

# Dedução via geometria analítica das equações da lei dos cossenos da trigonometria esférica

## RESUMO

**Carlos Henrique Oliveira da Rocha**

[carlos.henrique.oliveira.rocha@gmail.com](mailto:carlos.henrique.oliveira.rocha@gmail.com)

[orcid.org/0000-0001-7121-6536](https://orcid.org/0000-0001-7121-6536)

Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

A Trigonometria Esférica é uma importante disciplina para a Geomática: dela advém diversos conceitos para a resolução dos problemas direto e indireto da Geodésia; é imprescindível para a resolução do Triângulo de Posição, da Astronomia e; é utilizada para a dedução da lei de formação de diversas Projeções Cartográficas, notadamente da Projeção Equidistante Azimutal, sendo a superfície de referência uma esfera. As equações fundamentais para a resolução de Triângulos Esféricos são aquelas que compõem a chamada Lei dos Cossenos. Deste modo, o presente trabalho pretende apresentar a dedução da Lei dos Cossenos, utilizando para isso da Geometria Analítica, tendo por pressuposto ser uma solução geral. Como objetivo secundário, apresenta conceitos da Geometria Analítica, pois essa área da Matemática é também muito importante para a Geomática.

**PALAVRAS-CHAVE:** Trigonometria Esférica. Geometria Analítica. Geometria da Esfera.

## INTRODUÇÃO

A Trigonometria Esférica é uma importante disciplina para a Geomática, pois dela advém diversos conceitos para a resolução dos problemas direto e indireto da Geodésia (COUTINHO, 2015, p.8); é imprescindível para a resolução do Triângulo de Posição da Astronomia (COUTINHO, 2015, p.8) e; é utilizada para a dedução da lei da formação de diversas Projeções Cartográficas, por exemplo, da Projeção Equidistante Azimutal quando a superfície de referência é uma esfera (BAKKER, 1962, p.30).

Trigonometria é o estudo do Triângulo, este é o sujeito, em sentido lógico, daquela.

Este estudo propõe a seguinte definição lógica de Triângulo: figura geométrica fechada delimitada por três segmentos de geodésicas. Por exemplo, o triângulo esférico é formado por três segmentos de círculos máximos, que são geodésicas da esfera.

Estabelecendo como critério a superfície na qual o triângulo subjaz, pode-se dividir, em termos lógicos (JOSEPH, 2008, p.113), o gênero Trigonometria em diversas espécies, entretanto as mais usuais são (Figura 1):

Figura 1 – Gênero: Trigonometria. Espécies: Plana, Esférica e Outras



Fonte: Autoria Própria (2017).

Há diversas superfícies em que triângulos podem estar e cada uma destas superfícies irá dar origem a uma espécie de Trigonometria. Para o presente estudo, interessa a Trigonometria Esférica, ou seja, aquela que tem por sujeito os triângulos jacentes em uma superfície esférica.

A revisão conceitual apresentada neste trabalho se propõe a mostrar a dedução da Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica via Geometria Analítica. Para isso, há duas atividades: elencar os conceitos necessários para entender a demonstração; demonstrar a referida lei. A primeira está dividida em duas partes: exposição de alguns conceitos da Geometria Sólida; explicação do que é e de quais são os elementos de um Triângulo Esférico. A segunda atividade também está dividida em duas partes: primeira, demonstração da lei via Geometria Clássica; segunda, demonstração via Geometria Analítica, sendo apresentadas algumas noções básicas da Geometria Analítica necessárias à dedução.

É importante mostrar a dedução da Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica via Geometria Analítica, pois com isso alguns conceitos aprendidos anteriormente são recordados, além de se ensinar a pensar metodicamente na solução de um problema específico.

## GEOMETRIA SÓLIDA

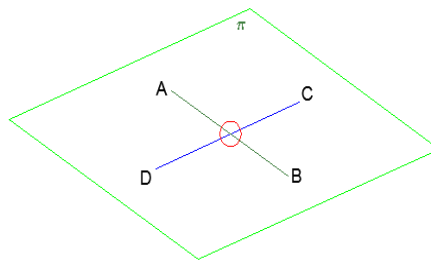
Para ser empreendida a dedução proposta é importante lembrar ou conhecer alguns conceitos de Geometria Sólida.

### NOÇÕES BÁSICAS

As retas AB e CD, da Figura 2, não paralelas, interceptam-se, determinando quatro ângulos planos.

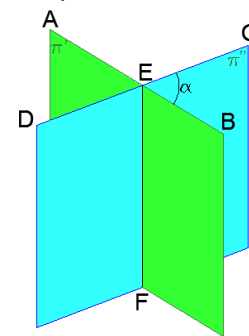
Se for estabelecido um plano  $\pi'$  perpendicular a  $\pi$ , contendo a reta AB e se traçar um plano  $\pi''$  perpendicular a  $\pi$ , contendo a reta CD, tais planos não serão paralelos e se interceptarão em uma reta, a reta EF, conforme a Figura 3; tal linha é denominada de aresta. Os dois planos determinam quatro ângulos diedros.

