RBECT
Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect

ASPECTOS HISTÓRICOS PRESENTES EN LAS PROPUESTAS DE INNOVACIÓN DE PROFESORES DE BÁSICA DE MATEMÁTICAS

Vicenç Font
vfont@ub.edu
0000-0003-1405-0458
Universitat de Barcelona, España

Gemma Sala
gsala@ub.edu
0000-0001-9830-312X
Universitat de Barcelona, España.

Adriana Breda
adriana.breda@gmail.com
0000-0002-7764-0511
Universidad de Los Lagos, Chile.

María José Seckel
mjseckel@ucm.cl
0000-0001-7960-746X
Universidad Católica de Maule, Chile

RESUMO

En la primera parte de este artículo se realiza una reflexión sobre algunos aspectos en los que la historia de las matemáticas es relevante para la enseñanza de esta disciplina. La segunda parte consiste en un estudio de caso múltiple –en un dispositivo de formación en el que los profesores tienen que presentar una propuesta innovadora y la tienen que justificar– para ver qué uso hacen los profesores de la historia de las matemáticas y, más en general de la historia. El análisis realizado del estudio de caso permite concluir la siguiente tipología de usos de la historia de las matemáticas: a) Utilización de un contexto histórico como pretexto motivador, b) Uso de problemas que fueron relevantes en un determinado momento histórico y c) Incorporación de contenidos matemáticos de otras épocas en las propuestas de innovación. En la tercera parte se profundiza en el uso que se hace de la historia en la primera tipología.

PALAVRAS-CHAVE: Historia de las matemáticas. Motivación. Trabajo fin de Máster. Innovación.

1. CONSIDERACIONES SOBRE EL USO DE LA HISTORIA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Un conocimiento relevante para la enseñanza de cualquier contenido matemático es su evolución histórica. Esta evolución permite tener una visión más amplia sobre el contenido matemático en cuestión de la que nos puede dar, por ejemplo, la explicación de un manual universitario. Sin pretender ser exhaustivos, el conocimiento de la evolución histórica de un objeto matemático permite al profesor: a) Mencionar anécdotas matemáticas del pasado, b) Presentar introducciones históricas de los conceptos que son nuevos para los alumnos, 3) Fomentar en los alumnos la comprensión de los problemas históricos la solución de los cuales ha dado lugar a los diferentes conceptos que aprenden, 4) Idear ejercicios y ejemplos utilizando textos matemáticos del pasado, 5) Explorar errores del pasado para ayudar a comprender y resolver dificultades de aprendizaje, 6) Proponer aproximaciones pedagógicas al contenido matemático motivo de estudio de acuerdo con su desarrollo histórico.

Los usos de aspectos históricos relacionados con las matemáticas en su enseñanza es un tema muy relevante en la Didáctica de las Matemáticas que ha generado aportaciones significativas para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Organismos internacionales como el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de los EEUU (NCTM), han sugerido una categorización en cuanto al nivel de utilización de la historia de las matemáticas para la clase de matemáticas, estableciendo tres niveles de implementación: cronológico, lógico y pedagógico (BAUMGART, DEAL, VOGELI y HALLERBERG, 1989).

La primera de las mencionadas categorías se interesa por el recorrido histórico de una determinada noción matemática. Por ejemplo, la investigación de los decimales del número pi, desde la antigüedad hasta nuestros días; el proceso que se ha seguido hasta la definición de número, etc. La segunda categoría, detalla cómo la historia contribuye al desarrollo de la intuición lógico-matemática, dado que expone la manera en que los científicos y los matemáticos desarrollan las diferentes teorías, a partir de problemas que son su razón de ser, de las soluciones encontradas, así como de los errores cometidos en el camino hasta llegar a la solución deseada. A partir de este análisis, los estudiantes pueden experimentar la naturaleza de un sistema axiomático y los razonamientos lógicos, así como los mecanismos de demostración; sin dejar de lado la riqueza que esto representa para el profesor al darle información sobre los posibles obstáculos en la construcción de las nociones matemáticas y, de esta manera, poder establecer estrategias para la superación de estas dificultades. En esta categoría se tiene, por ejemplo, la posibilidad de poder analizar el problema práctico que dio origen a la sucesión de Fibonacci, o bien, la búsqueda de demostraciones gráficas del teorema de Pitágoras, o las dificultades presentadas para la construcción de los números irracionales, etc.

Finalmente, la tercera y última categoría engloba la historia de las matemáticas como fuente inagotable de ideas y estrategias pedagógicas por los profesores, puesto que les permite afrontar la enseñanza de conceptos, procesos, algoritmos, etc., a la luz del desarrollo histórico de esta disciplina. Esto se puede hacer de varias maneras, por ejemplo a partir de una breve revisión histórica del tema, o de las biografías de los matemáticos que aportaron adelantos relevantes en el tema, etc. Por otra parte, se ha documentado (BARBIN, BAGNI, GRUGNETTI, KRONFELLNER, LAKOMA y MENGHINI, 2000) que después de usar la historia en la clase de matemáticas, los estudiantes muestran que para ellos la matemática deja de ser una ciencia muerta y pasa a tener vida, con un desarrollo histórico que incluye aplicaciones prácticas. Según resultados de esta misma investigación, el docente cambia su visión sobre el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y se sensibiliza de forma que, al explicar temas que tomaron mucho tiempos para desarrollarse, permite a sus estudiantes tomar también un largo tiempo para asimilarlos. A su vez, Grugnetti (2000) encontró que cuando se usan problemas antiguos, los docentes y los estudiantes pueden comparar sus estrategias con las originales, y de esta forma los estudiantes pueden comprender el poder de los símbolos y procedimientos de la matemática actual. Tzanakis y Arcavi (2000) también señalan que la integración de la historia puede mostrar conexiones que no son visibles de otra forma, dado que la matemática surgió para solucionar problemas de disciplinas que no parecen estar relacionadas.

Ahora bien, el docente tiene que ser consciente de las posibles dificultades que puede encontrar cuando planifique la enseñanza de las matemáticas teniendo en cuenta su historia, como la falta de tiempo, recursos y preparación. Por estas razones, el uso de la historia de la matemática en el aula genera discusión en la comunidad de educadores matemáticos, sobre todo en aquellos que valoran las matemáticas por sus resultados (teorías, teoremas, demostraciones, etc.), más que por la actividad matemática misma que estos implican y promueven (GUACANEME, 2011).

Hacer una revisión de la literatura sobre los usos de aspectos históricos de las matemáticas en su enseñanza seguramente necesitaría varios tomos, por lo tanto en este trabajo nos limitaremos a resaltar algunos aspectos sobre las relaciones entre la historia de las matemáticas y su enseñanza que nos parecen especialmente relevantes.

1.1. INFLUENCIA DE LA HISTORIA EN LAS CREENCIAS O CONCEPCIONES EXISTENTES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El conocimiento de la historia de la matemática ha permitido cuestionarse el punto de vista platónico sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, lo cual ha repercutido sobre las creencias o concepciones existentes sobre la enseñanza de las matemáticas. Un ejemplo lo tenemos en la obra de Lakatos. Este filósofo propone sustituir la fundamentación de la matemática (la preocupación por la verdad) por el problema del avance del conocimiento. En su libro «Pruebas y refutaciones» (LAKATOS, 1978) este filósofo presenta un intercambio de opiniones, razonamientos y refutaciones entre un profesor y sus alumnos. En lugar de presentar el producto de la actividad matemática (las matemáticas formalizadas), presenta el desarrollo de la actividad matemática a partir de un problema y una conjetura. En este libro Lakatos utiliza la historia para intentar convencer al lector que las matemáticas informales −las matemáticas en proceso de crecimiento y de descubrimiento−, del mismo modo que las ciencias experimentales, son falibles y no indudables; que también se desarrollan gracias a la crítica y a la corrección de teorías que nunca están completamente libres de ambigüedades y en las cuales siempre cabe la posibilidad de error o de omisión. Lakatos para justificar su punto de vista utiliza la historia de la demostración del teorema de Euler. Primero explica la demostración dada por Cauchy y después analiza cómo se respondió a la aparición de poliedros que no encajaban bien con esta prueba o bien con el enunciado del teorema. Ante el hecho de la existencia de contraejemplos, desde un posicionamiento ontológico de tipo realista (existe el objeto matemático poliedro y hay que descubrir sus propiedades), la posición consecuente sería aceptar que la prueba (o la conjetura) es errónea. La historia muestra, según Lakatos, que la solución adoptada no fue esta, puesto que lo que se hizo fue ir modificando la definición de poliedro para ir excluyente a los diferentes contraejemplos que iban apareciendo.

La obra de Lakatos, para muchos investigadores en Didáctica de las Matemáticas, se ha considerado como la justificación teórica de la necesidad de pasar de enseñar teorías matemáticas acabadas a enseñar a hacer matemáticas y de la importancia que tiene la resolución de problemas como desencadenante de la actividad matemática. Establecer la diferencia entre la actividad matemática y las organizaciones de los productos de la actividad matemática, lleva a entender las matemáticas como el resultado de una actividad humana social que va evolucionando históricamente y cuyo objetivo es la resolución de problemas.

