I**nteratif. Uma tradução livre é: cadernos de rascunhos interativos. O software é apresentado com um menu e uma lista desdobrável de 11 botões. Veja (SANGUINO, 2002, p.37).

O SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

No sistema de coordenadas polares, um ponto é localizado especificando-se sua posição em relação a uma semi-reta (reta) fixa e a um ponto fixo sobre a referida reta. Conforme representação na Figura seguinte. Veja (SANGUINO, 2002, p.75).

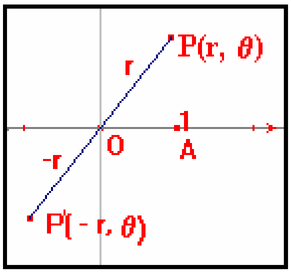


As coordenadas de *P* são escritas, (r,θ) convencionaremos que o raio vetor *r* assuma todos os valores reais e seu ângulo vetorial θ como, ou zero ou o menor ângulo positivo inferior a *360⁰*, de maneira que o intervalo de valores de θ é dado por:

$$0^0 \le \theta \le 360^0$$

Esta consideração é devido a que o livro de LEHMANN (1998) é livro texto na disciplina de Geometria Analítica no curso de Licenciatura em Matemática no CEFET-PR.

De acordo com LEHMANN (1998, p. 210), se um ponto tem um raio vetor negativo o ângulo vetorial é, inicialmente, marcado na forma usual, mas seu lado extremidade é então prolongado a partir do pólo em sentido inverso até uma distância igual ao valor absoluto do raio vetor. Assim, um ponto *P'* com coordenadas $(-r,\theta)$ é localizado como se mostra na figura seguinte.



CONSTRUÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS POLARES COMPATÍVEL

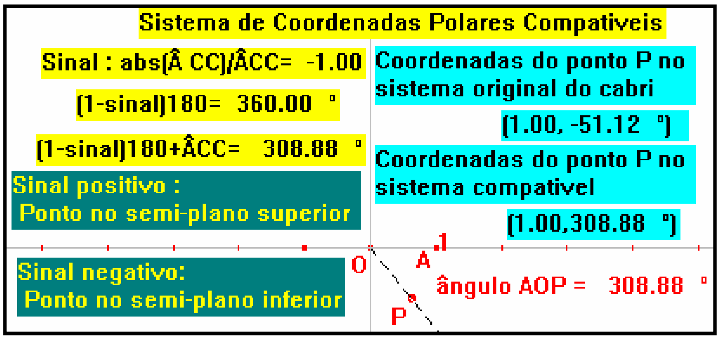
1. Abra uma janela de desenho nova no Cabri Géomètre II;
2. Ative o sistema de coordenadas polares e rotule a origem com *O*;
3. Trace uma reta perpendicular ao sistema de coordenadas polares, que passe no ponto origem *O* e rotule *90* (o eixo a 90^0);
4. Trace uma circunferência de preferência com raio de uma unidade com centro em *O* e que intercepte o eixo polar direto no ponto *A* ;
5. Construa um ponto *P* sobre a circunferência;
6. Construa uma semi-reta de origem *O* que passe pelo ponto *P*;
7. Determine as coordenadas polares do ponto *P*;
8. Selecione a segunda componente, (o *ângulo*) da coordenada do ponto *P*, e calcule $\dfrac{|\hat{a}ngulo|}{\hat{a}ngulo}$ que chamaremos de *sinal* do ponto *P*.
   Observamos que se o sinal é positivo, significa que o ponto P está no semi-plano superior, e se o sinal é negativo, significa que o ponto P pertence ao semi-plano inferior.
9. Meça o ângulo raso;
10. Calcule *(1-sinal)*180*^{0} + *ângulo* este valor é a medida do ângulo *AÔP*;

11. Digite ângulo *AÔP* = e insira o resultado anterior;

    Observamos que este valor do ângulo varia entre zero ou o menor ângulo positivo inferior a 360⁰.

12. Trace um ponto *F* sobre a semi-reta e determine as coordenadas do ponto *F*;
13. Salvar o arquivo como SCPC.fig.

Desta forma temos construído o Sistema de Coordenadas Polares Compatível entre o sistema polar próprio do Cabri Géomètre II, e o construído em, (SANGUINO, 2002, p.76). Este Sistema de Coordenadas Polares Compatível nos permite explorar o rastro, lugar geométrico, e nos permite obter a equação polar de algumas curvas. Este sistema será usado na próxima seção.



