ARTIGOS E ENSAIOS

SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS ATRAVÉS DO TEMPO

Christian José Quintana Pinedo[1]

RESUMO

Qualquer problema que possa ser solucionado através dos números, com certeza, será tratado direta ou indiretamente por meio de equações, sendo elas, expressões algébricas, trigonométricas, diferenciais, exponenciais ou de qualquer outra natureza em que apareça em sua escrita o símbolo de igualdade.

Pretendo nestas notas, apresentar e evolução histórica da solução das equações algébricas, racionais, inteiras, de grau $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$, em que **N** é o conjunto de números naturais, aquelas nas quais a incógnita aparece apenas submetidas às chamadas operações algébricas: adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radicação.

Quando n = 2, 3 ou 4 encontra-se em [6] o histórico e a solução das equações de segundo, terceiro e quarto grau, para o histórico da solução de primeiro grau pode consultar [7] onde o conceito de equação e solução destas equações são tratadas desde seus inícios. Para entender a solução de equações de grau superior a $\mathbf{n \geq 5}$ tem-se que conhecer teoria de grupos, anéis e corpos que não é finalidade destas notas.

Palavras-chave: História da Matemática. Equações. Álgebra.

ABSTRACT

Any problem that it may be solved through the numbers, with will certainly be negotiated directly or indirectly by means of equations, even, algebraic expressions, trigonometrical, differentiates, exponential or of any other nature where appears in its writing the symbol of equality.

---

[1] Bacharel em Matemáticas Puras pela Universidade Nacional Mayor de San Marcos Lima – Peru, Mestre e Doutor em Ciências Matemáticas pelo IM-UFRJ Brasil, pesquisador do CEFET-PR – Unidade de Pato Branco, e-mail: *christianjqp@yahoo.com.br* – home page: *http://geocities.yahoo.com.br/christianjqp/*

I intend in this paper, to present a historical evolution of the solution of the whole algebraic, rational equations of degree **n ∈ N,** where **N** is the set of natural numbers, those in that the incognito just appears submitted to the calls algebraic operations: addition, subtraction, multiplication, division, whole power and roots.
When **n = 2**, 3 or 4 meets in [6] the historical and the solution of the second, third and fourth degree equations, for the historical of the solution of first degree may consult [7] where the equation concept and solution of these equations are treated since its beginnings. To be able to understand the solution of equations of superior degree the n ³ 5 it is necessary to know theory of groups, rings and bodies but it is not the purpose of this paper.

Keywords: History of the Mathematics. Equations. Algebra.

1. INTRODUÇÃO

Denotemos **R** ao conjunto dos números reais equações do tipo:

$$\mathbf{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0} \qquad (1.1)$$

emque **n ∈ N**, são chamadas de "*equações racionais inteiras de variável **x** de grau **n***", os números reais constantes a_i em que i = 1, 2, . . . , n, são chamados "*coeficientes da equação*"; as igualdades do tipo (1.1) geralmente podem ser resolvidas por simples fatorização. Observe que existem algumas equações que não têm fatores simples, no que se refere às soluções exatas, sabe-se que a equação linear ax + b = 0, sendo a ≠ 0 tem como raiz $x = -\frac{b}{a}$.

A palavra álgebra é parte de um manuscrito árabe de cerca do ano 800 d.C. [3] que dá regras para a solução de equações, o símbolo "=" para a igualdade foi utilizada pela primeira vez pelo inglês Robert Recorde em 1557, apareceu em seu livro "*O aguçador do ingênuo*" sendo o primeiro tratado inglês de álgebra; segundo o autor, elogiou este símbolo porque duas coisas não podem ser iguais a duas retas paralelas, o símbolo se generalizou no final do século XVII. Descartes utilizou um signo semelhante ao símbolo do infinito.

O uso das letras x, y, z para representar incógnitas e as primeiras letras do abecedário para representar valores conhecidos (constantes) aparece pela primeira vez no livro "*A Geometria*" de Descartes.