Esta visión sobre la naturaleza de las matemáticas repercutió en la enseñanza de las matemáticas poniendo en primer plano la resolución de problemas. Como alternativa al formalismo en qué había degenerado la introducción de las matemáticas modernas en la enseñanza no universitaria del siglo XX, surgieron diferentes grupos de renovación que proponían una alternativa basada en: 1) enseñar las matemáticas a partir de la resolución de problemas y 2) hacer ver a los alumnos que las matemáticas se podían aplicar a situaciones de la vida real. Para estos grupos innovadores, la obra de Lakatos fue la justificación teórica de algo que habían constatado en su práctica: la necesidad de pasar de enseñar teorías matemáticas acabadas a enseñar a hacer matemáticas, y en este hacer tanto la resolución de problemas como la historia de las matemáticas tenían un papel importante para sugerir organizaciones de las secuencias didácticas que superasen la visión formalista y magistral de las matemáticas y que, al mismo tiempo, sirviesen para motivar a los alumnos.

La obra de Lakatos y su repercusión en la enseñanza de las matemáticas ilustra claramente la dos razones principales que se dan para integrar la historia en la enseñanza de las matemáticas: 1) la historia provee una oportunidad para desarrollar nuestra visión de lo que es realmente la matemática y nos permite tener una mejor comprensión de conceptos y teorías (BARBIN et al, 2000). Es decir, se espera que tanto estudiantes como docentes entiendan mejor los conceptos de las teorías, al conocer la forma en la que estos se desarrollaron en la historia. 2) Esta comprensión cambia la forma en que se perciben las matemáticas. Primero, la historia de la matemática puede cambiar la percepción y comprensión del docente sobre esta disciplina; en segundo lugar, el docente influenciará la forma en que se enseña la matemática y por lo tanto, al final, se afecta la forma en que el estudiante percibe y entiende las matemáticas. De esta manera, la percepción hacia la matemática cambia en la medida en que docentes y estudiantes pueden contextualizarla y humanizarla. Es decir, la matemática se muestra como producto de la actividad humana, generada a partir de diferentes necesidades a través de muchos siglos de civilización. Si se muestra la forma en que los conceptos matemáticos se van desarrollando −incluyendo errores en los cuales incurrieron sus creadores, mostrándolos así con sus imperfecciones humanas−, la matemática deja de percibirse como un ente abstracto, impuesto rígidamente en el currículum, y empieza a pensarse más como una herramienta utilizada desde el comienzo de la humanidad para resolver problemas y situaciones. En otras palabras, la dimensión histórica nos insta a pensar en la matemática como un proceso continuo de reflexión y mejoramiento a través del tiempo, en lugar de una estructura definida compuesta de verdades irrefutables y que no pueden cambiarse.

1.2. LA HISTORIA NOS DA INFORMACIÓN SOBRE LOS ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS

Conocer las dificultades históricas en el desarrollo de las matemáticas (por ejemplo, en el paso del álgebra numérica a la simbólica) permite que los docentes sean conscientes de las dificultades conceptuales que sus estudiantes pueden presentar (al hacer el mismo paso). Por una parte, las respuestas que dan los estudiantes a un problema histórico adquieren un nuevo significado cuando se pueden contrastar con las dadas por los matemáticos a través del tiempo. Este último aspecto ha llevado a algunos investigadores a introducir en la Didáctica de las Matemáticas la noción de obstáculo epistemológico.

El concepto de obstáculo fue introducido por Bachelard (1987) y fue trasladado al campo de la didáctica de las matemáticas por Brousseau (1983 y 1997), que le dio un sentido muy determinado:

> Los errores no solamente son efecto de la ignorancia (…) sino el efecto de un conocimiento previo que era interesante y exitoso, pero que ahora se revela como falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo (…) constituyen los obstáculos. (BROUSSEAU, 1997, p. 8)

Para poder hablar de obstáculo, según Brousseau, se tienen que cumplir las condiciones siguientes: 1) Un obstáculo es un conocimiento. Por lo tanto, no es una falta de conocimiento. 2) El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas correctas en determinadas situaciones que encuentra con cierta frecuencia. 3) Cuando se utiliza este conocimiento en otro contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigirá un punto de vista diferente. 4) El alumno se resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al cambio del conocimiento antiguo por uno nuevo. 5) A pesar de que el alumno es consciente de las limitaciones del conocimiento-obstáculo, lo continúa manifestando esporádicamente.

Brousseau considera que los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser: a) De origen ontogenético o psicogenético, causados por el desarrollo psicológico del alumnado. b) De origen didáctico, provocados por las elecciones didácticas que se han hecho para diseñar la situación didáctica. c) De origen epistemológico, intrínsecamente relacionados con el contenido matemático. Estos últimos se pueden encontrar en la historia de los contenidos, aunque no es necesario reproducir en el aula las condiciones históricas que permitieron superarlos. Como ejemplo de obstáculo epistemológico D’Amore (2008, p. 8) aporta el siguiente:

> La comprensión de los números naturales exige, por ejemplo, un cierto modo de concebir estos números y sus operaciones: un número natural como 4 tiene un sucesivo, su producto por otro número natural será más grande que éste etc. Algunas de estas propiedades pueden dar origen a errores cuando 4 es un número racional: por ejemplo, no se puede hablar de sucesivo. Pero el estudiante no se da cuenta de este pasaje y continúa a “forzar” las propiedades de N también en Q; es por esto que se encuentran estudiantes que afirman, en Q, que 2.33 es el sucesivo de 2.32,

> confirmado incluso por algunos libros de texto. Además, por ejemplo, 0.7 × 0.8 = 0.56 donde 0.56 es menor que cada uno de los factores, es una novedad desconcertante que pone en crisis el conocimiento adquirido precedentemente.

La noción de obstáculo, y muy especialmente la noción de obstáculo epistemológico, no es muy clara para algunos investigadores y ha generado controversia (ARTIGUE, 1990; SIERPINSKA, 1988; FONT, 2000).

1.3. LA REFLEXIÓN SOBRE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS PERMITE EXPLICITAR LA COMPLEJIDAD ASOCIADA DE LA EMERGENCIA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La historia de las matemáticas juega un papel importante en los estudios epistemológicos que se interesan por el estudio de la complejidad de los objetos matemáticos y su emergencia a partir de las prácticas, así como en las implicaciones que tiene dicha complejidad para la enseñanza de una determinada noción matemática.

En Font y Peraire (2001), por ejemplo, se realiza un estudio histórico-epistemológico de la cisoide para ilustrar la complejidad de las relaciones que se establecen entre un objeto matemático, sus ostensivos asociados, las técnicas que permiten manipular estos ostensivos y las situaciones en las cuales se usa el objeto (conjuntamente con sus ostensivos y técnicas asociadas) para organizar fenómenos. Las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto matemático son el resultado de una larga evolución en la cual, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación. Estudios como este ponen de manifiesto la ingenuidad del punto de vista que considera a los ostensivos simplemente como significantes de objetos matemáticos a-históricos.

Otro ejemplo ilustrativo (por el hecho de ser un contenido nuclear en las matemáticas) es el caso de las funciones. Varios trabajos −Arenzana (1997); Azcárate y Deloufeu (1990); Bos (1984); Font (2000); Font, Vanegas, Ferreres, Carvajal y Adán (2012); Lacasta y Pascual (1998); Youschkevitch (1976)− ponen de manifiesto que el objeto matemático función es el resultado de una emergencia que se ha producido a lo largo de mucho tiempo. La reflexión sobre esta complejidad aporta, según Font et al. (2012) sugerencias importantes para la enseñanza de las funciones, como las siguientes:

a) De las magnitudes a las variables: Una primera consideración que nos proporciona la complejidad del objeto matemático función es que históricamente la función primero se consideró como una relación entre magnitudes y después como una relación entre variables.

b) Regla de asignación y dominio: La idea que una función es una dependencia entre variables que a cada valor de la variable independiente le hace corresponder un único valor de la variable dependiente lleva a pensar en la función básicamente como una regla de asignación. Ahora bien, la interpretación de la función como una terna (A, B, G) lleva a considerar que dos funciones con la misma regla de asignación no son necesariamente la misma función, por lo tanto la visión conjuntista de las funciones aporta un matiz interesante a la conceptualización de la función.

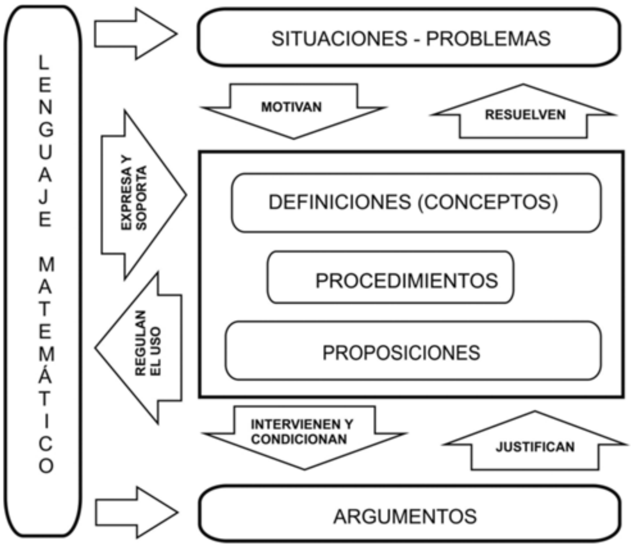
c) Diferentes formas de representación: Janvier (1987), en sus trabajos sobre el concepto de función considera que las representaciones asociadas al concepto de función se pueden clasificar en cuatro tipos (expresión analítica, tabla, gráfica y expresión verbal) que, aunque idealmente contienen la misma información, ponen en función diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La representación gráfica conecta con las potencialidades conceptuales de la visualización y se relaciona con la geometría y la topología. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres. Ahora bien, el análisis histórico del desarrollo de la noción de función sugiere que, además de pensar en los procesos cognitivos que puede activar una determinada representación, hay que pensar en la representación como una herramienta que posibilita prácticas que sin ella no serían posible.