Figura 2 – Ângulos entre duas retas



Fonte: Autoria Própria (2017).

Figura 3 – Ângulo diedro ( $\alpha$ ) entre os planos  $\pi'$  e  $\pi''$



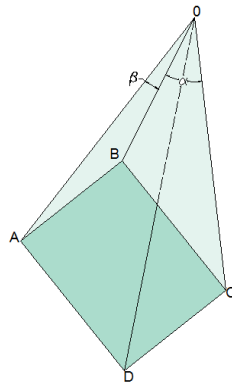
Fonte: Autoria Própria (2017).

Por seu turno, ângulos diedros, por exemplo, o ângulo  $\alpha$  da Figura 3, são ângulos entre dois planos. Os ângulos diedros são medidos pelos seus respectivos ângulos planos. Os planos  $\pi'$  e  $\pi''$  são as faces do diedro.

Quando três ou mais planos se encontram em um ponto comum, eles formam um ângulo sólido naquele ponto. O ponto no qual os planos se interceptam é o vértice do ângulo sólido, as linhas em que os planos dois a dois se interceptam são chamadas arestas, as porções dos planos entre as arestas são chamadas faces. Na Figura 4, um ângulo sólido é formado no vértice O; OA, OB, OC e OD são as arestas; os planos AOB, BOC, DOC etc. são as faces; BOC ( $\alpha$ ), AOB ( $\beta$ ) são exemplos de ângulos da face.

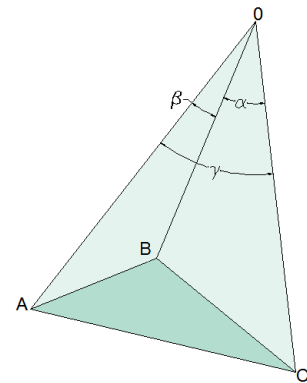
Um ângulo sólido com três faces é denominado ângulo triedro. O ângulo sólido formado no vértice O da Figura 5 é um ângulo triedro. O ângulo triedro é de particular importância para a Trigonometria Esférica, pois se relaciona diretamente com o Triângulo Esférico.

Figura 4 – Ângulo sólido



Fonte: Autoria Própria (2017).

Figura 5 – Ângulo Triedro



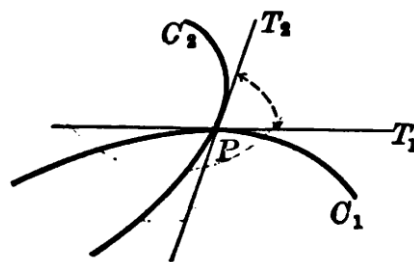
Fonte: Autoria Própria (2017).

### ÂNGULO ESFÉRICO

O ângulo entre duas curvas que se encontram em um ponto é o ângulo formado pelas duas tangentes às curvas naquele ponto. Deste modo, na Figura 6, o ângulo entre as curvas  $C_1$  e  $C_2$  no ponto  $P$  é o ângulo  $T_1PT_2$  entre as tangentes em  $C_1$  e  $C_2$ . (MURRAY, 1908, p.8).

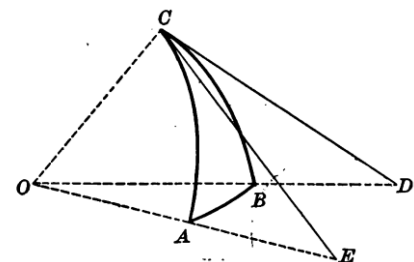
O ângulo formado pela interseção de dois arcos de círculos máximos é chamado ângulo esférico. Assim, o ângulo formado pelos arcos  $CA$  e  $CB$  (Figura 7) é um ângulo esférico. Contudo, este ângulo é o ângulo  $ECD$  entre as tangentes  $CE$  e  $CD$ , mas  $ECD$  é o ângulo plano do ângulo diedro entre os planos  $COA$  e  $COB$  os quais são os planos que contêm os arcos  $CA$  e  $CB$ , respectivamente. Pode-se afirmar, portanto, que o ângulo esférico é medido pelo ângulo diedro entre os planos formadores do ângulo plano e, portanto, os ângulos esféricos são medidos pelo respectivo ângulo plano.

Figura 6 – Ângulo entre duas curvas



Fonte: Murray (1908, p. 8).

Figura 7 – Ângulo Esférico



Fonte: Murray (1908, p.8).

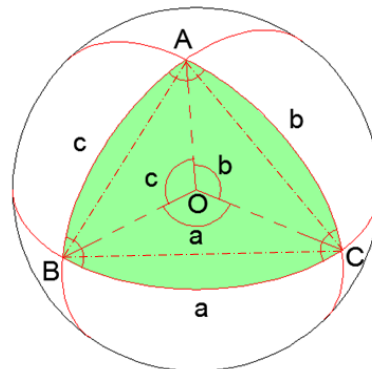
### LADO ESFÉRICO

Os arcos de círculo máximos que formam o ângulo esférico são chamados lados esféricos e seu ponto de interseção é o vértice do ângulo esférico.