A palavra "*equação*" foi usada por escritores medievais, Ramus (1515-1572) usou a palavra "*Aequatio*" em sua "*Aritmética*" (1567). A equação aparece em inglês, em 1570, na tradução de Henry Billingsley da obra "*Elementos*" de Euclides:

"*. . . muitas réguas. . . da álgebra, com as equações. . . usad nisso.*"

François Viete (1540-1603) define o termo equação no Capítulo VIII de "*Isagoge do Analyticem do Artem*", em 1591.

Equacionar um problema é geralmente entendido como colocá-lo dentro de um mecanismo do qual ele poderá ser resolvido. Resolver uma equação sempre foi um desafio desde os inícios dos conhecimentos matemáticos, como podemos apreciar nos papiros de Moscou (1890 a.C.), de Rhind (1650 a.C.) e outros.

2. EQUAÇÕES DE PRIMEIRO GRAU

O que conhecemos hoje como equações lineares apareceu no papiro Rhind (1650 a.C.), representando a incógnita com um "*íbis"* (ave tropical) picotando o chão, este papiro também chamado de papiro de Ahmes, contém 85 problemas; a base do sistema de numeração era decimal; é uma coleção de exemplos matemáticos copiados pelo escriba Ahmés, ele explica que esses escritos são uma cópia de outros mais antigos do tempo de Ne-ma'et-Re (Amenemhat III), o que dataria o trabalho da última metade do século XIX a.C. Nas palavras de abertura, o escriba expõe seu propósito:

> *"Mostrar cálculos precisos, conhecimento das coisas existentes, todos os mistérios e todos os segredos".*

Levantaram-se várias teorias sobre os procedimentos usados pelos egípcios, uma série de problemas são essencialmente equações com uma incógnita é ilustrada pelo Problema 24.

> "*Aha, seu total, e sua sétima parte, resulta 19*".

Aha é uma expressão para a quantidade incógnita, estreitamente relacionada com "*um monte*". A equação resultante é $x + \bar{7}x = 19$ (a expressão $\bar{7}$ representa em notação atual um sétimo).

Os matemáticos gregos preferiam estudar geometria, Diofante (250 d.C.), em sua obra "*A Arithmetica"*, apresenta uma coleção de 150 problemas de natureza algébrica cuja resolução foi feita com a utilização de equações. Seu trabalho constitui um exemplo da sobrevivência da antiga álgebra da Babilônia, em meio ao brilho da matemática grega.

3. EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU

Aproximadamente 400 a.C., reivindica-se que os babilônios foram os primeiros a resolver equações quadráticas. Porém, não tiveram nenhuma noção de "*simplificação*" ou de "*equação*", eles desenvolveram uma aproximação algorítmica para resolver problemas que hoje chamamos de "*equação quadrática*", entretanto todos estes problemas tiveram respostas que eram números positivos pelo fato de representar um comprimento [1].

Euclides (300 a.C.) desenvolveu um método de aproximação geométrica que, embora usados pelos matemáticos para resolver equações quadráticas, seu objetivo era encontrar um comprimento, o que em nossa notação é a raiz de uma equação quadrática.

Os matemáticos hindus estudaram os métodos babilônicos, entre eles Brahmagupta (598-670 d.C.), que descende em parte o método moderno, no qual se admite quantidades negativas. Ele também usou abreviações para a incógnita; normalmente era usada a letra incógnita de uma determinada cor.

Os árabes não souberam sobre os avanços dos hindus. Assim eles não tiveram, nem quantidades negativas, nem abreviaturas para as incógnitas. Entretanto, Al-Khwarizmi (790-850 d.C) deu uma classificação numérica a tipos diferentes de equações quadráticas, estes diferentes tipos de exemplos não tiveram como solução o valor zero, nem números negativos.

Esta classificação consistia de seis capítulos, cada um dedicado a um tipo diferente de equação, sendo que estas eram compostas de três tipos de quantidades, a saber: raízes, quadrados das raízes e números positivos, isto é x, x^2 e números positivos todos eles em uma combinação.

Al-Khwarizmi apresenta um método para resolver cada uma destas equações; basicamente a prova para cada exemplo foi geométrica e consistia em uma "*completação de quadrado*".

