

Uma investigação sobre acoplamento de pêndulos não lineares utilizando técnicas de videoanálise

Silva, E. S.
ssf.erick@gmail.com
orcid.org/0000-0002-5009-2914
Instituto Federal de Educação Ciência e tecnologia de Mato Grosso (IFMT), Mato Grosso, Brasil.

Araujo, A. A. V. R.
alexandrevisentin@gmail.com
orcid.org/0000-0003-0996-7472
Colégio Militar de Juiz de Fora, Minas Gerais, Brasil.

RESUMO

Este artigo apresenta a videoanálise como uma ferramenta para o estudo de pêndulos acoplados fora do regime de pequenas oscilações. A técnica permite investigar a evolução temporal das amplitudes dos pêndulos constituintes, para diferentes configurações iniciais. O trabalho é concentrado em uma configuração especial, que evolui no tempo revelando um regime de batimento. Como destaque, vê-se que a variação temporal observada nas amplitudes pode ser associada a um mecanismo de troca energética entre os pêndulos constituintes. A investigação descrita permite não só estudar possíveis padrões na evolução temporal de sistemas não lineares semelhantes, como também possibilita uma avaliação do amortecimento ao qual o sistema encontra-se sujeito.

PALAVRAS-CHAVE: Pêndulos não lineares; Videoanálise; Ensino de Física.

INTRODUÇÃO

O estudo dos pêndulos apresenta relevância científica, devido ao fato de que seus modelos descritivos podem ser extrapolados para diversas situações físicas. Oscilações em sistemas mecânicos e vibrações de moléculas, por exemplo, podem ser explorados com relações matemáticas semelhantes às aquelas utilizadas para descrever sistemas de pêndulos (SILVA, 2018; MONTEIRO, 2011). Não é por acaso que os cursos de física básica ou avançada apresentam numerosos exemplos utilizando pêndulos lineares e não lineares (SILVA, 2018; ANDRADE; ANJOS; ASSIS, 2017; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008; MONTEIRO, 2011; LEMOS, 2004; NUSSENZVEIG, 2002). Trabalhos utilizando estes pêndulos podem ser encontrados na literatura especializada, desde experimentos didáticos até investigações teóricas mais complexas (LOPES; SUAVE; NOGUEIRA, 2018; PICCIARELLI; STELLA, 2010; BELÉNDEZ *et al.*, 2007; GAULD, 2004).

Neste artigo a videoanálise é utilizada como instrumento de investigação para mostrar que as amplitudes de dois pêndulos acoplados, na configuração estudada, se encontram em regime de batimento. O estudo permite verificar que os pêndulos investigados seguem um padrão similar ao apresentado por pêndulos lineares. A videoanálise estruturada também possibilita uma avaliação do amortecimento observado no experimento. Conforme será destacado, a hipótese de pequenas oscilações não é necessária para o estudo de acoplamentos semelhantes.

ACOPLAMENTO, AMORTECIMENTO E PÊNDULO NÃO LINEAR

Na sequência, discute-se o acoplamento de dois pêndulos lineares, juntamente com a condição de amortecimento a qual um pêndulo linear pode estar sujeito. Dar-se-á atenção concentrada na condição inicial, em que os pêndulos estão em repouso e apenas um deles se encontra deslocado da posição vertical de equilíbrio. Por fim, serão descritos um pêndulo não linear, relacionando-o com a videoanálise implementada.

ACOPLAMENTO DE PÊNDULOS LINEARES E REGIME DE BATIMENTO

Sejam dois pêndulos *A* e *B* idênticos, cada qual com massa *m* e comprimento *l*, acoplados por meio de uma mola de constante *k*, conforme a **Figura 1**. Em um regime de pequenas oscilações, onde $\sin \theta \approx \theta$, pode-se escrever os deslocamentos x_1 e x_2 dos pêndulos em relação à posição de equilíbrio, na forma:

$$x_1 = l\theta_1 \quad , \quad x_2 = l\theta_2 \quad (1)$$

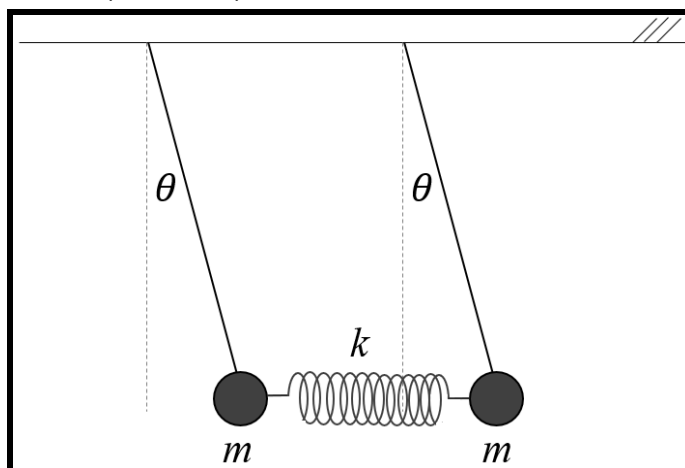
cujas equações de movimento para o caso não forçado e não amortecido são dadas por:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 - K(x_2 - x_1) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \quad (3)$$

onde $\omega_0 = (k/l)^{1/2}$ e $K = k/m$, sendo k a constante elástica associada ao modelo de oscilação no regime de pequenas oscilações (NUSSENZVEIG, 2002).

Figura 1 – Esquema representando o acoplamento entre dois pêndulos de massa m e comprimento l , por meio de uma mola de constante k



Fonte: Autoria própria.