Na Figura 8, é formado um ângulo triedro no centro O da Esfera. O ângulo esférico de vértice em A tem por lados os arcos AC (lado b) e AB (lado c) e assim sucessivamente para os vértices B e C.

O lado a é medido angularmente pelo ângulo entre as arestas OB e OC; o lado b, pelo ângulo entre as arestas OA e OC e; o lado c, pelo ângulo entre as arestas OA e OB. Os ângulos a, b e c são ângulos de face do triedro. Tais conceitos serão utilizados quando da dedução proposta.

Figura 8 – Lados Esféricos



Fonte: Autoria Própria (2017).

## TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Triângulo Esférico é a porção de uma esfera, limitada por três arcos de círculos máximos, que se interceptam dois a dois. Por convenção, os lados e os ângulos de um Triângulo Esférico são menores que  $180^\circ$ , sendo, então, denominados Triângulos Esféricos Eulerianos (COUTINHO, 2015, p.45). Na Figura 8, tem-se o Triângulo Esférico ABC.

Os lados do Triângulo Esférico são os três arcos de círculos máximos que unem os três pontos determinados da esfera, pelas interseções dos círculos máximos, dois a dois. Na Figura 8, os lados são  $\widehat{AC}$  (b),  $\widehat{BC}$  (a) e  $\widehat{AB}$  (c).

Os ângulos do Triângulo Esférico são os ângulos esféricos formados nos vértices, A, B e C, do Triângulo. Os ângulos são chamados por vezes pelo correspondente vértice, por exemplo,  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ .

Os Triângulos Esféricos possuem 6 (seis) elementos, a saber, três ângulos internos (A, B e C) e três lados (a, b e c), ver Figura 8.

Resolver um Triângulo Esférico significa determinar três de seus elementos, sendo conhecidos os outros três.

O conjunto de Equações fundamental para a resolução de um Triângulo Esférico é o que se denomina Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica. (MURRAY, 1908, p. 46), cuja dedução via Geometria Analítica é o objetivo deste trabalho.

## DEDUÇÃO DA LEI DOS COSSENOS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Neste item realizar-se-á a dedução da Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica por duas vias, quais sejam, via Geometria Clássica, bastante encontrada na literatura especializada e via Geometria Analítica, objetivo do presente trabalho, encontrada em algumas publicações tais como: Banerjee (2004, p.379) e Coutinho (2015, p.55). Contudo utilizando a restrição de o círculo ser unitário. O que não será feito nesta publicação, sendo, portanto, mais geral.

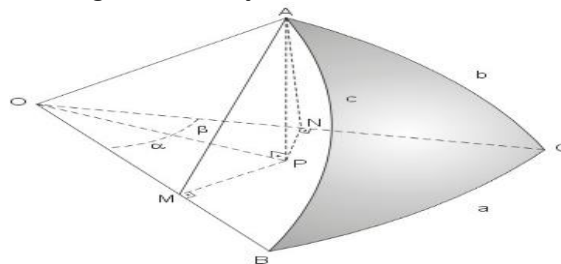
Assim, este item está dividido em duas partes: na primeira far-se-á uma revisão da dedução via Geometria Clássica e; na segunda, a dedução via Geometria Analítica.

### DEDUÇÃO VIA GEOMETRIA CLÁSSICA

A dedução via Geometria Clássica, a ser apresentada neste item, pode ser encontrada, com algumas particularidades, em Todhunter e Leathem (1914, p.17ss.), Coutinho (2015, p.52ss.), Santiago (2016) e Wells (1888, p.158ss.)

Considera-se o Triângulo Esférico ABC, em cinza na Figura 9. Na mesma figura, está representado o centro da esfera (ponto O). O lado a, oposto ao ângulo do vértice A, do triângulo é medido pelo ângulo entre os segmentos de reta OC e OB, e assim por diante. O ângulo no vértice A será chamado de A e é medido pelo ângulo diedro entre os planos OAB e OAC.

Figura 9 – Dedução da Lei dos Cossenos



Fonte: Santiago (2016).

Trace-se uma perpendicular ao plano OBC, passante pelo vértice em A do triângulo da Figura 9. Essa reta é representada pelo segmento AP da Figura. A partir do ponto P, tomem-se agora duas retas, PM e PN, perpendiculares, respectivamente, aos segmentos OB e OC. Ao serem tomada estas retas, formam-se na Figura 9, os seguintes triângulos retângulos planos: APN, APM, ONP, OMP, OPA, ONA e OMA. O ângulo reto de tais triângulos está no vértice simbolizado pela letra do meio do nome do triângulo. Por exemplo, no triângulo APN, o ângulo reto está no vértice em P.