TRAÇADO DE CURVAS EM COORDENADAS POLARES

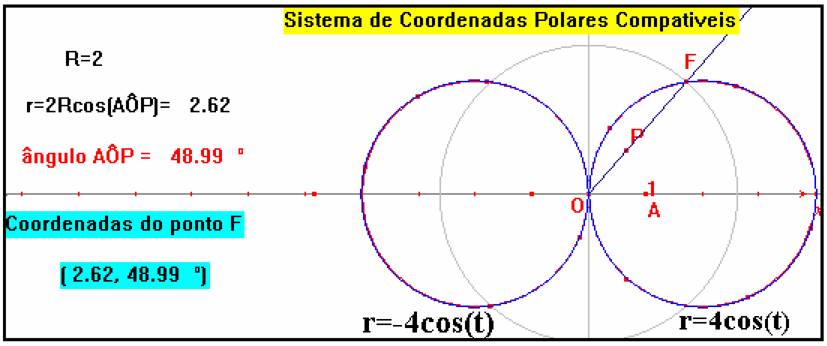
Consideraremos agora o traçado de curvas a partir de suas equações polares usando o sistema de coordenadas compatível construído na seção anterior e explorando o lugar geométrico e se é possível determinar automaticamente a sua equação polar.

CIRCUNFERÊNCIA. Traçar a curva cuja equação é: $r = 2R\cos\theta$ onde R é uma constante.

Solução:

1. Abra o arquivo SCPC;
2. Digite *R*= e insira um número e calcule *r*=, fazendo *2*R*cos (insira a medida do ângulo AÔP)*, o resultado clic na tela;
3. Transfira o resultado anterior no ponto *O*, determinando outro ponto;
4. Determine uma circunferência com centro no ponto O e que passe pelo ponto anteriormente determinado;

5. Determine o ponto de interseção, entre a circunferência e a semi-reta e rotule com F;
6. Determine o lugar geométrico do ponto F com relação ao ponto P. Aparecem duas circunferências? O que aconteceu?
7. Aplique cônica, sobre *5* pontos de cada circunferência e determine sua equação. O que se observa?



Observamos que a equação inicial é $r = 4\cos\theta$ e o Cabri em nosso sistema de coordenadas compatíveis representa por duas equações $r = 4\cos\theta$ e $r = -4\cos\theta$. Isto implica que devemos traçar a curva com mais cuidado. A seguir analisamos o que está acontecendo?

8. Inicie no passo (2), dê o resultado de r, determine o sinal de r, logo determine a parte positiva de r;
9. Transfira esta parte positiva à origem O e trace uma circunferência que passe por este ponto de centro em O. Determine o ponto de intercepção entre a semi-reta e a circunferência e rotule de F, este processo será chamado de *traçar a parte positiva*.
10. Aplique rastro ao ponto F logo anime o ponto P. O que se observa? Também podemos aplicar lugar geométrico sobre F.
11. Determine a parte negativa. Trace esta parte negativa e determine o ponto de interseção, rotule de N e pinte de cor diferente ao ponto F.
12. Aplique rastro ao ponto N, logo anime o ponto P. O que se observa? Lembra? Como se gráfica a coordenada $(-r, \theta)$, veja seção 2, vamos usar isto a seguir.
13. Voltamos ao passo (11). Aplique simetria central ao ponto N com relação ao ponto O. Oculte o ponto N e rotule o ponto simétrico de N e pinte de uma cor diferente de F.
14. Aplique rastro no ponto N e anime o ponto P. O que se observa? O que se pode concluir?

15. Aplique rastro aos pontos F e N simultaneamente, logo anime o ponto P. O que se observa?
16. Aplique lugar geométrico aos pontos F e N simultaneamente. O que se observa?
17. Trace cônicas nestes lugares geométricos, sobre 5 pontos de cada uma delas, logo determine suas equações.
    Observe que aparecem duas equações, uma para a parte positiva e outra para a parte negativa, como ambas são as mesmas não temos problemas. Porém isto justifica, porque em muitos casos só devemos considerar que r assuma valores positivos.
18. Salvar o arquivo com outro nome (ex. SCPCcircunferência.fig).

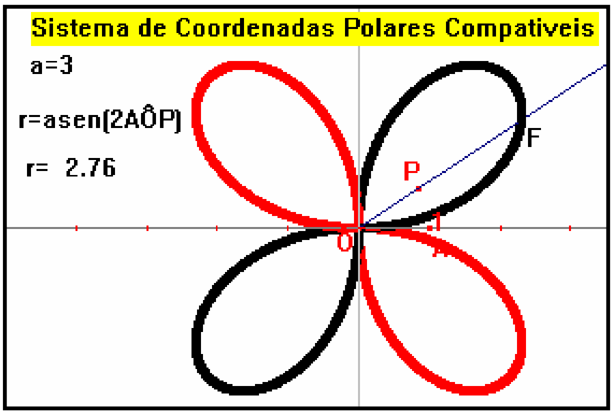
Desta forma podemos verificar que o Cabri determina a circunferência $r = 2R\cos\theta$ e determina a mesma equação da circunferência $r = 2R\cos\theta$.

Observamos que o traçado de curvas a partir de suas equações polares usando o arquivo SCPC.fig é semelhante para qualquer equação. Assim, no que segue cada passo será dado implicitamente, a menos que o contrário seja especificado.