Abraham Barr Hiyya Ha-Nasi (1070-1130), conhecido pelo nome latim de *Savasorda*, é conhecido pelo seu livro "*Liber Embadorum*" publicado em 1145, que é o primeiro livro publicado na Europa com a solução completa da equação quadrática. Em notação moderna apresenta-se do seguinte modo:

Propriedade 3.1.

Sejam a, b, c números reais sendo $a \neq 0$, então a solução da equação: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$*, é dada pela expressão*:

$$\mathbf{x} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{3.1}$$

A demonstração desta propriedade encontra-se em [6].

A Fórmula (3.1) em nosso tempo é conhecida como "*fórmula de Bhaskara*" pois foi Bhaskara (1114 – 1185 d.C.) quem preencheu algumas lacunas na obra de Brahmagupta dando uma solução ao problema da divisão por zero. Bhaskara em seu tratado conhecido como *Livati* compilou problemas de Brahmagupta e outros, acrescentando observações próprias e novas. Para resolver equações quadráticas da forma $ax^2 + bx = c$ os indianos usavam o seguinte roteiro:

". . . multiplique ambos os membros da equação pelo número que vale quatro vezes o coeficiente do quadrado e some a eles um número igual ao quadrado do coeficiente original da incógnita. A solução desejada é a raiz quadrada disso"

Bhaskara já conhecia esta regra: o matemático Sridhara (870 - 930) trabalhou com ela, no *Livati,* Bhaskara não tratou de equações quadráticas determinadas, ele fez isso no *Bijaganita*.

4. EQUAÇÕES DE TERCEIRO GRAU

Uma fase nova da Matemática começou na Itália em torno de 1500 d.C.; os homens que aperfeiçoaram as equações cúbicas todos foram italianos, e constituíram um grupo de matemáticos tão interessante; a maioria deles eram autodidatas, trabalhavam em contabilidade, em problemas de juros compostos e de seguros, destacando-se por cima do simples cálculo pratico [2].

Em 1494, a primeira edição de "*Summa de Arithmetica, Geometrica, Proportioni et Proportionalita*", agora conhecida com o nome de *Suma*, foi escrito e publicada pelo padre Franciscano Luca Pacioli (1445-1517). Embora seja bastante difícil achar o nome deste autor no livro (somente aparece em letra minúscula o nome de Fra Luca na página de título), este livro é mais um compêndio da álgebra na época.

Pacioli não discute equações cúbicas, mas discute as equações quárticas; diz que:

"As equações, $x^4 = a + bx^2$ podem ser resolvidas por métodos quadráticos, mas $x^4 + ax^2 = b$ e $x^4 + a = bx^2$ são impossíveis no estado atual da ciência" (da época)

O primeiro matemático em aceitar o desafio de Pacioli em torno das equações cúbicas foi Scipione Dal Ferro (1465-1526); certamente deve ter-se relacionado com Pacioli que dissertou em Bolonha em 1501-2. Acredita-se que Dal Ferro sabia resolver equações cúbicas de modo algébrico e que manteve o segredo de sua descoberta por muito tempo. Porém em seus últimos dias confiou sua solução a um estudante, Antônio Fior, que a utilizou em uma disputa de álgebra com seu rival, Nícolo Fontana (1499 - 1557), chamado Tartaglia (ou *tartamudo* a causa de que padecia este defeito).

Fior desafiou Tartaglia a uma competição pública: as regras consistiam em que, cada uma daria ao outros 30 problemas com 40 ou 50 dias para os resolver, e o vencedor seria aquele que resolvesse a maioria ganhando assim um prêmio. Também foram oferecidos prêmios pequenos para cada problema. Tartaglia resolveu todos os problemas de Fior no espaço de 2 horas, os problemas que Fior tinha proposto eram da forma $y^3 + py + q = 0$. Fior acreditou que Tartaglia não poderia resolvê-los, porém, somente 8 dias antes que os problemas fossem coletados, Tartaglia tinha achado o método geral para todos os tipos de equações cúbicas [4].