Considerando o triângulo ONA, o ângulo em O mede a separação angular entre o cateto ON e a hipotenusa OA, medindo angularmente, portanto, o lado b do Triângulo Esférico. Deste modo:

$$\cos b = \frac{ON}{OA} \quad (1)$$

$$\operatorname{sen} b = \frac{AN}{OA} \quad (2)$$

Considerando o triângulo OMA, cuja hipotenusa é OA (o raio da esfera), ter-se-á:

$$\cos c = \frac{OM}{OA} \quad (3)$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{AM}{OA} \quad (4)$$

Sejam agora os triângulos OMP e ONP, cuja hipotenusa é OP. E sejam novamente os ângulos com vértice em O, representados pelas letras gregas  $\alpha$  e  $\beta$ . Pode-se escrever:

$$\cos \alpha = \frac{OM}{OP} \quad (5)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{MP}{OP} \quad (6)$$

$$\cos \beta = \frac{ON}{OP} \quad (7)$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{NP}{OP} \quad (8)$$

Rearranjando a Equação 3, ter-se-á:

$$OM = OA \cos c \quad (9)$$

Rearranjando a Equação 5:

$$OM = OP \cos \alpha \quad (10)$$

Igualando a Equação 9 e a Equação 10 e lembrando que  $\alpha + \beta = a$ , então:

$$OA \cos c = OP \cos (a - \beta) \quad (11)$$

Expandindo a diferença  $(a - \beta)$ :

$$OA \cos c = OP (\cos a \cos \beta + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} \beta) \quad (12)$$

Substituindo na Equação 12, os valores de  $\cos \beta$  e  $\sin \beta$ , dados pelas Equações 7 e 8:

$$OA \cos c = OP \left( \cos a \frac{ON}{OP} + \sin a \frac{NP}{OP} \right). \quad (13)$$

Simplificando a Equação 13,

$$OA \cos c = ON \cos a + NP \sin a. \quad (14)$$

Da Equação 1, sabe-se que

$$ON = OA \cos b \quad (15)$$

Substituindo a Equação 15 na Equação 14

$$OA \cos c = OA \cos a \cos b + NP \sin a \quad (16)$$

Tem-se que buscar uma expressão para NP.

Usando o triângulo APN:

$$NP = AN \cos C. \quad (17)$$

A expressão acima faz uso do fato de que o ângulo do triângulo APN com vértice em N é também o ângulo entre os planos OAC e OBC, sendo, portanto, igual ao ângulo C do Triângulo Esférico.

Mas, da Equação 2, sabe-se que:

$$AN = OA \sin b. \quad (18)$$

Substituindo a Equação 18 na Equação 17, obtém-se:

$$NP = OA \sin b \cos C. \quad (19)$$

Agora, substituindo a Equação 19 na Equação 16, chega-se a:

$$OA \cos c = OA \cos a \cos b + OA \sin b \sin a \cos C. \quad (20)$$

Simplificando a Equação 20, chega-se finalmente a:



$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a \cos C, \quad (21)$$

Denominada Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica ou Fórmula dos Quatro Elementos, em que os três lados do Triângulo Esférico são associados a um de seus ângulos.

Podem ser escritas as outras duas Equações realizando a permuta das letras:

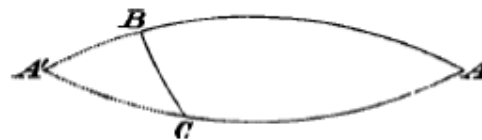
$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} c \operatorname{sen} a \cos B \quad (22)$$

$$\cos a = \cos c \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A. \quad (23)$$

Para a dedução apresentada, foi suposto implicitamente que os lados são menores que um reto, pode-se então generalizar-se para os casos em que são maiores que um reto.

Suponha-se um Triângulo ABC, Figura 10, no qual os lados que formam o ângulo A são maiores que  $90^\circ$ . O prolongamento dos lados AB e AC se encontrarão no ponto A', formando, assim, um fuso esférico. Ter-se-á, portanto, dois Triângulos Esféricos, ABC e A'BC, sendo o lado a (BC) comum aos dois Triângulos. O lado A'B será chamado de  $c'$  e o lado A'C será chamado de  $b'$ .

Figura 10 – Fuso esférico contendo dois Triângulos Esféricos



Fonte: Todhunter e Leathem (1914, p.19).

Para o Triângulo A'BC vale a Equação 23, portanto:

$$\cos a = \cos c' \cos b' + \operatorname{sen} b' \operatorname{sen} c' \cos A'. \quad (24)$$

Mas  $c' = 180^\circ - c$ ,  $b' = 180^\circ - b$  e  $A' = A$ , pois é o ângulo do fuso. Logo:

$$\cos a = \cos c \cos b + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \quad (25)$$

A Equação 25 é igual à Equação 23.