Note que as equações (2) e (3) estão acopladas. Contudo, definindo novas variáveis q_1 e q_2 :

$$q_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \quad (4)$$

$$q_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \quad (5)$$

pode-se reescrever as equações de movimento em um novo sistema de coordenadas, pois somando (2) e (3), temos:

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = 0 \quad (6)$$

e subtraindo as mesmas equações (2) e (3), escreve-se:

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_q^2 q_2 = 0 \quad (7)$$

para $\omega_q = (\omega_0^2 + 2K)^{1/2}$. As duas equações (6) e (7) estão desacopladas e correspondem a movimentos harmônicos simples (MHS), com soluções gerais na forma:

$$q_1(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) \quad (8)$$

$$q_2(t) = A_2 \cos(\omega_q t + \alpha_2) \quad (9)$$

em que as coordenadas q_1 e q_2 recebem o nome de coordenadas normais do sistema (NUSSENZVEIG, 2002). O retorno às coordenadas x_1 e x_2 pode ser

realizado por meio das equações (4) e (5). Isso fornece as soluções das equações de movimento (2) e (3), com quatro constantes arbitrárias, a saber: A_1, A_2, α_1 e α_2 .

A configuração inicial onde os pêndulos estão em repouso e apenas um deles é deslocado da posição de equilíbrio pode ser escrita na forma:

$$x_1(0) = a, \quad x_2(0) = 0, \quad \frac{dx_1(0)}{dt} = 0, \quad \frac{dx_2(0)}{dt} = 0, \quad (10)$$

ou em termos das coordenadas normais:

$$q_1(0) = \frac{a}{2}, \quad q_2(0) = \frac{a}{2}, \quad \frac{dq_1(0)}{dt} = 0, \quad \frac{dq_2(0)}{dt} = 0, \quad (11)$$

que implica em $A_1 = A_2 = a/2$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Isso nos permite escrever:

$$x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_0 t - \cos \omega_q t) \quad (12)$$

$$x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_0 t + \cos \omega_q t) \quad (13)$$

que representam superposições de dois movimentos harmônicos simples de mesma amplitude e frequências diferentes. Denotando a frequência angular média por $\bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$ e a variação em frequência angular por $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, pode-se mostrar que, para o caso de acoplamento fraco, onde a força restauradora da mola que une os pêndulos é pequena ($K \ll \omega_0^2$ ou por $\Delta\omega \ll \bar{\omega}$), o sistema de pêndulos apresenta as seguintes coordenadas:

$$x_1(t) = a \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cos(\bar{\omega}t) \quad (14)$$

$$x_2(t) = a \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \sin(\bar{\omega}t) \quad (15)$$

que expressa uma situação típica de batimentos, modulados por $a \cos(\Delta\omega.t/2)$ no primeiro caso e por $a \sin(\Delta\omega.t/2)$ no segundo. Isso significa que os máximos de uma coordenada correspondem aos zeros da outra coordenada (NUSSENZVEIG, 2002).

AMORTECIMENTO DE PÊNDULOS LINEARES

O comportamento dinâmico de um pêndulo amortecido e não forçado, de massa m e posição $x \approx l\theta$, pode ser avaliado por meio da equação:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -p \frac{dx}{dt} - kx \quad (16)$$

que descreve um oscilador unidimensional de constante elástica k com um termo de resistência dissipativa, proporcional à velocidade, dado por $-p dx/dt$, sendo p uma constante positiva (NUSSENZVEIG, 2002). Pode-se dividir a equação (16) por m e reescrevê-la na forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad (17)$$

definindo $\gamma = p/m$ e $\omega_0^2 = k/m$. A equação (17) é linear homogênea de segunda ordem, com coeficientes constantes. A equação (17) possui três tipos de soluções, conforme a intensidade do amortecimento. Entende-se importante observar que nesse trabalho tem-se o interesse no regime de baixo amortecimento, o qual ocorre quando a força de resistência dissipativa é muito menor que a força restauradora (regime subcrítico). Neste caso a oscilação continua ocorrendo, mas com amplitudes cada vez menores. A solução nesse regime subcrítico é dada por:

$$x(t) = Ae^{-\frac{\gamma}{2}t} \cos(\omega t + \alpha), \quad (18)$$

em que A e α representam duas constantes arbitrárias e ω é dado por:

$$\omega = \left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4} \right)^{1/2}. \quad (19)$$

Maiores detalhes envolvendo outros regimes de amortecimento podem ser encontrados em Halliday, Resnick e Walker (2008), Nussenzveig (2002) e Alonso e Finn (1972).

O PÊNDULO NÃO LINEAR

No presente trabalho investiga-se o acoplamento de dois pêndulos não lineares acoplados. Observe que o comportamento dinâmico de um pêndulo não forçado e sem amortecimento de massa m preso a uma haste muito leve de comprimento l , sujeito a aceleração da gravidade g , é descrito pela equação:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (20)$$

em que a coordenada angular θ representa o ângulo de abertura entre a haste, que une a massa pendular ao ponto de sustentação, e a vertical que passa pelo ponto de sustentação (NUSSENZVEIG, 2002; MONTEIRO, 2011). Na hipótese de pequenas oscilações, a equação (20) coincide com a equação do movimento harmônico simples, pois $\sin \theta \approx \theta$.

A equação de segunda ordem (20) pode ser substituída por um conjunto equivalente de equações de primeira ordem, basta definir $d\theta/dt = \omega$. De fato, note que:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (21)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\omega_0^2 \sin \theta \quad (22)$$

são equações de primeira ordem equivalentes à equação (20). A curva percorrida pelo pêndulo no seu espaço de fases, a partir da condição inicial $(\theta(0), \omega(0))$, pode ser determinada analiticamente, a partir de (21) e (22):

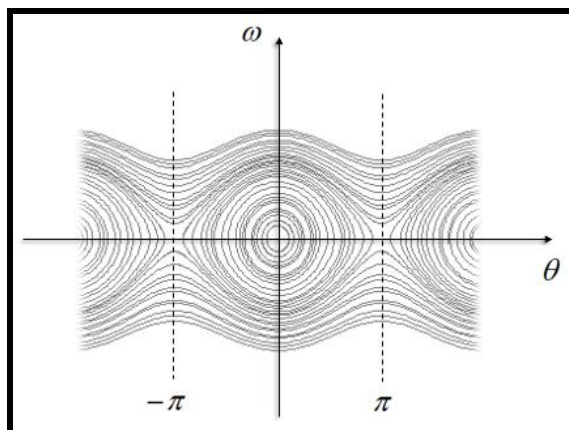
$$\frac{d\theta}{d\omega} = -\frac{\omega}{\omega_0^2 \sin \theta} \quad (23)$$

que fornece:

$$\frac{1}{2\omega_0^2} \omega^2(t) - \cos \theta(t) = \frac{1}{2\omega_0^2} \omega^2(0) - \cos \theta(0). \quad (24)$$

A equação (24) indica que próximo ao ponto de equilíbrio, situado na origem, o retrato de fases é composto por trajetórias fechadas. Essas trajetórias representam movimentos de oscilação, conforme a **Figura 2** (MONTEIRO, 2011).