ROSA DE QUATRO FOLHAS. Traçar a curva cuja equação é: $r = a\,\mathrm{sen}\,2\theta$.

Solução

1. Abra o arquivo SCPC.fig;
2. Trace a parte positiva na cor vermelha e a parte negativa na cor preta. Anime o ponto P. O que se observa? Assim, determinamos o traçado da curva conhecido como Rosa de quatro folhas.



Aplicamos lugar geométrico e neste caso não conseguimos determinar a equação polar da curva.

Aqui não é possível fazer como no caso da circunferência, ou seja traçar sobre seus lugares geométricos, cônicas, para logo determinar as equações. Isto é impossível, porque simplesmente uma cônica e uma rosa de quatro folhas são curvas de natureza diferente.

Portanto fica aqui lançado o seguinte problema:

> "*Será possível, em uma próxima evolução do Cabri Géomètre, o software determinar automaticamente as equações de curvas traçadas em coordenadas polares*".

Desta mesma forma podemos traçar curvas a partir de suas equações polares, da mesma forma como foi apresentado em (SANGUINO, 2002, p.76). Porém devemos ressaltar que o Cabri, só num caso bem particular que podemos obter as equações das curvas traçadas em coordenadas polares, como veremos a seguir.

SEÇÕES CÔNICAS

A equação polar de uma seção cônica assume uma forma particularmente simples e útil quando um foco está no pólo e o eixo focal é coincidente com o eixo polar. Traçar a curva cuja equação é:

$$r = \frac{ep}{1 \pm e\cos\theta}$$

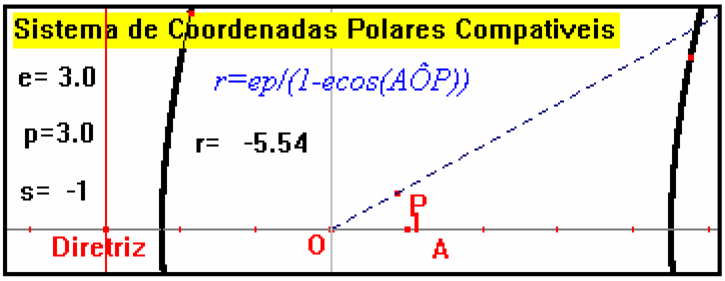
onde e é excentricidade e p a distância da diretriz ao polo. Dependendo do valor de e, vamos ter que considerar vários casos a seguir.

HIPÉRBOLE

Solução

1. Abra o arquivo SCPC.fig;
2. Trace um segmento, coloque um ponto sobre este segmento, rotular este ponto com "*e*", meça a distância de "*e*" a um extremo do segmento, este valor incluir a "*e =*", oculte o segmento;
3. Trace um segmento. Coloque um ponto sobre este segmento. Rotular este ponto com *p*. Meça a distância de *p* a um extremo do segmento, este valor incluir a "*p =*", oculte o segmento. Trace a diretriz associado a "*p*". Digite *s =*, incluir um número, aqui *s* é *1* ou *-1*, neste caso *s* determina a posição da diretriz com relação ao foco.
4. Calcular $r = \dfrac{e * p}{1 + s * e * \cos(A\hat{O}P)}$ usando os valores de *e=3*, *p=3* e *s=-1*.

   Trace a curva, o que se observa? Por que acontece isto? É possível traçar cônicas nestes lugares geométricos?



5. Determine o sinal de r e trace a parte positiva e negativa de r.
6. Aplique lugar geométrico aos pontos F e N e trace cônicas neste lugares geométricos, determine as equações destas cônicas.
7. Anime o ponto e. O que se observa?

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

LEHMANN, C. H. *Geometria analítica*, 9ª ed. Rio de Janeiro: Globo, 1998.

SANGUINO, S. R. W. B. *Cabri Geometry II: Sistema de Coordenadas Polares - Traçado de Curvas*, Mini-curso. In: 1o. Congresso Iberoamericano de Cabri-Géomètre II. IBEROCABRI, Santiago de Chile: Chile 24 a 26 de julho de 2002.

SANGUINO, S. R. W. B. *Curvas em coordenadas polares com Cabri*, Palestra. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 14 a 18 de outubro de 2002.

SANGUINO, S. R. W. B. *Introdução ao Cabri Géomètre II*. In: Semana Acadêmica de Matemática, 8., e Encontro de Educação Matemática, 1., ENEMAT, CEFET-PR, 21 a 25 de outubro de 2002, Pato Branco, Paraná. Anais, Pato Branco: CEFET-PR, 2002. p. 35-48.

SANGUINO, S. R. W. B. *Cabri Géomètre II: Sistema de Coordenadas Polares - Traçado de Curvas*. In: Semana Acadêmica de Matemática, 8., e Encontro de Educação Matemática, 1., ENEMAT, CEFET-PR, 21 a 25 de outubro de 2002, Pato Branco, Paraná. Anais, Pato Branco: CEFET-PR, 2002. p. 73-82