Cada una de las cuatro formas de representar una función (enunciado, tabla, fórmula y gráfica) tiene una génesis histórica diferente. Por ejemplo, las curvas son presentes en toda la historia de las matemáticas, pero hay un momento histórico en que se plantea claramente el paso del gráfico a la expresión simbólica (en el momento del nacimiento de la geometría analítica). Los trabajos de Descartas parten de las dos metáforas clásicas sobre las curvas: las curvas son secciones y las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones, para añadir una tercera: las curvas son la traza que deja un punto que se mueve sujeto a determinadas condiciones (FONT, 2000). El análisis de estas condiciones permite encontrar una ecuación que cumplen los puntos de la curva. Pues bien, un estudio histórico de los métodos y procedimientos que se han utilizado para calcular, por ejemplo, la expresión simbólica a partir de gráficas puede dar ideas utilizables en las aulas.

d) Visión unitaria y sistémica de las funciones: Una de las posibles maneras de concebir el significado de un término, función en nuestro caso, es considerar que este significado es su definición. Esta manera de entender el significado es una forma elemental o unitaria de entender el significado. Otra posible manera de afrontar el problema del significado es hacerlo en términos de uso. Desde esta perspectiva, el significado de un objeto matemático se tiene que entender en términos del que se puede hacer con este objeto matemático. Se trata de una perspectiva pragmatista y sistémica, puesto que se considera que el significado de un objeto es el conjunto de prácticas en las cuales este objeto es determinante (o no) para su realización. Cuando se utilizan las funciones en las prácticas matemáticas, además de su definición, se utilizan diferentes representaciones, se utilizan determinadas características y propiedades, se utilizan otros objetos matemáticos relacionados cómo son las ecuaciones, etc. Un instrumento útil para describir la pluralidad (sin buscar a exhaustividad) de conglomerados de representaciones, definiciones, propiedades, tipos de problemas, etc. que a lo largo del tiempo se han ido sucediendo para el estudio de las funciones es la herramienta configuración epistémica (FONT y GODINO, 2006).

Según estos autores, en el currículum de algunos países los tipos de contenidos que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una clasificación demasiado simplista para analizar un texto matemático y, más en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar. Es necesario contemplar como mínimo los siguientes elementos: 1) notaciones, representaciones (lenguaje), 2) situaciones-problema 3) definiciones, 4) procedimientos, técnicas, etc. 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de elementos se articulan formando configuraciones epistémicas (Figura 1), el análisis de las cuales nos informa de la anatomía de un texto matemático. Se trata de una herramienta que puede ser útil para describir las características de los textos matemáticos de diferentes épocas y orientación epistemológica, en particular resulta útil tanto para el análisis global de una secuencia amplia de tareas cómo para el análisis de un texto puntual.

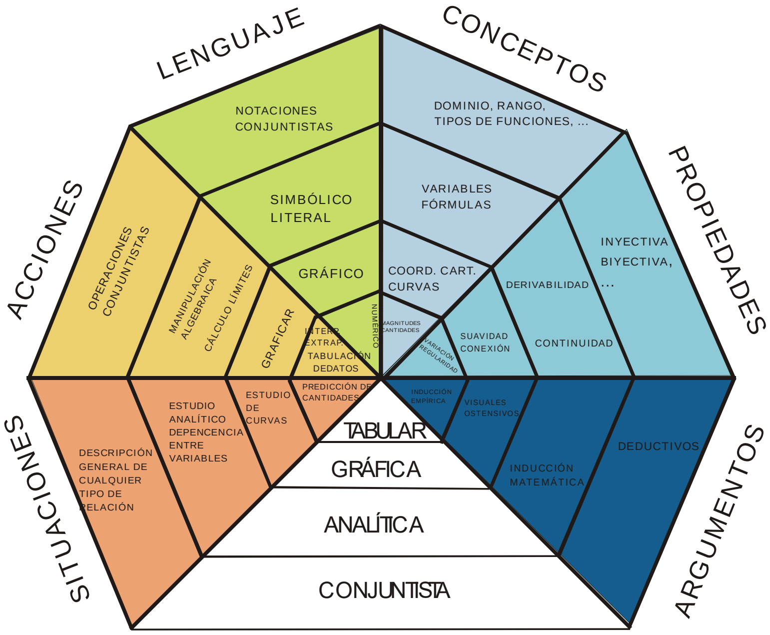
Figura 1- Componentes y relaciones en una configuración epistémica.



(Fuente: FONT Y GODINO, 2006, P. 69)

Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), basándose en el análisis epistemológico y didáctico realizado en Ruiz (1998) para determinar las concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función, consideran que la evolución de esta noción se puede organizar en cuatro configuraciones epistémicas que en la Figura 2 están dispuestas en círculos concéntricos. Esta disposición expresa la progresiva ampliación de los sistemas de prácticas matemáticas asociados a la noción de función, desde planteamientos implícitos/intuitivos (protomatemáticos), hasta la formalización más general mediante la teoría de conjuntos.

Figura 2- Configuraciones epistémicas de la noción de función.



(Fuente: GODINO, BENCOMO, FONT y WILHELMI, 2006, p. 11).

Estas cuatro configuraciones epistémicas que, en cierto modo, resumen el desarrollo de la noción de función se han trasladado, según Font (2007), a los libros de texto mediante dos tipos de configuraciones epistémicas; por una parte tendríamos las configuraciones epistémicas formales (o intra matemáticas) y las empíricas (o extra matemáticas). Las primeras tendrían como referente la configuración epistémica que se ha denominado conjuntista, mientras que las segundas tendrían como referente una combinación de las otras tres. Estos dos tipos de configuraciones epistémicas son las que podemos encontrar en los manuales universitarios y en los libros de texto de secundaria y Bachillerato.

Si bien actualmente es muy difícil encontrar una unidad didáctica sobre las funciones de tipo formalista en la etapa no universitaria, es muy habitual encontrar unidades didácticas que son una degeneración de este modelo. Nos referimos a las unidades didácticas inspiradas en lo que se llama conductismo, instrumentalismo, mecanicismo, etc. Se trata de una presentación descontextualitzada de los conceptos y reglas matemáticas, que se supone que se aprenden con la práctica y no mediante un aprendizaje significativo. Si bien la mayoría de las personas que reflexionan actualmente sobre la Didáctica de las Matemáticas no son partidarias de esta opción, el hecho es que, todavía hoy, muchas de las clases, para no decir la mayoría que se imparten en nuestras aulas, siguen este modelo mecanicista (POCHULU y FONT, 2011). Entre otras razones, porque es el modelo que resulta más fácil a muchos profesores con poca formación matemática, o para aquellos que teniendo una visión algo más amplia, se ven superados por varios tipos de presiones que los inducen a seguir la tradición (estudiantes que esperan que se les enseñe de manera tradicional o que rechazan formas alternativas de enseñanza; autoridades que inducen a cumplir con los programa; la escuela y el entorno social que presiona porque los alumnos tengan éxito en los exámenes de admisión de las universidades, etc.). Esta opción instrumentalista (mecanicista, etc.) presenta casi todos los inconvenientes de la presentación formalista de las matemáticas y ninguna de sus ventajas.

Otro ejemplo lo tenemos con la media aritmética. Esta noción según Rondero y Font (2015) ha participado a lo largo de la historia de las matemáticas en muchas prácticas matemáticas diferentes: (a) el método babilónico y el de Herón de Alejandría para calcular raíces de enteros positivos, (b) el método de Arquímedes para el equilibrio de los cuerpos, y el cálculo de áreas y volúmenes, (c) el método de Merton para estudiar el movimiento uniformemente acelerado, etc. Este conjunto de prácticas se puede parcelar en diferentes subconjuntos de prácticas que se realizan gracias a la activación de determinadas configuraciones epistémicas, algunas de las cuales se pueden considerar como reorganizaciones y generalizaciones de las anteriores. Rondero y Font (2015) identifican para la media aritmética diferentes contextos intramatemáticos y extramatemáticos, a cada uno de los cuales se les asocia un conjunto de prácticas matemáticas y una configuración epistémica que las permite realizar. A estas configuraciones las denominan: a) el método babilónico y de Herón para calcular raíces, (Configuración Epistémica 1); b) el método de Arquímedes sobre el equilibrio de los pesos, principio básico de la estática (CE2); c) sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas (CE3); d) método de Merton para el estudio del movimiento (CE4); y e) cálculo de áreas, métodos de cuadraturas, fórmulas, etc. (CE5). La media aritmética, a lo largo de su evolución histórica, se ha activado implícita o explícitamente en al menos estos cinco subsistemas de prácticas cada uno de los cuales tiene una configuración epistémica asociada. Estas configuraciones, a pesar de ser diferentes entre sí, presentan articulaciones entre ellas, de forma que se pueden relacionar, atendiendo al mayor grado de generalidad.