## VIA GEOMETRIA ANALÍTICA

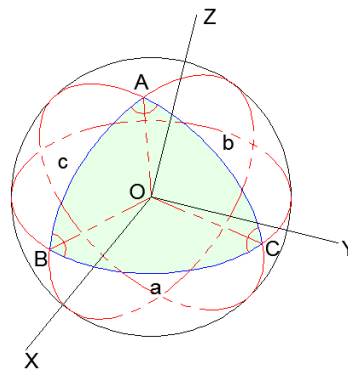
Neste item far-se-á a dedução da Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica utilizando conceitos da Geometria Analítica. As duas inovações propostas são: não restringir a dedução a um círculo de raio unitário e; utilizar somente os

conceitos da Geometria Analítica de usual aprendizagem nos cursos de ensino médio e de graduação. A última inovação será explicada no momento oportuno, durante a dedução das Equações.

Para a dedução proposta, serão feitas duas coisas: a primeira é relembrar algumas noções básicas; a segunda, fazer a dedução propriamente.

Tome-se por base a Figura 11.

Figura 11 – Medida dos ângulos e lados de um Triângulo Esférico



Fonte: Autoria Própria (2017).

Os planos seccionadores da esfera geradores dos círculos máximos, cujos arcos são os lados do Triângulo Esférico ABC, interceptam-se no centro da Esfera, determinando um triedro com vértice em O. As linhas OA, OB e OC são as arestas, podendo ser tratadas como vetores, respectivamente,  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$ .

Seja XYZ, conforme visto na Figura 11, um sistema cartesiano triortogonal arbitrário, com origem no centro O da Esfera, pode-se definir as coordenadas dos vetores como:  $\vec{OA} = [X_A \ Y_A \ Z_A]^t$ ,  $\vec{OB} = [X_B \ Y_B \ Z_B]^t$  e  $\vec{OC} = [X_C \ Y_C \ Z_C]^t$ .

Os planos formados pelos vetores tomados dois a dois são as faces do triedro e os ângulos a, b e c são os ângulos de face do triedro.

Conforme mencionado, os ângulos de face medem angularmente os lados do Triângulo Esférico. Assim, o lado a é medido pelo ângulo entre os vetores  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$ ; o lado b é o ângulo entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$  e; o lado c é medido pelo ângulo entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ . Ora, os ângulos entre vetores podem ser calculados pelo produto escalar entre os vetores (LIMA, 2004, p.123ss). Logo, os lados podem ser calculados através do produto escalar entre os vetores, conforme as Equações 26, 27 e 28:

$$\cos a = \frac{\vec{OB} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\|} \quad (26)$$

$$\cos b = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\|} \quad (27)$$

$$\cos c = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} \quad (28)$$

Em que o símbolo  $|||$  significa norma de um vetor e o símbolo  $\cdot$  significa produto escalar.

Calculando o produto escalar no numerador do lado direito das Equações 26, 27 e 28:

$$\cos a = \frac{X_B X_C + Y_B Y_C + Z_B Z_C}{\|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\|} \quad (29)$$

$$\cos b = \frac{X_A X_C + Y_A Y_C + Z_A Z_C}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\|} \quad (30)$$

$$\cos c = \frac{X_A X_B + Y_A Y_B + Z_A Z_B}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\|} \quad (31)$$

Por seu turno, os ângulos esféricos são ângulos entre arcos de círculo máximo, medindo-se através do ângulo diedro entre os planos que contém cada um dos arcos de círculo máximo.

Por exemplo, o ângulo de vértice em A é o ângulo diedro entre o plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  e o plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$ .

Da Geometria Analítica, sabe-se que o ângulo entre dois planos pode ser calculado pelo ângulo entre os vetores normais a cada um destes planos. O vetor normal ao plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  é calculado pelo produto vetorial  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  e o vetor normal ao plano que contém os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$  é dado pelo produto vetorial  $\vec{OA} \times \vec{OC}$ . Deste modo, o ângulo entre os dois planos pode ser calculado pela Equação 32.

$$\cos A = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA} \times \vec{OB}\| \|\vec{OA} \times \vec{OC}\|} \quad (32)$$

Em que  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  é o produto vetorial entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ , sendo, portanto, o vetor normal ao plano que contém tais vetores;  $\vec{OA} \times \vec{OC}$  é o produto vetorial entre os vetores  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$ , sendo, portanto, o vetor normal ao plano que contém tais vetores. O primeiro plano contém o arco de círculo máximo AB e o segundo, o arco AC, estes dois arcos são os lados do ângulo esférico A.

As equações para os demais ângulos são obtidas rearranjando as letras:

$$\cos B = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA} \times \vec{OB}\| \|\vec{OB} \times \vec{OC}\|} \quad (33)$$

$$\cos C = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OC}) \cdot (\vec{OB} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA} \times \vec{OC}\| \|\vec{OB} \times \vec{OC}\|} \quad (34)$$

Bem, de posse destes conceitos matemáticos, pode-se proceder à dedução propriamente dita.