Figura 2 – Retrato de fases do pêndulo não linear, sem amortecimento e não forçado



Fonte: Autoria própria.

Fazendo $t = 0$ corresponder ao instante em que o pêndulo com abertura angular (pêndulo A) possui velocidade nula, pode-se escrever (23) da seguinte maneira:

$$\omega = \omega_0 \sqrt{2} [\cos \theta(t) - \cos \theta(0)]^{1/2}, \quad (25)$$

onde $\theta(0)$ denota o valor máximo da coordenada angular θ . A expressão (25) não pode ser integrada em termos de funções elementares (MONTEIRO, 2011; STROGATZ, 1994). Note que a equação (25) pode ainda ser escrita como:

$$\omega_0 \sqrt{2} dt = \frac{d\theta}{[\cos \theta(t) - \cos \theta(0)]^{1/2}}, \quad (26)$$

uma vez que o pêndulo gasta 1/4 do seu período para ir da coordenada angular $\theta(t) = 0$ até $\theta = \theta(0)$, poderíamos considerar a integração da equação anterior:

$$T = \frac{4}{\omega_0 \sqrt{2}} \int_0^{\theta_M} \frac{d\theta}{[\cos \theta(t) - \cos \theta(0)]^{1/2}}. \quad (27)$$

A expressão (27) indica que o período de oscilação do pêndulo não linear depende da máxima abertura angular $\theta(0)$ (MONTEIRO, 2011; STROGATZ, 1994). Esse fato revela que cada trajetória, no espaço de fases considerado, é percorrida por uma velocidade diferente.

A dificuldade analítica apontada anteriormente é evidente. Contudo, mostraremos que a videoanálise pode ser utilizada para estudar pêndulos não lineares acoplados, revelando-se uma ferramenta útil para a identificação de padrões nas coordenadas cartesianas dos respectivos pêndulos. Comportamentos similares aos encontrados em casos lineares podem ser

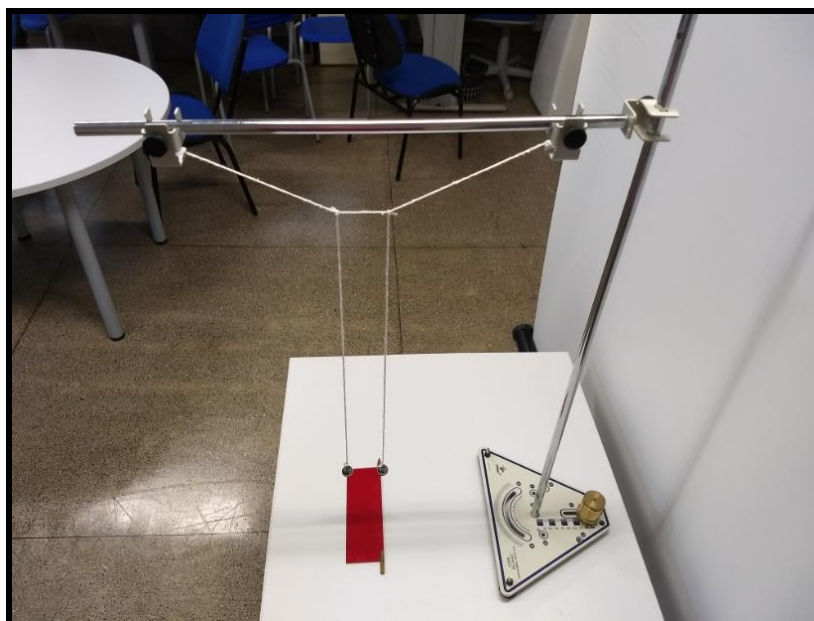
encontrados em regimes não lineares, conforme será destacado ao longo deste texto. Obviamente, a configuração não linear estudada deve convergir para os regimes já conhecidos em pequenas oscilações.

VIDEOANÁLISE DE UM SISTEMA COM DOIS PÊNDULOS NÃO LINEARES ACOPLADOS

A **Figura 3** revela a montagem experimental considerada neste trabalho, elaborada para estudar o sistema de pêndulos duplos acoplados. Conforme a literatura destaca, a videoanálise permite o estudo científico de fenômenos físicos registrados por meio de vídeos (SILVA *et al.*, 2017; DE JESUS, 2014; BROWN; COX, 2009).

No presente trabalho, os pêndulos *A* (em vermelho) e *B* (em azul) possuem massas e comprimentos semelhantes, estando acoplados por um barbante, conforme ilustrado na **Figura 3**. O estudo, desenvolvido com o *software Tracker* (TRACKER, 2018; OSP, 2018), está restrito a configurações oscilatórias semelhantes de massas pendulares que conservam o comprimento l dos fios.