A continuación resumimos más brevemente la complejidad de algunos otros objetos matemáticos. Para el objeto matemático límite, Contreras, García y Font (2012); García (2008), caracterizan su complejidad (resultado de su evolución histórica) por medio de las siguientes configuraciones epistémicas: geométrica, preinfinitesimal, infinitesimal, numérica, métrico-analítica y topológica.

Para el objeto matemático derivada, Pino-Fan, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones epistémicas: a) Tangente en la matemática griega; b) Variación de la tasa media; c) Métodos algebraicos para encontrar tangentes; d) Concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; e) Ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; f) Métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; g) Cálculo de fluxiones; h) Cálculo de diferencias y, i) Derivada como límite. En Pino-Fan, Castro, Godino y Font (2013) se utilizan estas nueve configuraciones epistémicas para la reconstrucción del significado global de la derivada, el cual es utilizado para valorar la representatividad del significado pretendido en el currículum de Bachillerato de México (a partir de las configuraciones epistémicas activadas en las prácticas matemáticas propuestas tanto en el Plan de Estudios como en los libros de texto de este nivel).

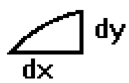
Con relación a la complejidad del objeto integral, Contreras, Ordóñez y Wilhelmi (2010) y Ordóñez (2011) consideran las siguientes configuraciones epistémicas: a) Geométrica, b) Resultado de un proceso de cambio, c) Inversa de la derivada, d) Aproximación al límite, y) Generalizada: (Lebesgue, Riemann, etc.), f) Algebraica, g) Métodos numéricos. Crisóstomo (2012), en su tesis doctoral considera, basándose en la red de configuraciones epistémicas propuesta por Ordóñez (2011), útil distinguir ocho tipos diferentes de configuraciones que designa con los nombres de: intuitiva, primitiva, geométrica, sumatoria, aproximada, extra matemática, acumulada y tecnológica, situando el Teorema Fundamental del Cálculo como un objeto primario central de la configuración epistémica llamada primitiva, aunque también aparece en la geométrica, la sumatoria, la extra matemática y la tecnológica.

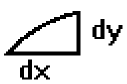
Otros trabajos en los que la complejidad del objeto matemático se tiene en cuenta es en Font, Breda y Seckel (2017) (para el teorema de Tales) y en Monje, Seckel y Breda (en prensa) para las inecuaciones.

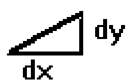
Los ejemplos anteriores, de acuerdo con Font, Godino y Gallardo (2013), nos llevan a considerar que la mirada sobre la complejidad de los objetos matemáticos que nos ofrece la historia permite reformular la visión ingenua de que hay un mismo objeto matemático con diferentes representaciones. Lo que hay es un sistema complejo de prácticas, que permiten resolver problemas, en las cuales uno objeto matemático no aparece directamente, lo que sí que aparece son representaciones del objeto, diferentes definiciones, proposiciones y propiedades del objeto, procedimientos y técnicas que se aplican al objeto y argumentos sobre el objeto matemático. Dicho de otra manera, a lo largo de la historia se han ido generando diferentes configuraciones epistémicas para el estudio del objeto matemático, algunas de las cuales han servido para generalizar a las preexistentes.

1.4. LA HISTORIA COMO FUENTE DE INNOVACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Una consecuencia de la mirada compleja a los objetos matemáticos como se ha expuesto en los párrafos anteriores es que, más que pensar en un objeto matemático unitario, hay que pensar en un conjunto de significados parciales (definiciones, propiedades, procedimientos, etc.), una muestra de los cuales forma parte del currículum, pero también hay una parte que queda fuera, lo que comporta que sea posible generar propuestas de innovación didáctica que consistan en incorporar algunos de los significados parciales que quedan fuera del currículum. Para lo cual, hay que realizar un proceso que va desde la lectura directa de obras de historia de las matemáticas, hasta su utilización para el diseño de una innovación didáctica para la enseñanza-aprendizaje de un determinado contenido matemático. Un ejemplo lo tenemos en la propuesta que se hace en Font (2000) para a la enseñanza de las derivadas en el Bachillerato de España.

De la génesis histórica del cálculo diferencial, en Font (2000) interesa especialmente el periodo anterior al uso del triángulo 

en el cual se utilizaba el triángulo determinado por la ordenada, la tangente y la subtangente, y el triángulo determinado por la ordenada, la normal y la subnormal, es decir el periodo anterior a Barrow. Y también en la primera presentación del concepto de diferencial de Leibniz publicada el año 1684. En este artículo Leibniz propone, en vez del triángulo 

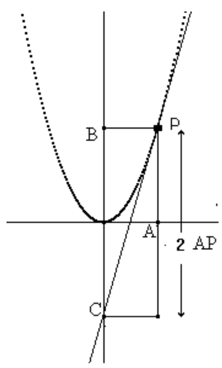
, el triángulo 

donde la hipotenusa es un segmento de la tangente. Esta manera de entender el concepto de diferencial coincide con la actual definición de diferencial, y no con la que utilizaba el mismo Leibniz en sus manuscritos anteriores al año 1684. En estos manuscritos del año 1675, el diferencial se entendía como una cantidad infinitamente pequeña, mientras que en su primera publicación era un segmento finito. El interés en este triángulo está motivado por el hecho que, una vez introducida la interpretación geométrica de la derivada, la utilización por parte del alumno, en una actividad guiada, del triángulo determinado por la ordenada, la tangente y la subtangente o bien del triángulo determinado por la tangente, dx y dy permite calcular la función derivada de algunas funciones elementales sin utilizar límites.

Uno de los aspectos originales de la investigación descrita en Font (2000) es la propuesta de tareas guiadas para calcular funciones derivadas a partir de la observación de una condición que cumplen las tangentes, o bien a partir de un procedimiento que permite construirlas. La propuesta se basa en una de las maneras en que Descartes en la *Geometrie* resuelve el llamado problema de las tangentes: encontrar un método que permitiera construir la normal y la tangente en un punto de una curva dada; y su problema inverso: determinar una curva a partir de una propiedad que cumplen todas las tangentes.

En el siglo XVII el problema de encontrar la tangente se entendía de una manera bastante diferente de como se explica actualmente. En el siglo XVII lo que interesaba no era la ecuación de la recta tangente o de la normal, sino encontrar un procedimiento que permitiera dibujar la normal y la tangente (o más exactamente la subnormal y la subtangente) en un punto de una curva dada. Lo que interesaba era encontrar procedimientos del tipo siguiente (Figura 3): para dibujar la tangente a la parábola $f(x) = x^2$ en un punto basta unir el punto de la curva con un punto del eje de ordenadas C tal que la longitud del segmento CB sea el doble de la longitud del segmento AP.

Figura 3: Recta tangente a la parábola $f(x) = x^2$



(Fuente: FONT, 2000, p. 211).

El problema inverso de las tangentes consistía en encontrar una curva a partir de una propiedad que cumplían las tangentes. En este caso se ha de expresar la condición en forma de ecuación diferencial y después encontrar la fórmula de la curva utilizando métodos de integración.

Una de las conclusiones del estudio del cálculo infinitesimal del siglo XVII realizado en Font (2000) es que es posible diseñar actividades de enseñanza-aprendizaje inspiradas en la manera que tenían los matemáticos del siglo XVII de entender el problema de la tangente y de su inverso, gracias a algunos programas informáticos actuales que permiten dibujar simultáneamente la curva y la tangente a la curva en un punto, de forma que los alumnos pueden realizar acciones sobre este punto y observar invariantes de sus acciones (como, por ejemplo, *Geogebra*).

En Font (2000) se propone una innovación que consiste en considerar construcciones como la de la figura anterior, que está a mitad de camino entre el problema de la tangente y su inverso. No es exactamente el problema de la tangente, porque aquí ya la tenemos construida, ni es el problema inverso porque sabemos la expresión simbólica de $f(x)$. Estas construcciones permiten las acciones de los alumnos con objeto de encontrar una condición que cumplan todas las tangentes (utilizando el triángulo formado por la ordenada, la tangente y la subtangente). La simbolización de esta condición lleva a establecer una ecuación diferencial (en sentido amplio) que permite calcular $f\,'(x)$ sin necesidad de utilizar el cálculo integral. La segunda idea fue presentar al alumno la gráfica de una función y un procedimiento para dibujar la recta tangente. La simbolización de los pasos del procedimiento también lleva a establecer una ecuación diferencial (en sentido amplio) que permite calcular $f\,'(x)$ sin necesidad de utilizar el cálculo integral.

2. ASPECTOS HISTÓRICOS PRESENTES EN LAS PROPUESTAS DE INNOVACIÓN CONTEMPLADAS EN TRABAJOS DE FIN DE MÁSTER DE PROFESORES DE BÁSICA DE MATEMÁTICAS

Esta segunda parte tiene por objetivo determinar qué uso se hace de la historia en una situación en la que los profesores tienen que proponer una innovación didáctica y la tienen que justificar. Más en concreto, ésta segunda parte tiene como objetivo comprender qué papel tiene, en las propuestas de innovación para la enseñanza básica –presentadas en los trabajos de conclusión del curso (TFM) realizados en Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional, Brasil−, la incorporación de aspectos históricos. Para ello, se realizó un estudio cualitativo de veintinueve trabajos.