A norma do vetor  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  é dada pela Equação 35:

$$\|\vec{OA} \times \vec{OB}\| = \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c. \quad (35)$$

A norma de  $\vec{OA} \times \vec{OC}$  é dada pela Equação 36:

$$\|\vec{OA} \times \vec{OC}\| = \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin c. \quad (36)$$

Substituindo as Equações 35 e 36 na Equação 32:

$$\cos A = \frac{(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b}. \quad (37)$$

Resta obter o numerador da Equação 37. Começa-se por obter os produtos vetoriais.

O produto vetorial  $\vec{OA} \times \vec{OB}$  é calculado por:

$$\vec{OA} \times \vec{OB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_A & Y_A & Z_A \\ X_B & Y_B & Z_B \end{vmatrix}. \quad (38)$$

O resultado será o vetor normal ao plano que contém  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$ , sendo chamado de  $\vec{u}$ . Calculando o determinante:

$$\vec{u} = [Y_A Z_B - Z_A Y_B \quad Z_A X_B - X_A Z_B \quad X_A Y_B - Y_A X_B]^t. \quad (39)$$

Em que  $Y_A Z_B - Z_A Y_B$  é a componente do vetor normal na direção X, a qual será chamada de  $u_x$ ;  $Z_A X_B - X_A Z_B$  é a componente do vetor normal na direção Y, a qual será chamada de  $u_y$ , e;  $X_A Y_B - Y_A X_B$  é a componente do vetor normal na direção Z, a qual será chamada de  $u_z$ .

O produto vetorial  $\vec{OA} \times \vec{OC}$  é calculado por:

$$\vec{OA} \times \vec{OC} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ X_A & Y_A & Z_A \\ X_C & Y_C & Z_C \end{bmatrix}. \quad (40)$$

O resultado será o vetor normal ao plano que contém  $\vec{OA}$  e  $\vec{OC}$ , recebendo o nome de  $\vec{v}$ . Calculando o determinante:

$$\vec{v} = [Y_A Z_C - Z_A Y_C \quad Z_A X_C - X_A Z_C \quad X_A Y_C - Y_A X_C]^t. \quad (41)$$

Em que  $Y_A Z_C - Z_A Y_C$  é a componente do vetor normal na direção X, a qual será chamada de  $v_x$ ;  $Z_A X_C - X_A Z_C$  é a componente do vetor normal na direção Y, a qual será chamada de  $v_y$ , e;  $X_A Y_C - Y_A X_C$  é a componente do vetor normal na direção Z, a qual será chamada de  $v_z$ .

Conforme a Equação 32, é necessário calcular o produto escalar entre os vetores representados pelas Equações 39 e 41. O produto escalar será a soma dos produtos entre as componentes em X, Y e Z, respectivamente, de cada uma das equações. O produto escalar entre  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  é dado pela Equação 42:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \quad (42)$$

Para tornar mais clara a dedução, o produto de cada componente foi separado. Primeiro, a componente em X:

$$u_x v_x = (Y_A Z_B - Z_A Y_B)(Y_A Z_C - Z_A Y_C). \quad (43)$$

Resolvendo a Equação 43, tem-se:

$$u_x v_x = Y_A^2 Z_B Z_C - Y_A Z_B Z_A Y_C - Z_A Y_B Y_A Z_C + Z_A^2 Y_B Y_C. \quad (44)$$

A componente em Y:

$$u_y v_y = (Z_A X_B - X_A Z_B)(Z_A X_C - X_A Z_C). \quad (45)$$

Resolvendo a Equação 45, tem-se:

$$u_y v_y = Z_A^2 X_B Z_C - Z_A X_B X_A Z_C - X_A Z_B Z_A X_C + X_A^2 Z_B Z_C. \quad (46)$$

Finalmente, a componente em Z:

$$u_z v_z = (X_A Y_B - Y_A X_B)(X_A Y_C - Y_A X_C). \quad (47)$$

Resolvendo a Equação 47, tem-se:

$$u_z v_z = X_A^2 Y_B Y_C - X_A Y_B Y_A X_C - Y_A X_B X_A Y_C + Y_A^2 X_B X_C. \quad (48)$$

Visando facilitar a compreensão dos movimentos algébricos a serem dados, as parcelas estão agrupadas na Tabela 1, contudo em linhas diferentes.

Tabela 1 – Produto Escalar referente à Equação 32.

Parcelas	Numeração
$u_x v_x = Y_A^2 Z_B Z_C - Y_A Z_B Z_A Y_C - Z_A Y_B Y_A Z_C + Z_A^2 Y_B Y_C$	(44)
$u_y v_y = Z_A^2 X_B Z_C - Z_A X_B X_A Z_C - X_A Z_B Z_A X_C + X_A^2 Z_B Z_C$	(46)
$u_z v_z = X_A^2 Y_B Y_C - X_A Y_B Y_A X_C - Y_A X_B X_A Y_C + Y_A^2 X_B X_C$	(48)

Fonte: Autoria Própria (2017).