Figura 3 – Vista lateral do pêndulo duplo estudado por meio da videoanálise

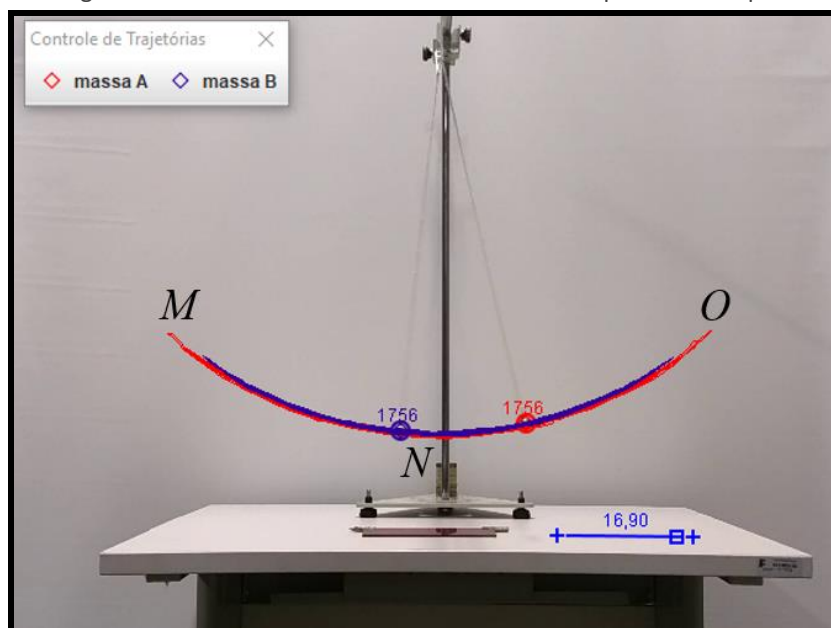


Fonte: Autoria própria.

O pêndulo *A* é deslocado até uma posição inicial representada pelo ponto *M*, indicado na **Figura 4**, que corresponde a uma coordenada angular máxima $\theta(0)$, sendo liberado na sequência com velocidade inicial nula. O pêndulo *B* encontra-se em repouso no ponto *N* na **Figura 4**, que corresponde a uma coordenada angular nula.

No decurso do tempo, o pêndulo *A* ocupa posições com coordenadas x e y cada vez menores, até atingir, em um intervalo de tempo Δt , o ponto *N* representado na **Figura 4**. Nesse mesmo intervalo de tempo, observa-se o pêndulo *B* sair do ponto inicial *N* e seguir até as proximidades do ponto *M*. Essa evolução se repete no decurso do tempo, mas com aberturas angulares cada vez menores.

Figura 4 – Tela do *Tracker* revelando o sistema de pêndulos acoplados



Fonte: Autoria própria.

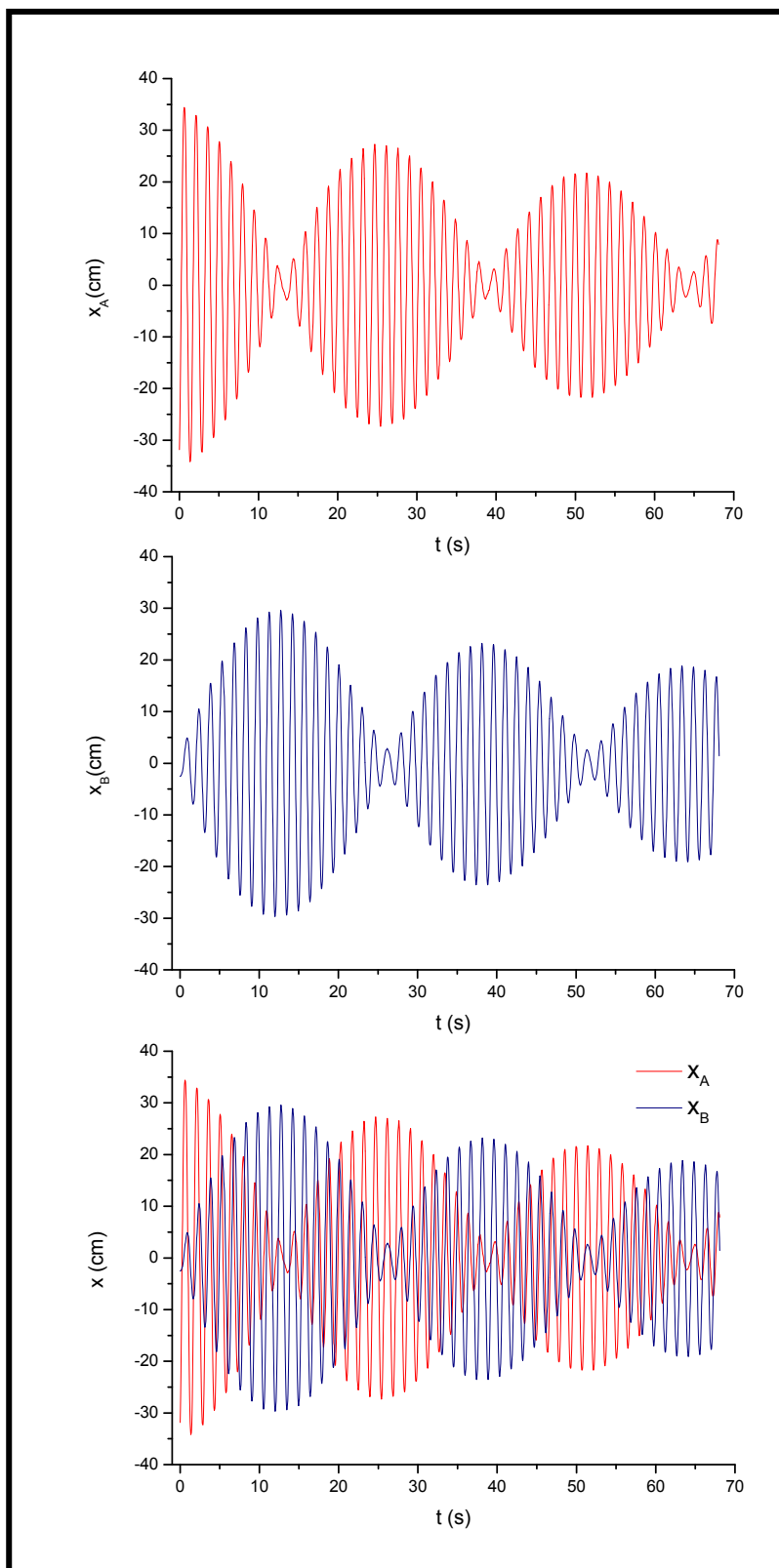
RESULTADOS E DISCUSSÕES

OSCILAÇÃO OBSERVADA NAS COORDENADAS X E Y

O padrão apresentado pelas coordenadas x e x' do acoplamento investigado (Figura 5) assemelha-se ao padrão obtido quando estudamos pêndulos lineares acoplados por uma mola de comprimento natural d_0 e constante elástica k , modelados pelas equações (14) e (15).