2.1 CONTEXTO INSTITUCIONAL: MÁSTER PROFESIONAL EN MATEMÁTICAS EN LA RED NACIONAL, BRASIL

En un intento de responder al objetivo dieciséis de la ley 13.005 / 2014 del Plan Nacional de Educación (PNE) -conseguir que en el año de 2020 el cincuenta por ciento de los maestros de educación básica logren una formación en postgrado (BRASIL, 2014)- se inició en 2010, el Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT), a través de la recomendación del Consejo Técnico-Científico de Educación Superior de la Capes.

Este máster es semipresencial y se ofrece en todo el territorio nacional de Brasil, está coordinado por la Sociedad Brasileña de las Matemáticas (SBM), y tiene como objetivo principal atender a los maestros de matemáticas que trabajan en la enseñanza básica, especialmente en las escuelas públicas. Su objetivo es la mejora de su formación profesional, con énfasis en el dominio profundizado del contenido matemático relevante para su desempeño docente, de acuerdo con la misión estatutaria de la SBM "estimular la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles." En este sentido, tiene como objetivos principales (BRASIL, 2013a; 2013b):

1. Estimular la mejora de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles.
2. Calificar a los profesores de matemáticas que trabajan en la enseñanza básica con un nivel de posgrado, con énfasis en el dominio profundizado de los contenidos matemáticos, ofreciendo un curso de formación profesional que se ocupa de las necesidades derivadas del trabajo diario en el día a día de la escuela;

3. Fomentar una actitud crítica sobre las clases de matemáticas en los niveles de educación primaria y secundaria, subrayando el papel central de los conocimientos de las matemáticas para afrontar las demandas de la sociedad moderna;

4. Buscar el desarrollo profesional de los docentes mediante la mejora de su formación.

Con el fin de contribuir a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, los profesores que realizan este máster deben materializar sus conocimientos en un proyecto de fin de carrera, que aquí llamaremos Trabajo Final de Máster (TFMC) que busca la interrelación entre el conocimiento teórico y práctico. Por esta razón, las orientaciones del PROFMAT dicen que este TFM debe tener un tratamiento innovador en la enseñanza de los temas del currículo de matemáticas de la educación básica y que, de preferencia, tenga aplicación directa en el aula, lo que contribuye al enriquecimiento de la enseñanza de la disciplina (BRASIL, 2013a).

En Breda (2016); Breda, Lima y Pereira (2015); Breda, Font y Lima (2015a y 2016); Breda y Lima (2016), Breda, Pino-Fan y Font (2016 y 2017) se realiza un estudio de las propuestas de innovación presentadas en los TFM del Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional (PROFMAT), con el objetivo general de determinar cuáles son y cómo se justifican las innovaciones presentadas en estos TFM. Aunque el Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional se ofrezca en todo Brasil, el estudio realizado en estos trabajos se ha restringido al análisis de los TFM en el estado de Rio Gran del Sur. En concreto se seleccionaron veintinueve TFM realizados y publicados en el estado de Rio Grande do Sul, desde el primer semestre de 2013 hasta el segundo semestre de 2014. Este estado participa del programa con dos universidades (Universidad Federal de Santa María y la Universidad Federal de Río Grande) y en el periodo considerado presenta un número de producciones razonable (veintinueve TFM) de manera que se pueden inferir conclusiones.

En estos trabajos de investigación se partió de la suposición de que el TFM era un espacio formativo claramente valorativo, ya que los profesores tenían que presentar una propuesta de mejora y tenían que realizar un análisis didáctico para justificar su calidad. Por otra parte, tomaron como punto de partida las siguientes regularidades observadas en investigaciones anteriores (BREDA, PINO-FAN y FONT, 2017):

1. Los profesores o futuros profesores, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula implementado por otro profesor, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.

2. Cuando las opiniones son claramente valorativas, se organizan de manera implícita o explícita mediante algunos indicadores de los componentes de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS (GODINO, BATANERO y FONT, 2007 y 2008) (idoneidad epistémica, mediacional, ecológica, emocional, interaccional y cognitiva) (BREDA, FONT y LIMA, 2015b; BREDA, FONT y PINO-FAN, en prensa).

3. La valoración positiva de estos indicadores se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las

matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

El análisis de los datos, de carácter cualitativo, se desarrolló en dos etapas: en la primera, se clasificaron los 29 TFM según el tipo de innovación (incorporación de las TIC, conexiones intramatemáticas, etc.) y la fase del proceso de instrucción contemplado (planificación, implementación y rediseño). En la segunda etapa, se analizaron las razones que los autores de los TFM utilizaban para justificar la calidad de la innovación que proponían. Para ello, se seleccionaron evidencias que muestran el uso explícito o implícito de algunos de los componentes e indicadores de los diferentes criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS (BREDA, FONT y LIMA, 2015b; BREDA, FONT y PINO-FAN, en prensa).

Los resultados de la primera etapa muestran que los profesores tienen en cuenta, básicamente, tres tipos de innovación: i) matemática, en la cual se contempla la incorporación de contenidos de nivel superior en la Educación Básica, o bien el establecimiento de conexiones intramatemáticas o extramatemáticas; ii) de recursos, que se caracteriza por la incorporación de materiales visuales y manipulativos y la incorporación de recursos informáticos; iii) en valores, donde se introduce el pensamiento crítico y la ciudadanía. Es decir, asumen de manera implícita que las propuestas de unidades didácticas que siguen ciertas tendencias (por ejemplo, la incorporación de recursos informáticos) son propuestas que representan una mejora respecto a la forma habitual de enseñar los contenidos de estas unidades didácticas. En relación con la fase del proceso de instrucción contemplada, trece de los TFM presentan la planificación de una secuencia didáctica, 11 realizan la implementación, sólo uno incluye el rediseño y cuatro no presentan ningún proceso de instrucción.

En relación con los criterios de idoneidad utilizados por los autores para justificar que sus propuestas promueven una mejora en la enseñanza de las matemáticas, se observó, sobre todo, el uso de los criterios de idoneidad epistémica y ecológica y, en menor medida, el criterio mediacional; sin embargo, otros criterios como el cognitivo, emocional e interaccional, o no fueron contemplados o bien se utilizaron con poca profundidad. Finalmente, hay que destacar que los profesores que implementaron su propuesta didáctica en el aula realizan un análisis didáctico más detallada en comparación con los profesores que no lo hicieron, puesto que: i) manejan un mayor número de criterios, ii) los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad que utilizan, se infieren a partir de argumentaciones que muestran un alto nivel de reflexión y iii) se muestran preocupados para conseguir un equilibrio entre los diferentes criterios (epistémico, cognitivo, mediacional, interaccional, emocional y ecológico).

2.2. OBJETIVOS Y METODOLOGIA DE LA INVESTIGACIÓN

Aquí presentamos una segunda mirada al estudio de caso múltiple de tipo naturalista descrito en la sección anterior, la cual pretende investigar qué papel tiene, en las propuestas de innovación para la enseñanza básica –realizadas en los trabajos de conclusión del curso (TFM) realizados en Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional, Brasil– la incorporación de aspectos históricos. Para ello es necesario buscar información sobre las siguientes preguntas: ¿Cuántos TFM incorporan la introducción de aspectos históricos en sus propuestas de innovación? ¿Cuáles son los contenidos incluidos en estas propuestas? ¿Qué argumentos utilizan, los autores, para justificar que dicha incorporación es una mejora de la enseñanza de las matemáticas?

Para el análisis de los TFM se ha utilizado una metodología de investigación cualitativa, de acuerdo con Ludke y André (1986), que se basa en la comprensión e interpretación de los datos. Dicho análisis se ha realizado teniendo en cuenta dos fuentes, una primaria (los 29 TFM) y otra secundaria que son otros análisis ya realizados sobre estos mismos 29 TFM. Se trata de los artículos citados en la sección anterior (BREDA, 2016; BREDA, LIMA y PEREIRA, 2015; BREDA, FONT y LIMA, 2015a y 2016; BREDA y LIMA, 2016; BREDA, PINO-FANT y FONT, 2016 y 2017).

2.3. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Con relación a la cantidad de trabajos que incorporan aspectos históricos en sus propuestas de innovación didácticas, nos encontramos con que, de los 29 trabajos publicados, 7 proponen dicha incorporación (aproximadamente la cuarta parte de los TFM del estado de Rio Gran del Sur). El análisis realizado permite concluir la siguiente tipología de usos: a) Utilización de un contexto histórico como pretexto motivador, b) Uso de problemas que fueron relevantes en un determinado momento histórico y c) incorporación de contenidos matemáticos de otra época en las propuestas de innovación.