Acredita-se que Dal Ferro ensinou Fior a resolver equações cúbicas da forma $x^3 + mx = n$, chegando a esta mediante a seguinte transformação:

Dada uma equação cúbica geral, $y^3 + by^2 + cy + d = 0$, ele considerava $y = x - \frac{b}{3}$ para obter logo uma equação da forma $x^3 + mx = n$.

Na época da disputa com Fior, Tartaglia havia ideado uma arma secreta própria para a solução geral para das equações do tipo $y^3 + py^2 + q = 0$; logo Tartaglia diz:

> *"Mobilizei todo o entusiasmo, à aplicação e arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui em 10 de fevereiro de 1535".*

Como novo e insigne calculador de Itália, Tartaglia pronto se encontrou com um rival mais forte, Girolamo Cardano (1501-1576). Cardano era um astrólogo que fazia previsões para os reis, um médico que visitava a seus enfermos e um escritor científico de cuja pluma emanaram horóscopos e muitos livros, foi também um jogador inveterado. O Santo Padre o aposentou solucionando assim seus problemas econômicos e Cardano, a base de adulações obteve de Tartaglia a solução da equação cúbica. Embora Cardano tivesse jurado manter em segredo a solução de Tartaglia, publicou-a alguns anos depois, em 1545, em "*Ars Magna*" (Grande Arte).

Entretanto, Cardano observou algo estranho quando aplicou a fórmula para certas equações cúbicas. Ao resolver $x^3 = 15x + 4$ obteve a expressão $\mathbf{x} = \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ deparando-se com o termo $\sqrt{-121}$. Cardano escreveu a Tartaglia em 4 de agosto de 1539 numa tentativa para clarear a dificuldade; porém Tartaglia não entendeu certamente. Em "*Ars Magna"*, Cardano apresenta um cálculo com "*números complexos"* para resolver um problema semelhante, mas ele realmente não entendeu seu próprio cálculo em seguida diz:

> *...este cálculo é tão sutil quanto inútil.*

Foram precisos 25 anos para que Rafael Bombelli (1526-1572) em seu artigo "*Álgebra*", publicado em 1572, mostrasse um conjunto formal de regras para manipular números complexos e acabasse com o impasse; Bombelli disse ter tido a "*idéia loca*" de operar com quantidades da forma $a + b\sqrt{-1}$. Sobre as mesmas regras que se usa com números reais mais a propriedade $(\sqrt{-1})^2 = -1$ para assim conseguir destravar a regra fazendo-a produzir o esperado valor de Cardano, x = 4. Com notação moderna apresenta-se a solução geral de uma equação cúbica.

Propriedade 4.1.

Sejam a_3, a_2, a_1 *e* a_0 *números reais, sendo* $a_0 \neq 0$*, então a solução da equação:* $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$*, é dada pela expressão* $x_1 = \alpha + \beta - \frac{b}{3}$, $x_2 = \alpha\omega + \beta\,\omega^2 - \frac{b}{3}$ *e* $x_3 = \alpha\omega^2 + \beta\omega - \frac{b}{3}$ *, onde* $\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q + \sqrt{q^3 + \frac{4p^2}{27}}\right)}$, $\beta = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(-q - \sqrt{q^3 + \frac{4p^2}{27}}\right)}$, $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ *e b, p, q são números determinados.*

A demonstração desta propriedade encontra-se em [6].

5. EQUAÇÕES DE QUARTO GRAU

Depois que Tartaglia mostrou a Cardano como resolver equações cúbicas, Cardano encorajou seu aluno Ludovico Ferrari (1522-1565) a examinar equações quárticas. Ferrari conseguiu resolver equações quárticas, com talvez, o mais elegante de todos os métodos que foram achados para resolver este tipo de problema. Cardano publicou todos os 20 casos de equações quárticas em "*Ars Magna*". Ferrari estuda a solução do caso da equação $x^4 + px^2 + qx + r = 0$, segundo o seguinte roteiro: Primeiro completa-se quadrado para obter: $x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx - r + p^2$; isto é:

$$(x^2 + p)^2 = px^2 - qx - r + p^2 \tag{5.1}$$

Por outro lado, para qualquer $y \in R$, temos: $(x^2 + p + y)^2 = (x^2 + p)^2 + (y^2 + 2x^2y + 2py)$, substituindo (5.1) temos que:

$$(x^2 + p + y)^2 = (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2) \tag{5.2}$$