Coloca-se na soma das três equações o termo  $Y_A^2$  em evidência, o resultado é chamado de  $a$ :

$$a = Y_A^2 (Z_B Z_C + X_B X_C). \quad (49)$$

O termo  $Y_A^2 Z_B Z_C$  está na Equação 44, primeira linha da Tabela 1; o termo  $Y_A^2 X_B X_C$  está na Equação 48, terceira linha da Tabela 1.

Rearranjando a Equação 29, tem-se:

$$\|\overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| \cos a - Y_B Y_C = X_B X_C + Z_B Z_C \quad (50)$$

Substituindo a Equação 50 na Equação 49, tem-se:

$$a = Y_A^2 (\|\overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| \cos a - Y_B Y_C) \quad (51)$$

Os mesmos passos seguidos para  $Y_A^2$ , podem ser feitos para  $Z_A^2$  e  $X_A^2$ , tem-se, então:

$$b = Z_A^2 (\|\overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| \cos a - Z_B Z_C) \quad (52)$$

$$c = X_A^2 (\|\overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OC}\| \cos a - X_B X_C) \quad (53)$$

Nos termos constantes na Tabela 1, colocando o termo  $Z_A Z_B$  em evidência, e chamando o resultado de  $d$ :

$$d = Z_A Z_B (-Y_A Y_C - X_A X_C) \quad (54)$$

Rearranjando a Equação 30:

$$\|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b - Z_A Z_C = X_A X_C + Y_A Y_C. \quad (55)$$

Substituindo a Equação 55 na Equação 54, tem-se:

$$d = Z_A Z_B (Z_A Z_C - \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b) \quad (56)$$

Pode-se fazer o mesmo para os termos  $Y_A Y_B$  e  $X_A X_B$ , o que dá:

$$e = Y_A Y_B (Y_A Y_C - \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b) \quad (57)$$

$$f = X_A X_B (X_A X_C - \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b) \quad (58)$$

Expandindo as Equações 56, 57 e 58 e somando-as:

$$\begin{aligned} d + e + f = & Z_A^2 Z_B Z_C - Z_A Z_B \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b + Y_A^2 Y_B Y_C \\ & - Y_A Y_B \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b + X_A^2 X_B X_C \\ & - X_A X_B \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b. \end{aligned} \quad (59)$$

Colocando, na Equação 59,  $\|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b$  em evidência e rearranjando os termos:

$$\begin{aligned} d + e + f = & X_A^2 X_B X_C + Y_A^2 Y_B Y_C + Z_A^2 Z_B Z_C \\ & - (Z_A Z_B + Y_A Y_B + X_A X_B) \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos b \end{aligned} \quad (60)$$

Mas rearranjando a Equação 31, tem-se:

$$X_A X_B + Y_A Y_B + Z_A Z_B = \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \cos c \quad (61)$$

Substituindo a Equação 61 na Equação 60, tem-se:

$$\begin{aligned} d + e + f = & X_A^2 X_B X_C + Y_A^2 Y_B Y_C + Z_A^2 Z_B Z_C \\ & - \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos c \cos b \end{aligned} \quad (62)$$

O produto escalar será agora dado pela soma das Equações 51, 52, 53 e 62.

Tabela 2 – Parcelas do Produto Escalar.

Parcelas	Numeração
$a = Y_A^2 (\ \vec{OB}\  \ \vec{OC}\  \cos a - Y_B Y_C)$	(51)
$b = Z_A^2 (\ \vec{OB}\  \ \vec{OC}\  \cos a - Z_B Z_C)$	(52)
$c = X_A^2 (\ \vec{OB}\  \ \vec{OC}\  \cos a - X_B X_C)$	(53)
$d + e + f = X_A^2 X_B X_C + Y_A^2 Y_B Y_C + Z_A^2 Z_B Z_C - \ \vec{OA}\  \ \vec{OB}\  \ \vec{OA}\  \ \vec{OC}\  \cos c \cos b$	(62)

Fonte: Autoria Própria (2017).

Na soma destas quatro parcelas, coloca-se  $X_A^2$  em evidência:

$$g = X_A^2 (\|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a - X_B X_C + X_B X_C), \quad (63)$$

Logo:

$$g = X_A^2 \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a. \quad (64)$$

O mesmo pode ser realizado para  $Y_A^2$  e  $Z_A^2$ :

$$h = Y_A^2 \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a. \quad (65)$$

$$i = Z_A^2 \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a. \quad (66)$$

Estas três parcelas podem ser agrupadas por  $\|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a$ :

$$g + h + i = (X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2) \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a. \quad (67)$$

O produto escalar  $(\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC})$ , portanto, será dado por:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (\vec{OA} \times \vec{OB}) \cdot (\vec{OA} \times \vec{OC}) \\ &= (X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2) \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a \\ &\quad - \|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos c \cos b \end{aligned} \quad (68)$$