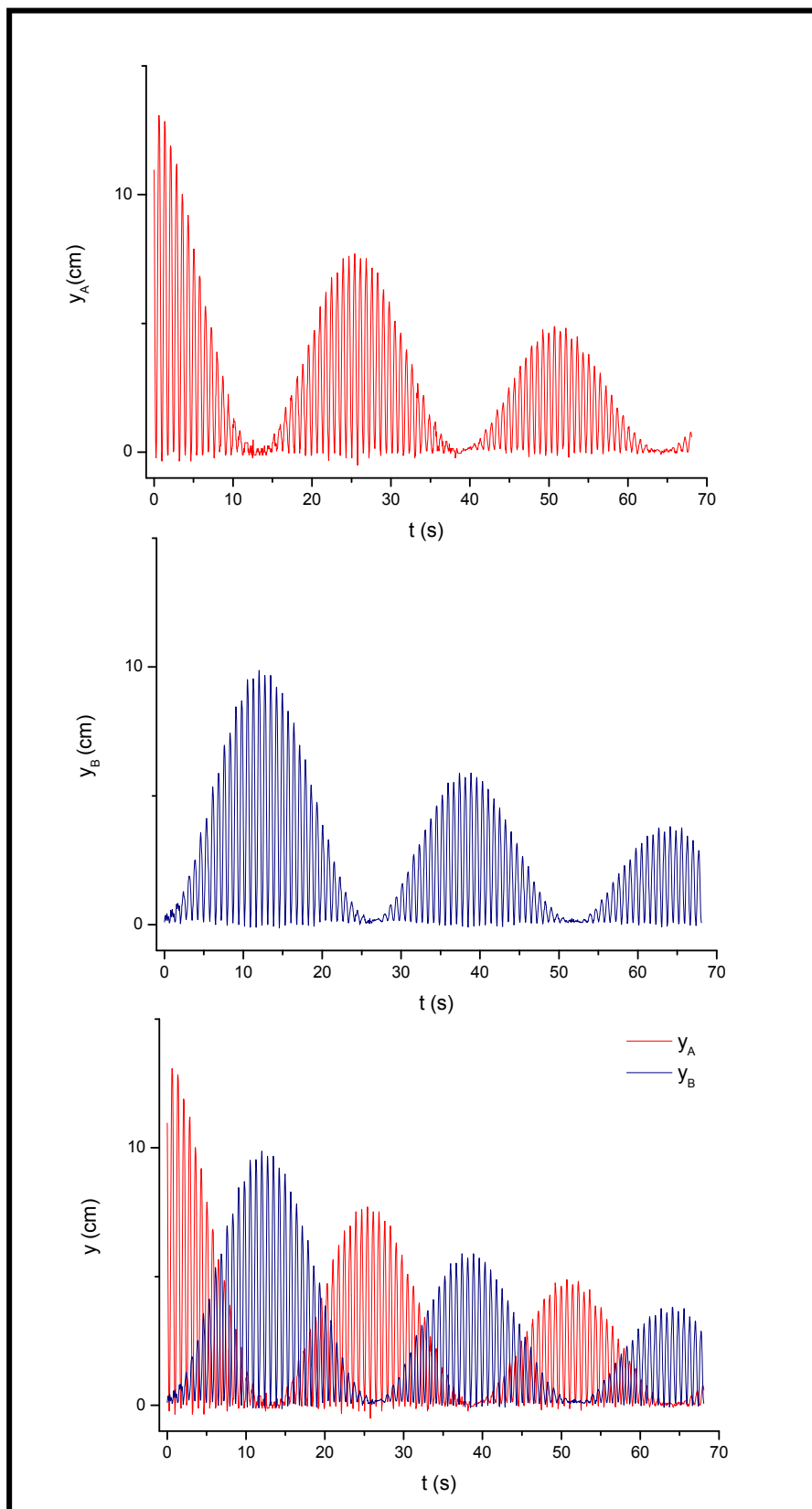
A diferença é que, na configuração estudada, além de uma oscilação combinada em torno das posições de equilíbrio $x = 0$ e $x' = 0$ para os pêndulos A e B, respectivamente, observa-se também um padrão relativo às coordenadas y e y' (Figura 6), que vão de um valor máximo até zero, no mesmo intervalo de tempo em que a coordenada correspondente x vai diminuindo sua amplitude até anular-se. Observe que, no limite de pequenas oscilações ($\theta \ll 1$), o sistema passa a ser descrito pelas relações indicadas em (1).

Figura 5 – Coordenadas $x_A(t)$ e $x_B(t)$ dos pêndulos A e B juntamente com uma superposição de $x_A(t)$ e $x_B(t)$



Fonte: Autoria própria.

Figura 6 – Coordenadas $y_A(t)$ e y_B dos pêndulos A e B juntamente com uma superposição de $y_A(t)$ e $y_B(t)$