Aunque, de alguna manera, ocho de los veintinueve trabajos finales de curso incorporen la introducción de aspectos históricos en sus propuestas, sólo siete de ellos presentan alguna de las fases del proceso de instrucción (planificación, implementación y rediseño). La mayoría (cuatro de ellos) contempla la planificación y la implementación, tres tienen solamente la planificación y ninguno de ellos presenta rediseño de la secuencia didáctica. A continuación, se presentan un resumen de un TFM de cada una de las tres categorías comentadas y después se profundiza en la primera tipología que es la que se tuvo especialmente en cuenta en la tesis doctoral de Sala (2016):

Utilización de un contexto histórico como pretexto motivador

Rodrigues (2014) en su TFM titulado *Uma abordagem para o problema do mapa do tesouro aplicado ao ensino da geometria* pretende conectar la realidad con la geometría a partir de una situación-problema contextualizada. Dicho problema trata de la historia de un tesoro que fue enterrado en una isla y que, después de mucho tiempo, fue encontrado por unos exploradores que decidieron ir a desenterrarlo a la isla. Pero al llegar al lugar tuvieron una desagradable sorpresa, pues los árboles que figuraban en el mapa ya no estaban allí, lo cual obligó a los exploradores a buscar una estrategia para resolver el problema. La propuesta pedagógica, constituida por cuatro actividades, fue aplicada con un grupo de alumnos de Enseñanza Secundaria en una escuela privada. La metodología consistió en trabajar con los alumnos la resolución del problema de tres maneras distintas: la primera a través del uso del GeoGebra, la segunda por Geometría Analítica y la tercera utilizando Números Complejos. El autor concluye que el uso de un contexto histórico junto a la metodología comentada generó un contexto motivador para los estudiantes que les llevó a realizar una indagación con una alta demanda cognitiva.

Uso de problemas que fueron relevantes en un determinado momento histórico

R. bras. Ens. Ci. Tecnol., Ponta Grossa, v. 10, n. 3, p. 16-42, set./dez. 2017.

D'Acampora (2014) en su TCC titulado *Soluções dos três problemas clássicos da matemática grega por curvas mecânicas*, a partir de um abordaje histórico, desarrolla una reflexión sobre la resolución de tres problemas clásicos de geometría: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo. El autor propone el trabajo a cualquier profesor interesado en profundizar en estos problemas y concluye que son importantes por su posible utilización en la Enseñanza Secundaria. Según el autor, tanto las construcciones geométricas como las soluciones de los problemas se pueden transponer a esta etapa. En particular, para explorar la idea del área (de polígonos y del círculo), los números irracionales , la espiral de Arquímedes en el problema de la cuadratura del círculo y, además, las proporciones y el volumen a través del problema de la duplicación del cubo por medio del método de reducción de Hipócrates (convertir el problema en otro de equivalente).

Incorporación de contenidos matemáticos de otra época en las propuestas de innovación

El trabajo Mohnsam (2014), *titulado La contribución de Arquímedes a lo cálculo de áreas*, es una propuesta innovadora para introducir, a partir de la resolución de problemas y el uso del *GeoGebra*, el cálculo de una área bajo una curva, conforme las contribuciones de Arquímedes. El TCC presenta primero una aproximación histórica a Arquímedes y a su obra para, después, explicar el método de las palancas para la cuadratura de parábolas (método de descubrimiento) y el método de exhaución (método de demostración). Seguidamente, el autor explica el método de Arquímedes para calcular el área bajo la parábola y = x2, entre 0 y un valor b (entero), y lo compara con los métodos usados por Pascal, Fermat y Riemann. También dedica un capítulo a realizar estimaciones de error en los cálculos de áreas bajo de curvas que muestran, que si se aumenta el número de divisiones y se añaden más rectángulos el resultado es más preciso. El autor concluye que las ideas de Arquímedes son intuitivas y, en consecuencia, pueden ser utilizados por los estudiantes de secundaria para estudiar el área bajo una curva si se utilizan recursos computacionales como el *Geogebra*. En concreto, propone tareas que permiten ver a los alumnos que en el cálculo aproximado de áreas limitadas por curvas, que son gráficos de funciones, si se aumenta el número de rectángulos interiores y exteriores se obtiene una aproximación cada vez más precisa.

Consideraciones sobre estas tres categorías

En las tres tipologías consideradas las justificaciones para la incorporación de aspectos históricos son diferentes. En el primer tipo, donde el contexto histórico es un pretexto, la justificación para su incorporación está relacionada, sobre todo, con aspectos motivacionales. Los autores justifican que su propuesta fomenta el interés y la implicación de los alumnos para comprometerse en un proceso de indagación. En cambio, en los otros dos casos si bien se contemplan también ventajas motivacionales, el énfasis se pone en que las propuestas innovadoras permiten : 1) nuevas formas de relacionar y acercar los contenidos matemáticos, 2) la realización de procesos matemáticos relevantes (por ejemplo, la generalización, la modelación de situaciones extramatemáticas, establecimiento de relaciones intramatemáticas, de significación, etc.).

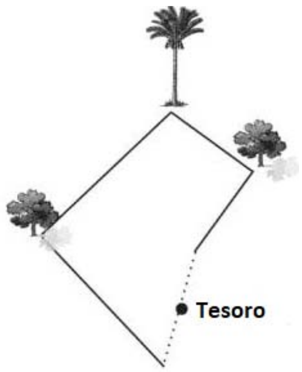
3. EL PAPEL DEL CONTEXTO HISTÓRICO CUANDO SE UTILIZA COMO ELEMENTO MOTIVADOR

Tal como se ha dicho en la sección anterior, Rodrigues (2014) en su TFM titulado *Uma abordagem para o problema do mapa do tesouro aplicado ao ensino da geometría* pretende conectar la realidad con la geometría a partir de una situación-problema contextualitzada, presentando una situación que él dice que resultó muy motivadora para los alumnos.

El problema original (BARBEAU, 1989) que sugirió el problema del tesoro de este TFM proporciona instrucciones para hallar el tesoro enterrado en una isla. La dificultad reside en el hecho de que el punto de partida para comenzar a seguir las instrucciones es desconocido:

Figura 4- Problema original del tesoro

Un tesoro fue enterrado en una isla y se hizo un mapa de su ubicación. Las instrucciones del mapa dicen, al llegar a la isla, se puede ver inmediatamente dos grandes robles, así como una palmera, como se muestra a la figura siguiente:



El tesoro está enterrado en un lugar que se puede encontrar siguiendo las siguientes instrucciones:

1) A partir de la palmera, andar hasta el roble que está más cerca, contando los pasos.

2) Cuando estás en el roble, tienes que girar a la derecha en ángulo recto y andar el mismo número de pasos y después marcar el punto.

3) Volviendo a la palmera, anda hasta el otro roble, contando los pasos; después gira a la izquierda en ángulo recto y anda el mismo número de pasos, haciendo una marca en esta posición.

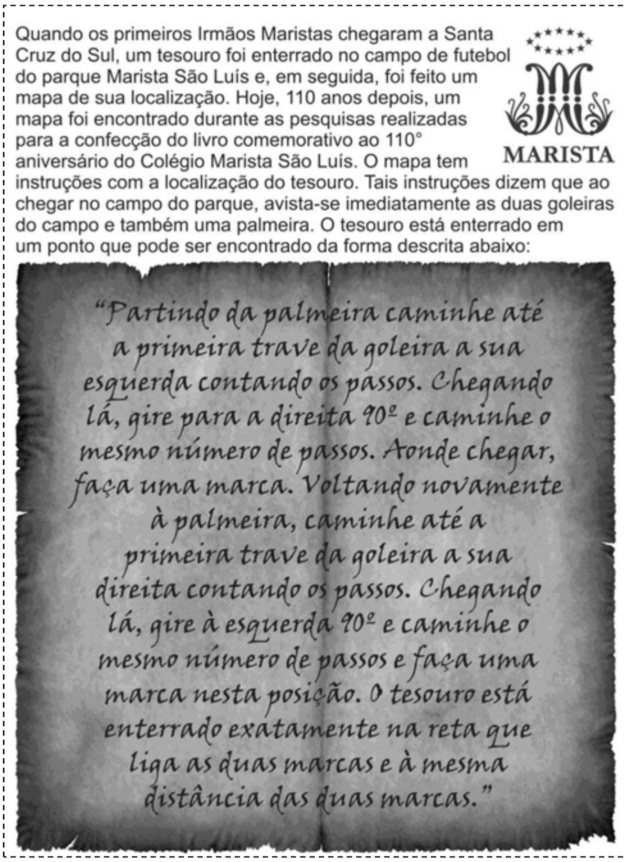
4) El tesoro está enterrado exactamente en la línea que conecta las dos marcas y a la misma distancia de las dos marcas.

Este mapa del tesoro, después de mucho tiempo, fue encontrado por unos exploradores que decidieron ir a desenterrarlo a la isla. Pero al llegar al lugar tuvieron una desagradable sorpresa, puesto que los árboles que figuraban en el mapa ya no estaban, lo cual obligó a los exploradores a buscar una estrategia para resolver el problema. ¿Cómo lo hicieron?

(Fuente: RODRIGUES, 2014, p. 23).