Observe que a parte direita da igualdade (5.2) é uma equação quadrática em *x* e podemos escolher $y \in R$ de modo que seja um quadrado perfeito. Isto é feito fazendo o discriminante igual a zero. Neste caso obtemos a igualdade: $\Delta = (-q)^2 - 4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y_2) = 0$; esta última equação pode ser escrita na forma: $8y^3 - 20py^2 + (16p^2 - 8r)y - (q^2 - 4p^3 + 4pr) = 0$

Observe que temos uma equação cúbica de variável y. Pela *Propriedade 4.1* sabemos resolver equações cúbicas. Assim resolve-se para y. Com este valor de y na parte direita de (5.2), sendo um quadrado perfeito, o qual, calculando a raiz quadrada de ambos os lados, obtém-se uma equação quadrática em x. Em notação moderna apresenta-se a solução de uma equação de quarto grau.

Propriedade 5.1.

Sejam a_4, a_3, a_2, a_1, e a_0 números reais, sendo $a_0 \neq 0$, então a solução da equação: $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, é dada pela solução das equações $x^2 + \frac{p}{2}x + k = \pm (ax + b)$, onde $p = \frac{a_3}{a_4}$, $q = \frac{a_2}{a_4}$, $r = \frac{a_1}{a_4}$, $s = \frac{a_0}{a_4}$, $a^2 = \frac{p^4}{4} + 2k - q$; $2ab = kp - r$, $b^2 = k^2 - s$ e a, b, k são números a calcular.

A demonstração desta propriedade encontra-se em [6].

Anos depois da publicação de "*Ars Magna*" de Cardano, muitos matemáticos contribuíram à solução de equações cúbicas e quárticas. Viéte (1540-1603), T. Harriot (1560-1621), Tschirnhaus (1651-1708), Euler (1707-1783), Bezout (1730-1783) e Descartes (1596-1650), todos inventaram diversos métodos. Os métodos de Tschirnhaus foram estendidos pelo matemático sueco E. S. Bring no fim do século XVIII.

Thomas Harriot fez diversas contribuições, uma das mais elementares para nós, mostra ainda uma melhoria marcada na compreensão das raízes de uma equação. Ele observou que se x = b, x = c, x = d são soluções de uma equação cúbica, então podemos escrever tal equação cúbica sob a forma: $(x - b)(x - c)(x - d) = 0$. Harriot também apresentou um método elegante para resolver equações cúbicas.

Leibniz escreveu uma carta a Huyghens em março de 1673, nela fez muitas contribuições à compreensão de equações cúbicas, talvez o mais impressionante é uma verificação direta da fórmula de Cardano-Tartaglia. Leibniz fez reconstrução da equação cúbica e de suas três raízes. Ninguém antes de Leibniz parece ter pensado neste método direto de verificação, era a primeira verdadeira prova algébrica da fórmula, sendo que as provas anteriores eram estritamente de natureza geométrica.

6. EQUAÇÕES DE GRAU N ≥ 5

O matemático francês Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) em seu trabalho "*Reflexões sob a solução de equações algébricas",* publicado em

1770-1771, examina criticamente todas as soluções das equações de 2º, 3º e 4º graus conhecidas até sua época e demonstrou que seu êxito sempre se baseia em propriedades que não cumprem equações de graus superiores a 5º.

Desde o tempo de Del Ferro até este trabalho de Lagrange, mais de dois e meio séculos haviam passado e ninguém durante este grande intervalo havia duvidado a possibilidade em resolver equações de 5º grau e maiores por radicais, isto é, de achar fórmulas que envolvam somente operações de soma, subtração, multiplicação, divisão, exponenciação e raízes com expoentes inteiros positivos, que podem expressar a solução de uma equação em termos dos coeficientes [5].