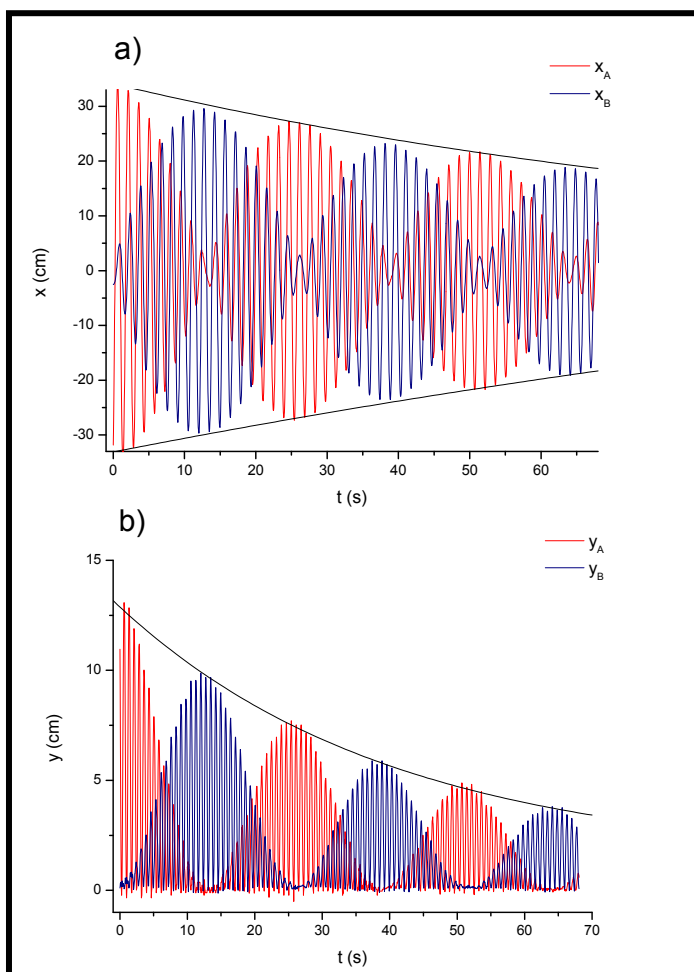


AMORTECIMENTO OBSERVADO NAS COORDENADAS X E Y

Na seção anterior, não foi mencionado que o valor da coordenada angular θ diminui ao longo do tempo (**Figuras 5 e 6**). Esse efeito pode ser interpretado como um amortecimento ao qual o sistema se encontra sujeito, semelhante aquele modelado pela equação (18). As oscilações observadas em x e x' podem ser descritas por meio de equações harmônicas limitadas por exponenciais que decrescem no tempo. Esse é justamente o efeito modelado pelo regime subcrítico, indicado em (18). As oscilações em y e y' são semelhantes, exceto pelo fato de seus valores serem sempre positivos, **Figuras 5 e 6**.

Avaliou-se o amortecimento nas amplitudes x e y por meio de um ajuste exponencial dos máximos em amplitude, conforme indicado na **Figura 7**. Em um regime semelhante ao modelado pela expressão (18), podem-se considerar os batimentos relativos à coordenada x contidos entre as exponenciais $\pm 31,85e^{-0,01t} + 2,26$ e os batimentos relativos às coordenadas y , com limite superior dado por $11,50e^{-0,02t} + 1,38$. Isso corresponde a coeficientes de amortecimento iguais a $\gamma' = 0,02 \text{ s}^{-1}$ e $\gamma'' = 0,04 \text{ s}^{-1}$, respectivamente. As incertezas nesses dois coeficientes são da ordem de 10^{-2} s^{-1} (VUOLO, 1996).

Figura 7 – a) Amortecimento no batimento acoplado relativo à coordenada $x(t)$;
b) Amortecimento no batimento acoplado relativo à coordenada $y(t)$



Fonte: Autoria própria.

TROCA DE ENERGIA ENTRE OS PÊNDULOS E DISSIPACÃO

No experimento realizado, modelou-se a variação da energia potencial gravitacional com o tempo, cujos valores máximos podem ser identificados como a energia mecânica E no sistema de pêndulos acoplados, considerando o instante t e o referencial associado.

A **Figura 6-b** pode ser interpretada como um gráfico de U/mg em função do tempo t , sendo U a energia potencial gravitacional do pêndulo de massa m , sujeito à aceleração local da gravidade com intensidade g . A comparação entre dois picos, que correspondem a pontos de energia potencial gravitacional máxima no referencial adotado e instante t , permite avaliar a redução de energia no sistema no decurso do tempo, pois:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{mgh_2}{mgh_1} = \frac{h_2}{h_1}, \quad (28)$$

que no caso em questão corresponde a uma redução de 67% entre os instantes 0,633 s e 52,863 s. Um resultado semelhante pode ser obtido considerando a expressão apresentada para o amortecimento da coordenada y , discutida na seção anterior.

O processo investigado pode ser entendido como uma transferência alternada de energia entre os pêndulos acoplados. Identificou-se fisicamente a diminuição da amplitude de oscilação do pêndulo A , e sua conseqüente diminuição de energia mecânica, a um aumento da amplitude do pêndulo B , por meio de um processo de transferência de energia.

A conexão dos pêndulos por meio do barbante torna factível o processo de transferência energética destacado. Entende-se que o balanço de energia não é explicado apenas por meio dessa troca de amplitudes entre A e B , pois ela se repete ao longo do tempo com módulos cada vez menores, decorrentes da dissipação natural de energia a qual o sistema está sujeito. Isso pode ser avaliado considerando termos de amortecimento nas equações, completando o balanço energético.