El problema original se adaptó a la realidad de los estudiantes, los cuales acabaron resolviendo el problema de tres maneras diferentes: a través del uso del *GeoGebra*, usando la geometría analítica y, finalmente, utilizando números complejos. El problema se presentó a los alumnos como un hallazgo histórico de otro tiempo, además, se rodeó de diferentes consideraciones históricas sobre la importancia de la geometría en las civilizaciones antiguas, una breve biografía de Descartes y de Fermat y un comentario sobre los números complejos. El autor del TFM optó para adaptar el problema del tesoro al espacio físico del centro escolar donde implementó su propuesta innovadora, en concreto lo adaptó al campo de fútbol del centro de la manera siguiente:

Tabla 1: Instrucciones de la adaptación del problema del mapa del tesoro

 Quando os primeiros Irmãos Maristas chegaram a Santa Cruz do Sul, um tesouro foi enterrado no campo de futebol do parque Marista São Luís e, em seguida, foi feito um mapa de sua localização. Hoje, 110 anos depois, um mapa foi encontrado durante as pesquisas realizadas para a confecção do livro comemorativo ao 110° aniversário do Colégio Marista São Luís. O mapa tem instruções com a localização do tesouro. Tais instruções dizem que ao chegar no campo do parque, avista-se imediatamente as duas goleiras do campo e também uma palmeira. O tesouro está enterrado em um ponto que pode ser encontrado da forma descrita abaixo: MARISTA "Partindo da palmeira caminhe até a primeira trave da goleira a sua esquerda contando os passos. Chegando lá, gire para a direita 90º e caminhe o mesmo número de passos. Aonde chegar, faça uma marca. Voltando novamente à palmeira, caminhe até a primeira trave da goleira a sua direita contando os passos. Chegando lá, gire à esquerda 90º e caminhe o mesmo número de passos e faça uma marca nesta posição. O tesouro está enterrado exatamente na reta que liga as duas marcas e à mesma distância das duas marcas."	Cuando los primeros hermanos maristas llegaron a Santa Cruz don Sul, un tesoro fue enterrado en el campo de fútbol Sant Lluís Marista Park. Los hermanos elaboraron un mapa de su ubicación. El mapa fue encontrado durante los preparativos realizados para la producción del libro conmemorativo del 110 aniversario de la escuela. Las instrucciones dicen: al llegar a la pista de fútbol, uno puede ver inmediatamente las dos porterías y también una palmera. El tesoro está enterrado en un lugar que se puede encontrar en la forma que se describe a continuación: A partir de la palmera, camina hasta la portería que está más cerca, contando los pasos. Cuando estás en la

	portería, tienes que girar a la derecha en ángulo recto y andar el mismo número de pasos y después marcar el punto. Volviendo a la palmera, camina hasta la otra portería, contando los pasos; después gira a la izquierda en ángulo recto y anda el mismo número de pasos, haciendo una marca en esta posición. El tesoro está enterrado exactamente en la línea que conecta las dos marcas y a la misma distancia de las dos marcas.

(Fuente: RODRIGUES, 2014, p. 28).

Tal como el autor del TFM explica, se formaron grupos de tres alumnos y fueron al campo de fútbol a buscar el tesoro, pero se encontraron en una sorpresa; no había la palmera. Naturalmente esto se había planificado expresamente para obligar a los alumnos a buscar una solución (de hecho el problema está pensado de forma que el punto inicial no tiene ninguna importancia, puesto que la solución es la misma con independencia de qué punto de partida que se coja).

Ahora bien, lo que se consideró como un aspecto muy relevante para la investigación posterior que realizó Sala (2016) sobre el uso de contextos históricos para la enseñanza de las matemáticas fue la reacción de algunos alumnos. En particular, primero buscaron una palmera (primero grande y después pequeña) y en algún caso decidieron coger como punto de partida un tronco de un árbol cortado que parecía que se había cortado hacía mucho tiempo, argumentando que cómo hacía mucho tiempo que se había enterrado el tesoro, era plausible suponer que la palmera de las instrucciones fuera aquel tronco de árbol. Para la posterior investigación de Sala (2016) éste fue un dato clave, puesto que el profesor había pensado en el contexto como un elemento motivador y había dedicado mucho tiempo y esfuerzos para conseguir un contexto que fuera verosímil por los alumnos (cómo se ve en la Tabla 1), pero en el fondo era un pretexto puesto que el contexto no jugaba ningún papel decisivo. Ahora bien, los alumnos sí que utilizaban la información histórica del contexto como un elemento esencial para la resolución del problema. Esta conclusión llevó en la investigación de Sala (2016) a la decisión de diseñar la siguiente tipología de secuencias didácticas donde tanto las matemáticas como el contexto histórico tuvieran un papel relevante a la vez que motivador:

1) El contexto histórico como generador de una investigación donde las matemáticas son relevantes pero no determinantes: la secuencia didáctica *Vivir en Baetulo* (SALA, GIMÉNEZ y FONT, 2013; SALA, 2016).

2) El contexto histórico como suministrador de información y como generador de una investigación donde las matemáticas son utilizadas de manera determinante: la secuencia didáctica *Valorando los hechos de 1714* y su rediseño *1714, los datos de la derrota* y el contexto histórico aporta información significativa, pero no determinante (SALA y BARQUERO, 2015; SALA, 2016).

3) El contexto histórico como generador de una investigación donde, tanto las matemáticas como el mismo contexto histórico, son utilizados de manera determinante: *¿Qué escoden estas ruina?* y su rediseño en forma de c-book (SALA, 2016; SALA, FONT, GIMENEZ y BARQUERO, 2017).

RECONOCIMIENTO

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2015-64646-P, (MINECO/FEDER, UE)

HISTORICAL ASPECTS PRESENT IN THE INNOVATION PROPOSALS OF MATHEMATICS BASIC TEACHERS

ABSTRACT

In the first part of this article a reflection is made on some aspects in which the history of mathematics is relevant to the teaching of this discipline. The second part consists of a multiple case study - in a forming device in which teachers have to submit an innovative proposal and have to justify - to see what use teachers make of the history of mathematics and, more generally, of history. The analysis of the case study allows us to conclude the following types of uses of history of mathematics: a) Use of a historical context as a motivating pretext, b) Use of problems that were relevant at a certain historical moment and c) Incorporation of mathematical contents from other eras in the innovation proposals. In the third part it delves into the use made history on the first typology.

KEY WORDS: History of mathematics, motivation, Master's Thesis, Innovation.

REFERENCIAS

ARENZANA, V. Evolución del concepto de función hasta comienzos del siglo xix. Algunas sugerencias pedagógicas. **EPSILON**, V.13(1), 67-77, 1997

ARTIGUE, M. Epistémologie et didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, V.10(2-3), 243-285, 1990.

AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. **Funciones y gráficas**. Madrid, España: síntesis, 1990.

BACHELARD, G. **La formación del espíritu científico**. Ciudad de México, México: editorial siglo XXI, 1987.

BARBEAU, E. J**. Polynomials**. Springer-verlag, berlin, 1989

BARBIN, E.; BAGNI, G.; GRUGNETTI, L..; KRONFELLNER, M.; LAKOMA, E.; MENGHINI, M. Integrating history: research perspectives. In Fauvel, J. & Van Maanen, J. (ed.), **History in mathematics education** (pp. 63 – 77). Paises Bajos: kluwer academic publishers, 2000.

BAUMGART, J. K.; DEAL, D. E.; VOGELI, B. R; HALLERBERG, A. E, (Eds.), **Historical Topics for the Mathematics Classroom**, Reston, United States of America: NCTM 1989.

BOS, H. J. M. **Newton, Leibniz y la tradición Leibniziana. En Grattan-Guinness (comp.), Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910**. Una introducción histórica (pp. 69-124). madrid: alianza universidad, 1984

BRASIL. 2013a. Uma análise quali-quantitativa de perfis de candidatos ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). **Relatório final do procedimento de análise quali-quantitativa de perfis de candidatos e aprovados no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)**, SBM, 2013a.

BRASIL. 2013b. **Avaliação suplementar externa do programa de mestrado profissional em matemática em rede nacional (PROFMAT)***,* CAPES, 2013.

BRASIL. 2014. Lei Nº 13.005. **Aprova o Plano Nacional de Educação (PNE) e dá outras providências**. Ministério da Fazenda (MF); Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão (MP); Ministério da Educação (MEC), 25 de junho de 2014.

BREDA, A. **Melhorias no ensino de matemática na concepção de professores que realizam o mestrado profmat no rio grande do sul: uma análise dos trabalhos de conclusão de curso**. 2016. 326f. Tesis (Doctorado en Educación en Ciencias y Matemáticas)-Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

BREDA, A., FONT, V., LIMA, Valderez M. Análise das Propostas de Inovação nos Trabalhos de Conclusão de Curso de um Programa de Mestrado Profissional em Matemática. **AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 10(2), 53-72, 2016.

BREDA, A.; LIMA, Valderez M. R. Estudio de Caso Sobre el Análisis Didáctico Realizado en un Trabajo Final de un Máster para Profesores de Matemáticas en Servicio. **REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education**, v. 5, n. 1, p. 74-103, 2016.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, Valderez M. R. Propuestas de Incorporación de Contenidos Matemáticos de Nivel Superior en la Educación Básica: un Estudio de los Trabajos Finales de Curso del Máster Profesional en Matemáticas en la Red Nacional. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, V. 8(3), 136-148, 2015A. DOI:10.3895/RBECT.V8N3.3189.

BREDA, A.; FONT, V.; LIMA, Valderez M. R. A Noção de Idoneidade Didática e Seu Uso na Formação de Professores de Matemática**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, V. 8(2), 4-41.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Criterios Valorativos y Normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el Caso del Constructo Idoneidad Didáctica. **BOLEMA** (en prensa).