Os matemáticos pensaram que seus fracassos deviam-se principalmente a sua própria incapacidade para encontrar uma solução. Lagrange diz em suas memórias:

> "*O problema de resolver equações por radicais cujo grau é mais que o quarto é um desses problemas que não foram resolvidos mesmo que nada prove a impossibilidade de resolvê-los*"

Conseqüentemente foi uma surpresa enorme para todos os matemáticos quando em 1824 veio a luz o trabalho de um jovem gênio nascido em Noruega de nome Nieils Henrik Abel (1802 - 1828), ainda quando estudante na cidade de Oslo, pensou ter encontrado a solução algébrica geral das equações de quinto grau, mas logo se corrigiu num famoso artigo de 1.824.

Nesse artigo Abel demonstrou a impossibilidade de estabelecer a solução geral da equação de 5º grau por meio de radicais, sepultando assim o problema que havia desconcertado aos matemáticos desde Bombei até Viete. Como consequência desse trabalho, Abel obteve uma bolsa de estudos que lhe permitiu viajar para Alemanha, Itália e a França, durante esse período escreveu vários artigos em áreas diversas da Matemática.

Atormentado a vida toda pela pobreza e sofrendo dos pulmões, Abel jamais conseguiu cargo de professor numa universidade, dois dias depois de morrer tragicamente em Froland, na Noruega, em 1.829, uma tardia carta lhe era enviada com um convite para trabalhar na Universidade de Berlim.

Quando indagado sobre a fórmula para avançar tão rapidamente para os primeiros escalões de sua matéria, Abel respondeu:

> "*Estudando os mestres e não seus discípulos*".

No campo das equações mostrava uma prova de que si considerarmos os coeficientes de uma equação simplesmente como letras, então não existe nenhuma expressão algébrica com tais coeficientes que seja a solução da equação correspondente.

O fato é que existem muitas formas especiais de equações de qualquer grau que podem ser resolvidas por radicais, e muitas delas são exatamente as que são importantes para resolver problemas concretos. Em resumo, depois da descoberta de Abel a situação era a seguinte: Embora a equação geral de grau maior do que quatro não se podia resolver por radicais, existe um número ilimitado de equações de grau maior do que quatro que podem ser resolvidas por radicais.

A pergunta era: Quais são as equações que podem ser resolvidas por radicais e quais não? Ou em outras palavras: quais condições deve cumprir uma equação para que possa ser resolvida por radicais?

Sobre Abel, certa dia assim se pronunciou Hermite (1822-1901):

> "*Ele deixou material para que os matemáticos se ocupem por quinhentos anos*".

A resposta a este problema que dava fim a todo este assunto das equações a deu o brilhante matemático francês Evariste Galois (1811-1833). A vida de Evariste Galois foi ainda mais curta e trágica do que a de Abel; nascido perto de Paris em 1811, sempre foi um jovem rebelde, reprovado nas provas da escola e que brigava constantemente com seus professores, não conseguia dedicar muito tempo de sua vida nem às matemáticas já que morreu à idade de 22 anos e nos dois últimos anos de sua vida viu-se em volta do torvelinho da política na época da revolução de 1830, sendo encarcerado por ameaçar publicamente a vida do rei, Luís Felipe.

Galois dominou os grandes textos de Matemática de seu tempo, percorreu artigos de Legendre, Jacobi e Abel para depois se dedicar à sua própria criação. Com dezessete anos de idade alcançou resultados de grande importância, mas as duas memórias que enviou à Academia de Ciências se extraviaram, aumentando sua frustração; em 1830 foi publicado um artigo de sua autoria sobre equações, com resultados visivelmente baseados numa teoria geral. Depois da cárcere, seguiu uma briga de saias o que constou em sua vida. Apesar do curto tempo de sua vida, Galois fez descobertas bastantes avançadas para seu tempo em muitos ramos das matemáticas e, em particular, deu a solução ao problema que ficava pendente na teoria das equações algébricas em um pequeno manuscrito titulado: "*Memória sobre as condições para resolver as equações por radicais*", com trinta e uma páginas quase indecifráveis escritas com pressa na noite antes do duelo em que foi morto.