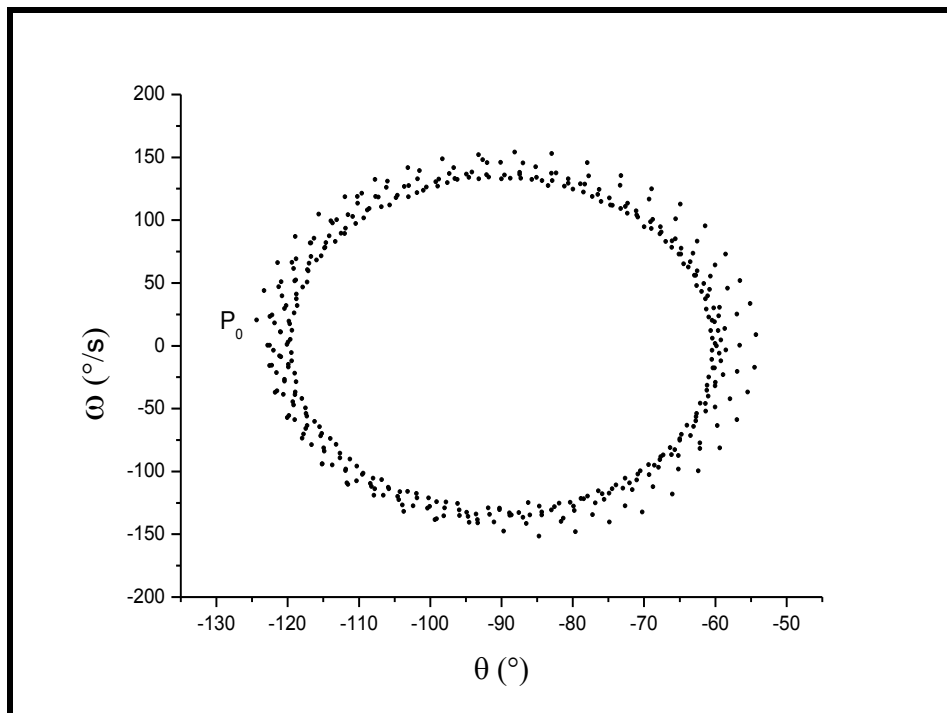
ESPAÇO DE FASES DOS PÊNDULOS ACOPLADOS

Observe que a evolução temporal do acoplamento pode ser visualizada no espaço de fases, conforme discutido na seção de pêndulos não lineares. Note que, para um único pêndulo linear, a evolução no espaço $\theta \times \omega$ está associada a uma trajetória fechada, que tende a conservar sua trajetória à medida que o tempo avança, na ausência de dissipação (**Figura 8**). Isso pode ser associado a existência de um período definido, uma vez que o sistema repete sua configuração inicial para um intervalo de tempo T .

Contudo, o sistema real apresenta um leve amortecimento, fazendo a trajetória espiralar continuamente para o centro (**Figura 8**). Já no caso do acoplamento investigado, as trajetórias espiralam mais rapidamente no regime estabelecido, uma para dentro e a outra para fora, de forma simétrica (**Figura 9-a** e **9-b**), não conservando a trajetória inicial. Pelo contrário, a trajetória associada a um pêndulo espirala para dentro e, depois de um intervalo de tempo Δt , volta a

espiralar para fora. Vale destacar que as **Figuras 8 e 9** consideram a mesma escala de tempo para a evolução do pêndulo simples e do sistema acoplado, para efeitos de comparação.

Figura 8 – Retrato de fases de um pêndulo simples para um intervalo de tempo de 12,9 s

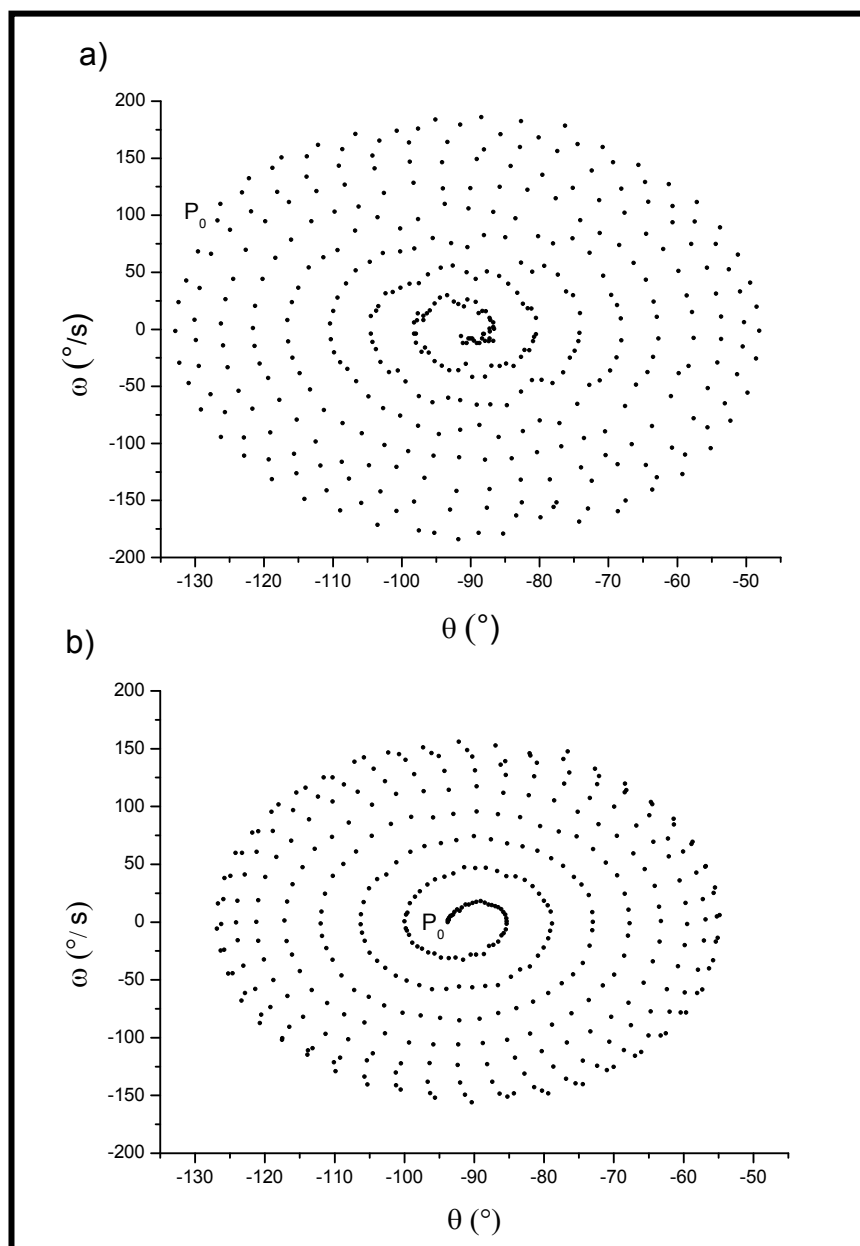


Fonte: autoria própria.

No caso do pêndulo simples, pôde-se observar que a trajetória espirala continuamente para o centro devido ao efeito de amortecimento natural do sistema, na escala de tempo envolvida. Já no segundo caso, a trajetória espirala mais rapidamente, efeito este que não pode ser associado apenas a um efeito de amortecimento natural, devido a forças dissipativas.