Substituindo a Equação 68 na Equação 37, tem-se:



$$\cos A = \frac{(X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2) \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} - \frac{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \cos c \cos b}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} \quad (69)$$

Sabendo que  $\|\vec{OA}\|^2 = X_A^2 + Y_A^2 + Z_A^2$  (LIMA, 2004, p.123), a Equação 69 pode ser escrita:

$$\cos A = \frac{\|\vec{OA}\|^2 \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos a}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} - \frac{\|\vec{OA}\|^2 \|\vec{OB}\| \|\vec{OC}\| \cos c \cos b}{\|\vec{OA}\| \|\vec{OB}\| \sin c \|\vec{OA}\| \|\vec{OC}\| \sin b} \quad (70)$$

E, finalmente:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos c \cos b}{\sin c \sin b} \quad (71)$$

Rearranjando a Equação 71, para que o lado  $a$  fique isolado à esquerda, tem-se:

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \sin b \cos A. \quad (72)$$

A dedução das outras duas equações segue os mesmos passos.

É importante ressaltar que a partir da Equação 37, poderia ser utilizada a identidade:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{B} \cdot \vec{C})(\vec{A} \cdot \vec{D}). \quad (73)$$

Contudo, optou-se por realizar a dedução completa, pois a Equação 73 não é amplamente divulgada no ensino médio ou universitário, não sendo encontrada em Lima (2004), por exemplo.

## CONCLUSÕES

Este trabalho realizou revisão bibliográfica acerca da dedução via Geometria Analítica da Lei dos Cossenos da Trigonometria Esférica. A utilização da Geometria Analítica é importante para os profissionais de Geomática, pois recorda conceitos que serão utilizadas em outras disciplinas, facilitando a compreensão das mesmas.

Especial ênfase foi dada aos conceitos de Geometria Sólida e Geometria Analítica.

Normalmente os textos de Trigonometria Esférica contêm a dedução via Geometria Clássica e, naquelas publicações em que há a dedução via Geometria Analítica, utiliza-se uma esfera unitária como referência. Este trabalho não utilizou tal restrição, tornando a solução geral.

# Deduction via analytic geometry of the equations of the cosine law of the spherical trigonometry

## ABSTRACT

The Spherical Trigonometry is an important discipline for Geomatics. Many concepts of Geomatics come from the Spherical Trigonometry, these concepts are applied to: solve the direct and inverse problems of Geodesy; solve Positional Triangle from Astronomy and; the deduction of the laws of formation of some Projections, especially the Azimuthal Equidistant, when the reference surface is a sphere. The fundamental equations to solve Spherical Triangles are those that compose the named Cosine Law. In this way, this work aims to present a general deduction of the Cosine Law, using Analytical Geometry. A second goal is to present concepts of Analytical Geometry to the students and professionals of the Geomatics, because this area of Mathematics is also very important to them.

**KEYWORDS:** Spherical Trigonometry. Analytical Geometry. Spherical Geometry.

## REFERÊNCIAS

BARNEJEE, S. Revisiting Spherical Trigonometry with Orthogonal Projectors. **The College Mathematics Journal**, v. 35, p.375-381, nov. 2004. <http://dx.doi.org/10.2307/4146847>.

BAKKER, M.P.R. **Cartografia: Noções Básicas**. Rio de Janeiro: DHN, 1962. 242 p.

COUTINHO, L. **Trigonometria Esférica – A Matemática de um Espaço Curvo**. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 2015, 232p.

JOSEPH, M. O Trivium: **As Artes Liberais da Lógica, da Gramática e da Retórica**. São Paulo: É Realizações, 2008. 327 p.

LIMA, E.L. **Álgebra Linear**. Rio de Janeiro: IMPA, 7 ed, 2004. 357 p.

MURRAY, D.A. **Spherical Trigonometry**. New York: Longman, Green & CO., 1908.

SANTIAGO, B. Trigonometria Esférica. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/oei/santiago/fis2005/textos/esferast.htm>. Acessado em 25 de Jun. de 2016

TODHUNTER, I.; LEATHEM, J.G. **Spherical Trigonometry**. Londres: Macmillan and CO, Limited., 1914.

WELLS, W. **A Pratical Text-Book on Plane and Spherical Trigonometry**. Boston: Editora Leach, Shewell & Sanborn, 1888. 290 p.

**Recebido:** 21 jul. 2016

**Aprovado:** 05 mar. 2017

**DOI:** 10.3895/rbgeo.v5n2.5422

**Como citar:** ROCHA, C. H. O. Dedução via geometria analítica das equações da lei dos cossenos da trigonometria esférica. **R. bras. Geom.**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 230-250, abr/jun. 2017. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbgeo>>. Acesso em: XXX.

**Correspondência:**

Carlos Henrique Oliveira da Rocha

Rua São Francisco Xavier, 524, sala 4020-B, CEP 20550-900, Maracanã, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

**Direito autoral:** Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

