Proposta de uma Metodologia de Ensino de Espaço Vetorial

Teodora Pinheiro Figueroa

Saddo Ag Almouloud

Resumo

O trabalho apresenta uma proposta de metodologia para o ensino de Espaço Vetorial. Essa proposta é fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau e na Teoria dos Registros de Representações de Duval. As sequências didáticas foram planejadas de forma a criar condições para o aluno ter uma atitude autônoma durante todo o processo de construção do conceito de Espaço Vetorial. O objetivo fundamental deste trabalho é mostrar que as interações do aluno com situações didáticas apropriadas e um certo *milieu* são essenciais para o aluno construir o conceito de forma significativa, sendo capaz de um elevado nível de abstração. O objetivo foi atingido, o que se pode comprovar através dos resultados obtidos.

Palavras-chave: Espaço Vetorial, teoria das situações didáticas, teoria dos registros de representações.

Abstract

Proposal of a teaching methodology of vector spaces

The paper presents a proposal of methodology for the teaching of vector space. This proposal is based on the Theory of Didactic Situations of Brousseau and the Theory of Representations Records of Duval. The didactic sequences were planned in order to create conditions for the student to have autonomous attitude throughout the process of building the concept of Vector Space. The main goal of this work is to show that the interactions of the student with the appropriate didactic situations and a certain *milieu* are essential for the students to build the concept in a meaningful way, being capable of a high level of abstraction. The goal was achieved, which can be verified by the results obtained.

Keywords: vector spaces, theory of didactic situations, theory of representations records.

Introdução

A Álgebra Linear é uma disciplina do núcleo básico em matemática dos cursos regulares de engenharia. Um curso tradicional de Álgebra linear envolve noções de espaço vetorial, autovalores e autovetores e diagonalização de operadores.

Segundo Boldrini (1980), alunos que cursam pela primeira vez esta disciplina, frequentemente julgam-na muito abstrata e, não veem como podem utilizar os conceitos básicos. E, normalmente, muitos cursos terminam sem que se mostre aos alunos uma aplicação concreta de tudo o que aprenderam.

Em função desta questão, no início da década de 90, docentes da área de Álgebra Linear e de demais áreas da Ciência reuniram-se nos Estados Unidos, fundaram um grupo de estudos e criaram uma proposta de mudança no currículo tradicional de Álgebra Linear para cursos introdutórios. Esta proposta salienta que uma ênfase exagerada na abstração pode sobrecarregar os alunos iniciantes, os quais terminam o curso com pouco conhecimento ou sem saber conceitos básicos que possam necessitar em cursos posteriores ou em suas carreiras. Um curso de Álgebra Linear pode proceder a partir do concreto e em muitos casos, exemplos práticos para o desenvolvimento de conceitos gerais, princípios e teoria concomitante que simplifica e torna a Álgebra Linear tão poderosa e útil. (CARLSON et al, 1993)

Sabe-se que até aproximadamente 1960, a Álgebra Linear era estudada apenas em cursos de Pós-graduação como destaca o autor Uhlig (2003): *Linear Algebra begins to take hold in the undergraduate curriculum after the advent of computers.* (...) *In the 1960s and 1970s, introductory Linear Algebra courses appeared for undergraduates in the USA.* (UHLIG, 2003 apud FRATELLI, 2007).

Cowen (1997) também comenta que a Álgebra Linear se tornou padrão no currículo de matemática da faculdade nos Estados Unidos nos anos de 1950 e 60 e, que algumas faculdades e universidades ainda estavam adicionando o curso no início de 1970.

Apesar de ter ocorrido uma mudança no currículo de Álgebra Linear, no sentido de conter mais aplicações, o que é notável na maioria dos livros de Álgebra Linear, ainda existe um elevado grau de abstração de alguns conceitos, como por exemplo, em relação ao conceito de Espaço Vetorial, tema central deste trabalho.

Este artigo relata uma proposta de metodologia de ensino de Espaço Vetorial aplicada a uma turma do primeiro semestre de engenharia civil. Essa proposta é fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) e na Teoria dos Registros de Representações de Duval (1995) e, consiste em criar condições para o aluno aprender o conceito de Espaço Vetorial a partir de situações didáticas que exijam do aluno uma atitude ativa diante das discussões propostas pelo professor em cada situação didática. Sendo assim, as sequências didáticas foram desenvolvidas de tal maneira que o aluno construa a partir de cada situação proposta o conceito de Espaço Vetorial, procurando desmitificar algo que é considerado extremamente abstrato, em algo próximo da linguagem e do entendimento do aluno.

Neste artigo, são sucintamente apresentados elementos da Teoria das Situações Didáticas, da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a noção de Quadros e Jogos de Quadros e, descritas as situações didáticas desenvolvidas com base nestas teorias. Tais situações são resultados da prática docente em sala de aula.

Fundamentação Teórica

Nesta pesquisa identificam-se características compatíveis com a Teoria das Situações Didáticas propostas por Brousseau (2008) que estabelece a criação de um modelo de interação entre o aprendiz, o saber e o *milieu* (ou meio) onde a aprendizagem deve ocorrer.

Este modelo de interação tem como base quatro conceitos importantes: a situação didática, a situação adidática, a devolução e o meio.