Como as amplitudes se alternam continuamente ao longo do tempo, podemos interpretar que uma troca energética se encontra estabelecida entre os pêndulos acoplados. No entanto, as amplitudes observadas vão tomando valores cada vez menores. Esse último fato pode, da mesma forma que no caso do pêndulo simples, ser associado ao amortecimento natural do sistema (**Figura 9-a e 9-b**).

Figura 9 – Retrato de fases dos pêndulos A e B acoplados, respectivamente, para um intervalo de tempo de 12,9 s



Fonte: autoria própria.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Investigou-se uma configuração de pêndulos não lineares acoplados, utilizando as técnicas de videoanálise. A troca de amplitudes entre os pêndulos no tempo pode ser associada à transferência de energia estabelecida ente os pêndulos constituintes.

A partir do exposto, conclui-se que a energia é dissipada ao longo do tempo, sendo trocada entre os dois pêndulos por meio de um padrão semelhante ao previsto analiticamente para regimes de pequenas oscilações em pêndulos lineares.

Com o auxílio da videoanálise foi possível estudar os pêndulos acoplados em aberturas angulares quaisquer, desde que os comprimentos dos fios se mantenham conservados. Os resultados apresentados estão atrelados a essa única hipótese, podendo ser estendidos para configurações semelhantes.

An investigating about coupling of nonlinear pendulums using video analysis techniques

ABSTRACT

This article presents the videoanalysis as a tool for the study of coupled pendulums outside the regime of small oscillations. The technique allows investigating the temporal evolution of the amplitudes corresponding to the constituent pendulums, for different initial configurations. Let's focus on a special setup that evolves over time revealing a beat regime. We will emphasize that the temporal variation observed in the amplitudes can be associated to an energy exchange mechanism between the constituent pendulums. The described research allows not only to study possible patterns in the temporal evolution of similar nonlinear systems, but also allows an evaluation of the damping to which the system is subject.

KEYWORDS: *Non-linear pendulums; Video Analysis; Physics Teaching.*

Una investigación sobre el acoplamiento de péndulos no lineales utilizando las técnicas de videoanálisis

RESUMEN

Este artículo presenta la videoanálisis como una herramienta para el estudio de péndulos acoplados fuera del régimen de pequeñas oscilaciones. La técnica permite investigar la evolución temporal de las amplitudes de los péndulos constituyentes, para diferentes configuraciones iniciales. Vamos a concentrarnos en una configuración especial, que evoluciona en el tiempo revelando un régimen de latido. Destacaremos que la variación temporal observada en las amplitudes puede ser asociada a un mecanismo de intercambio energético entre los péndulos constituyentes. La investigación descrita permite no sólo estudiar posibles patrones en la evolución temporal de sistemas no lineales semejantes, como también posibilita una evaluación de la amortiguación al cual el sistema se encuentra sujeto.

PALABRAS CLAVE: Péndulos no lineales; Videoanálisis; Enseñanza de Física.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M.S.; FINN, E. S. **Física**. v. 2. Editora Edgar Blucher, São Paulo, 1972.

ANDRADE, D. X.; ANJOS, P. H. R.; ASSIS, P. E. G. Sobre a conexão entre alguns modelos físicos não-lineares. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n. 1, 2017.

BELÉNDEZ, A., *et al.* Exact solution for the nonlinear pendulum. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 4, p. 645-648, 2007.

BROWN, D; COX, A. J. Innovative Uses of Video Analysis. **The Physics Teacher**, v. 47, March, p.145-150, 2009.

DE JESUS, V. L. B. **Experimentos e videoanálise: Dinâmica**. São Paulo: Livraria da Física, 2014.

GAULD, C. Pendulums in The Physics Education Literature: A Bibliography. **Science & Education**, v.13, n.7, p. 811-832, 2004.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of Physics**. v.2. John Wiley & Sons, 2008.

LEMOS, N. A. **Mecânica Analítica**. Ed. Livraria da Física, São Paulo, 2004.

LOPES, F. S.; SUAVE, R. N.; NOGUEIRA, J. A. Uma revisão das aproximações lineares para amplitudes de oscilações do período de um pêndulo simples. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 3, e3313, 2018.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas Dinâmicos**. Livraria da Física, São Paulo, 2011.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: Fluidos, Oscilações e Ondas**. v.2. Edgard Blücher, São Paulo, 2002.

OSP. Site do projeto *Open Source Physics*. Disponível em: <https://www.compadre.org/osp/>. Acesso em: 02 mai 2018.

PICCIARELLI, V.; STELLA, R. Coupled pendulums: a physical system for laboratory investigations at upper secondary school. **Physics Education**, v. 45, n. 4, p.402-408, 2010.

SILVA, E. S. Estudo da relação entre o movimento circular uniforme e o movimento harmônico simples utilizando a videoanálise de uma roda de bicicleta. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 2, e2301, 2018.

SILVA, E. S.; ARAUJO, A. A. V. R.; OLIVEIRA, A. L.; DE JESUS, V. L. B. Videoanálise em contextos colaborativos: uma possibilidade para mediação da relação ensino-aprendizagem. In: Alexandre Lopes de Oliveira e Valeria da Silva Vieira. (Org.). **NOSSOS TALENTOS: 10 anos do PROPEC/IFRJ**. 1ed. Nilópolis: Entorno, 2017, v. 1, p. 243-260.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos**. Addison-Wesley, 1994.

TRACKER. Site do software Tracker. Disponível em: <http://physlets.org/tracker>. Acesso em: 02 mai 2018.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria de Erros**. Edgard Blücher, São Paulo, 1996.

Recebido: 02 de maio de 2018.
Aprovado: 22 de novembro de 2018.

DOI:

Como citar: SILVA, E.S.; ARAÚJO, A.A.V.R. Uma investigação sobre acoplamento de pêndulos não lineares utilizando técnicas de videoanálise. **Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada**, Ponta Grossa, v. 5, n.2, p. 01-16, jun/dez. 2018.

Erick dos Santos Silva: ssf.erick@gmail.com

Direito autoral: Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