Várias das memórias e manuscritos de Galois, encontrados em seus papeis após de sua morte, foram publicados por Joseph Liuville (1809 - 1882) no *Jornal de Mathématique; p*orém, uma avaliação completa das realizações de Galois só aconteceria em 1870, quando Camille Jordan (1849 - 1925) as expôs em seu livro "*Traité des Substitutions*" e, mais tarde ainda, quando Felix Klein (1849 - 1925) e Saphus Lie (1842 - 1899) brilhantemente fizeram uso delas na geometria.

O estudo dos grupos começou essencialmente com Galois. Foi ele o primeiro que usou, em 1830, a palavra "*grupo*" em seu sentido técnico. Para a solução pratica das equações, o resultado de todo este trabalho foi o seguinte:

Fica claro que uma fórmula geral para as equações está muito longe de existir e ainda nos casos particulares em que exista, era de pouca utilidade prática por causa das operações bastante complicadas que se tenham a fazer. Em vista do anterior, os matemáticos desde muito tempo começaram a trabalhar em três direções completamente diferentes, que são:

- no problema da existência de raízes (soluções);
- no problema de saber ao respeito das soluções, somente trabalhando com seus coeficientes;
- no cálculo aproximado das raízes ou soluções de uma equação.

O "*Teorema Fundamental da Álgebra*", em sua forma geral, diz:

> "*Seja f(x) uma função polinômica de coeficientes complexos, e de grau* $n \in \mathbf{N}$. *Então, f(x) = 0 tem pelo menos um e no máximo n raízes e a soma das multiplicidades das raízes é exatamente n*".

Possivelmente seja estranho um pouco que exista preocupação neste sentido, porém o que se passa é que existem equações não-algébricas que não têm nenhuma solução.

A primeira demonstração foi dada por D'Alembert, não obstante um ponto em sua demonstração estivesse errado, e que ele assumia como verdadeira um resultado do Cálculo Diferencial que não havia sido demonstrado e que só se demonstrou um século depois de D'Alembert escrevê-la.

Os exigentes e rigorosos matemáticos não permitiram que sucedessem coisas como a anterior, assim que se considera como o primeiro a demonstrar este teorema tenha sido Johann Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) que assombrava a seus colegas; escreveu não uma, mais quatro demonstrações diferentes deste teorema, em que nenhuma delas é suficientemente elementar.

Paolo Ruffini (1765-1822), matemático italiano, publicou sua famosa regra em 1804. Essencialmente coincide com a publicada em 1819 pelo inglês W.G. Horner. Antecedentes desta regra foram encontrados em trabalhos de matemáticos chineses no século XIII.

7. CONCLUSÃO

Com um pouco de tristeza poderia dizer que alguns professores são culpados pelo afastamento de seus alunos do estudo da matemática. Quem, por ocaso, não assistiu às aulas de algum professor do que lhe ficou desagradáveis lembranças? E algum de nós lembra com grande afeição daquele professor que nos abriu as portas ao estudo dos números, equações, geometria.

Consideramos o estudo da solução de equações desde um ponto de vista histórico, como sendo uma ferramenta motivadora para a construção do conhecimento matemático, assim para despertar a atenção dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] EVES Howard. *Introdução à História da Matemática*. 2ª. ed. UNICAMP, pp.845.

[2] GARBI G. G. *O Romance Das Equações Algébricas*. Makron Books 1997.

[3] GARDING Lars. *Encontro com a Matemática*. 2ª ed. Brasília, UnB 1997, pp. 333.

[4] O'CONNOR J.J.; ROBERTSON E. F. *A history of set theory*. http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk 01/02/1999

[5] OTTO Bekken. *Una Historia Breve del Álgebra*. Sociedade Matemática Peruana. Lima – Peru 1.983.

[6] PINEDO, Christian J. Q. *Equações Quadráticas, Cúbicas e Quárticas*. VII Erematsul. CEFET-PR, Uned-PB, Paraná, outubro 2001. pp. 56-67.

[7] PINEDO, Christian J. Q. *História das Equações*. VII Erematsul. CEFET-PR, Uned-PB, Paraná, outubro 2001. pp. 56-67. pp 5-15.

[8] PINEDO, Christian J. Q. *Fundamentos da Matemática II.* Notas de Aula nº. 13, GEPEM, CEFET-PR Uned-PB, 2002.