BREDA, A.; LIMA, Valderez M. R.; PEREIRA, M. V. Papel das Tic nos Trabalhos de Conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional: o Contexto do Rio Grande do Dul. **Práxis Educacional**, V. 11(19), 213-230, 2015.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Establishing Criteria for Teachers�ummary Reflection on Their Own Practices. In Csíkos, C., Rausch, A., Szitányi, J. (Eds.), **Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (Vol. 1, PP. 283). Szeged, Hungary: PME, 2016.

BREDA, A.; PINO-FAN, L.; FONT, V. Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the Reflection and Assessment on Teaching Practice. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 13(6), p. 1893-1918, 2017.

BROUSSEAU, G. Les Obstacles Epistemologiques et les Problèmes en Mathèmatiques. **Recherches en Didactique des Mathematiques**, v. 4(2), p. 165-198, 1983.

BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques**. Dordrecht, Holanda: Kluwer, 1997.

CONTRERAS, A.; GARCÍA, M.; FONT, V. Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. **BOLEMA**, v. 26(42B), 667-690, 2012.

CONTRERAS, A.; ORDÓÑEZ L.; WILHELMI, M. Influencia de las Pruebas de Acceso a la Universidad en la Enseñanza de la Integral Definida en el Bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 28(3), 367-384, 2010.

D'ACAMPORA, R. **Soluções dos Três Problemas Clássicos da Matemática Grega por Curvas Mecânicas**. 2014. 64F. Tesis (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT)- Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

D’AMORE B. Epistemología, Didáctica de la Matemática y Prácticas de Enseñanza. **Enseñanza de la Matemática. Revista de la ASOVEMAT**, v. 17(1), p. 87-106, 2008.

FONT, V. **Procediments per Obtenir Expressions Simbòliques a Partir de Gràfiques. Aplicacions a les Derivades**. 2000. 783f. Tesis (Doctorado en Filosofía y Ciencias de la Educación)- Universitat de Barcelona, Barcelona, 2000.

FONT, V. Comprensión y Contexto: Una Mirada Desde la Didáctica de las Matemáticas. **La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, v. 10(2), p. 419–434, 2007.

FONT, V.; BREDA, A.; SECKEL, M. J. Algunas Implicaciones Didácticas Derivadas de la Complejidad de los Objetos Matemáticos Cuando Estos se Aplican a Distintos Contextos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 10(2), p. 1-23, 2017.

FONT, V.; GODINO, J. D. La Noción de Configuración Epistémica como Herramienta de Análisis de Textos Matemáticos: Su Uso en la Formación de Profesores**. Educaçao Matemática Pesquisa**, v. 8(1), p. 67-98, 2006.

FONT, V.; GODINO, J. D.; GALLARDO, J. The Emergence of Objects From Mathematical Practices. **Educational Studies in Mathematics**, v. 82, p. 97–124, 2013.

FONT, V.; PERAIRE, R. Objetos, Prácticas y Ostensivos Asociados. El Caso de la Cisoide, **Educación Matemática**, v. 13(2), p. 55-67, 2001.

FONT, V.; VANEGAS, Y.; FERRERES, S.; CARVAJAL, S.; ADÁN, M. (2012). FUNCIONES. En FONT, V., GIMÉNEZ, J., LARIOS, V., ZORRILLA, J.F. (Eds.), **Competencias del Profesor de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato** (pp.133-210). Barcelona, España: Publicaciones de la Universitat de Barcelona, 2012.

GARCÍA, M. (2008). **Significados Institucionales y Personales del Límite de una Función en el Proceso de Instrucción de una Clase de Primero de Bachillerato. Tesis Doctoral**. 2008. 417f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias) - Universidad de Jaén, Jaén, España, 2007.

GODINO, J.; BATANERO, C.; FONT, V. The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education**, v. 39(1-2), p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matamática. **Acta Scientiae**. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, p. 7-37, 2008.

GODINO, J. D.; BENCOMO, D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis y Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Estudio de las Matemáticas. **Paradigma,** v. 27(2), p. 221-252, 2006.

GRUGNETTI, L. Ancient Problems for the Development of Strategic Thinking. En FAUVEL, J., VAN MAANEN, J. (Eds.), **History in Mathematics Education** (PP. 78 – 82). Paises Bajos: Kluwer Academic Publishers, 2000.

GUACANEME, E. La Historia de las Matemáticas en la Educación de un Profesor: Razones e Intenciones. Brasil: **Memorias de la XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática**, 2011. Recuperado de: WWW.CIMM.UCR.AC.CR/OCS/FILES/CONFERENCES/1/SCHEDCONFS/1/PAPERS/2029/SUBMISSION/REVIEW/2029-5172-1-RV.PDF

JANVIER, C. Translation Processes in Mathematics Education. En Janvier, C. (Ed.), **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics** (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum A.P, 1987.

LACASTA, E.; PASCUAL, J. R. **Las Funciones en los Gráficos Cartesianos**. Madrid, España: Síntesis, 1998.

LAKATOS, I. **Pruebas y Refutaciones. La Lógica del Descubrimiento Matemático**. Madrid, España: Alianza Editorial. 1978.

LUDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas**. São Paulo, Brasil: Editora Pedagógica E Universitária, 1986.

MOHNSAM, J. C. **As Contribuições de Arquimedes para o Cálculo de Áreas.** 2014. 86f. Tesis (Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional, Profmat), Instituto de Matemática, Estatística e Física, Universidade Federal do Rio Grande, Rio Grande, 2014.

MONJE, Y.; SECKEL, M.J.; BREDA, A. Tratamiento de la Inecuación en el Currículum y Textos Escolares Chilenos. **BOLEMA** (en prensa).

ORDÓÑEZ, J. **Restricciones Institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en Cuanto al Significado del Objeto Integral Definida.** 2011. 305f. Tesis (Doctorado en Didáctica de las Ciencias). Universidad de Jaén, Jaén, España, 2011.

PINO-FAN, L.; CASTRO, W.; GODINO, J. D.; FONT, V. Idoneidad Epistémica del Significado de la Derivada en el Currículo de Bachillerato. **Paradigma**, v. 34(2), p. 123-150, 2013.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D.; FONT, V. Faceta Epistémica del Conocimiento Didáctico-Matemático Sobre la derivada. **Educação Matematica Pesquisa**, v. 13(1), p. 141-178, 2011.

POCHULU, M.; FONT, V. Análisis del Funcionamiento de una Clase de Matemáticas no Significativa. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, v. 14(3), p. 361-394, 2011.

RODRIGUES, G, R. **Uma Abordagem para o Problema do Mapa do Tesouro Aplicado ao Ensino da Geometria.** 2014. 64f. Tesis (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat), Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

RONDERO, C.; FONT, V. Articulación de la Complejidad Matemática de la Media Aritmética. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 33(2), p. 29-49, 2015.

RUIZ, L. **La Noción de Función: Análisis Epistemológico y Didáctico.** Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 1998.

SALA, G. **Competència D'indagació Matemàtica en Contextos Històrics a Primària I Secundària**. 2016. 213f. Tesis (Doctorado en Formación del Profesorado: práctica educativa y comunicación)- Universitat De Barcelona, Barcelona, España, 2016. Recuperado de: HTTP://WWW.TDX.CAT/HANDLE/10803/388035.

SALA, G.; BARQUERO, B. Towards an Interdisciplinary Study of Questions. A Mathematical Approach to the Historical Incident of Barcelona's Siege In 1714. **Procedia, Social and Behavioral Sciences**, v. 196, p. 183-189, 2015.

SALA, G.; FONT, V.; GIMÉNEZ, J.; BARQUERO, B. Inquiry and Modelling in an Archaeological Context. In Stillman, G., Blum, W., Kaiser, G. (Eds.), **Mathematical Modelling and Aplications: Crossing and Researching Boundaires in Mathematical Education** (PP. 325-335). Springer: Berlín, 2017.

SALA, G.; GIMÉNEZ, J.; FONT, V. Tareas Matemáticas de Contexto Históricocultural para el Desarrollo de la Competencia en Indagación en Primaria. **Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)**

(Pp. 3302-3309). Montevideo: Federación Iberoamericana De Sociedades De Educación Matemática (FISEM), 2013.

SIERPINSKA, A. SUR UN PROGRAMME DE RECHERCHE LIÉ À LA NOTION D'OBSTACLE ÉPISTÉMOLOGIQUE. **ACTES DU COLLOQUE: CONSTRUCTION DES SAVOIRS: OBSTACLES ET CONFLITS**. MONTREAL: CIRADE, 1988.

TZANAKIS, C.; ARCAVI, A. Integrating History Of Mathematics in the Classroom: An Analytic Survey. En Fauvel, J., Van Maanen, J. (Ed.), **History In Mathematics Education** (Pp. 201–240). Paises Bajos: Kluwer Academic Publishers, 2000.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The Concept of Function up to the Middle of the 19 Th Century. **Archive For History Of Exact Sciences**, v. 16, p. 37-85, 1976.

Recebido: 2018-02-10
Aprovado: 2018-02-10
DOI: 10.3895/rbect.v10n3.7752
Como citar:
FONT, V.; *SALA, G.;* BREDA, A.; SECKEL, M. J. Aspectos históricos presentes en las propuestas de innovación de profesores de básica de matemáticas. Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, v. 10, n. 3, 2017. Disponível em: <https://revistas.utfpr.edu.br/rbect/article/view/7752>. Acesso em: xxx.

Correspondência:
Vicenç Font - vfont@ub.edu.