Segundo Brousseau (2008) a situação didática é o conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que estes alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

De acordo com Almouloud (2007) a situação adidática, como parte essencial da situação didática, é uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar a este, condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar. E devolução é definida como o ato pelo qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema aceitando as consequências desta transferência.

De acordo com Almouloud (2007), o trabalho pedagógico inicia-se com a proposta de um problema e desenvolve-se baseado em quatro tipos de interações com o meio, caracterizadas por diferentes relações com o saber em jogo e denominadas por situações de ação, formulação, validação e institucionalização.

Em uma situação de ação o aluno age sobre a situação, interage com o meio, elaborando as suas hipóteses, aprende por adaptação ao meio e a situação proposta. Na situação de formulação, o aluno formaliza as suas hipóteses utilizando-se de ferramentas matemáticas, resultado das interações com o meio explicitando uma solução para o problema em uma linguagem mais apropriada. Na situação de validação, o aluno apresenta argumentos de forma a validar a solução do seu problema a um interlocutor. Na situação de institucionalização, todos se apropriam deste saber como parte de seus esquemas mentais.

Durante os processos de ensino e de aprendizagem utilizou-se a noção de Quadro e Jogo de Quadros proposta por Douady (1986 apud Almouloud, 2007, p.65). Quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, da relação entre os objetos, de formulações eventualmente diferentes, de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e ser diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida. (DOUADY, 1993, apud ALMOULOUD, 2007, p. 64)

O Jogo de Quadros são mudanças de quadros provocadas pelo professor a fim de direcionar os alunos no processo de aprendizagem de forma a assimilar e entender os conceitos abordados.

Visando a construção significativa do objeto matemático Espaço Vetorial utilizou-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de autoria do filósofo e psicólogo francês Raymond Duval, a fim de explorar os diferentes componentes conceituais do referido objeto em mais de um registro.

Duval (1995) destaca a existência de dois aspectos característicos da atividade cognitiva própria dos procedimentos matemáticos. Um deles é o fato de os objetos matemáticos não serem acessíveis por meio da percepção ou de instrumentos, como o são os de outras ciências. Só podemos ter acesso a eles usando sinais, palavras ou símbolos, expressões ou desenhos. O outro aspecto é o uso de vários registros semióticos de representação. Segundo ele, existem pelo menos quatro tipos diferentes de registros de representação: o registro da linguagem natural, o registro geométrico, o registro dos sistemas de escritas e cálculo e o registro gráfico.

Quando as transformações ocorrem com a utilização de um único tipo de registro, diz-se que as transformações realizadas constituem um tratamento. Quando há trânsito entre um tipo de registro e outro, a transformação realizada é chamada de conversão. E, acredita-se que para a construção do conhecimento matemático faz-se necessário a representação do objeto matemático, o tratamento do mesmo e, o fazer conversões de um dado registro para outro.

O Objeto Matemático: Espaço Vetorial

O conceito de espaço vetorial n-dimensional tinha recebido tratamento detalhado em Ausdehnungslehre, de Hermann Grassmann, publicado na Alemanha em 1844. Grassmann (1809-1877), um professor de ensino médio, também foi levado a seus resultados estudando a interpretação geométrica de quantidades negativas e a adição e multiplicação de segmentos orientados em duas e três dimensões. Enfatizou o conceito de dimensão e salientou o desenvolvimento de uma ciência abstrata de “espaços” e

“subespaços” que incluiria a geometria em duas e três dimensões como casos particulares. (BOYER, 2012, p.377)

Um espaço vetorial real é um conjunto V, não vazio, com duas operações: soma e multiplicação por escalar, tais que para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \Re$, as propriedades de i) a viii) sejam satisfeitas:

i) $u + v = v + u$

ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$

iii) Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ (0 é chamado de vetor nulo)

iv) Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$

v) $(a * b) * u = a * (b * u)$

vi) $(a + b) * u = a * u + b * u$

vii) $a * (u + v) = a * u + a * v$

viii) $1 * u = u$

Metodologia Proposta

O conceito de espaço vetorial é extremamente abstrato e, percebe-se que os alunos têm muita dificuldade em sua compreensão. Na maioria das vezes resolvem as listas de exercícios propostas pelo professor de forma mecânica, sem compreender o significado. E esta postura reflete nos resultados das avaliações. Visando mudar esta situação este artigo apresenta uma proposta de ensino do conceito de Espaço Vetorial de forma contextualizada, a partir da apresentação de um sistema de controle de um ônibus espacial. Esta proposta fundamenta-se na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) e na Teoria dos Registros de Representações de Duval (1995). A luz dessas teorias foi estruturada uma sequência didática apropriada de forma a conduzir o aluno durante os processos de ensino e de aprendizagem, de modo que o mesmo consiga expressar por meio de diferentes registros o conceito de Espaço Vetorial e as suas propriedades. Além disso, estas sequências didáticas têm como objetivo criar oportunidades para que o aluno abstraia e, se torne apto a desenvolver conjuntos nos mais diferentes contextos que representem ou não um espaço vetorial a partir da elaboração de generalizações e justificativas.

Neste trabalho essa sequência didática é caracterizada por três Situações Didáticas (SD), conforme Figura 1.

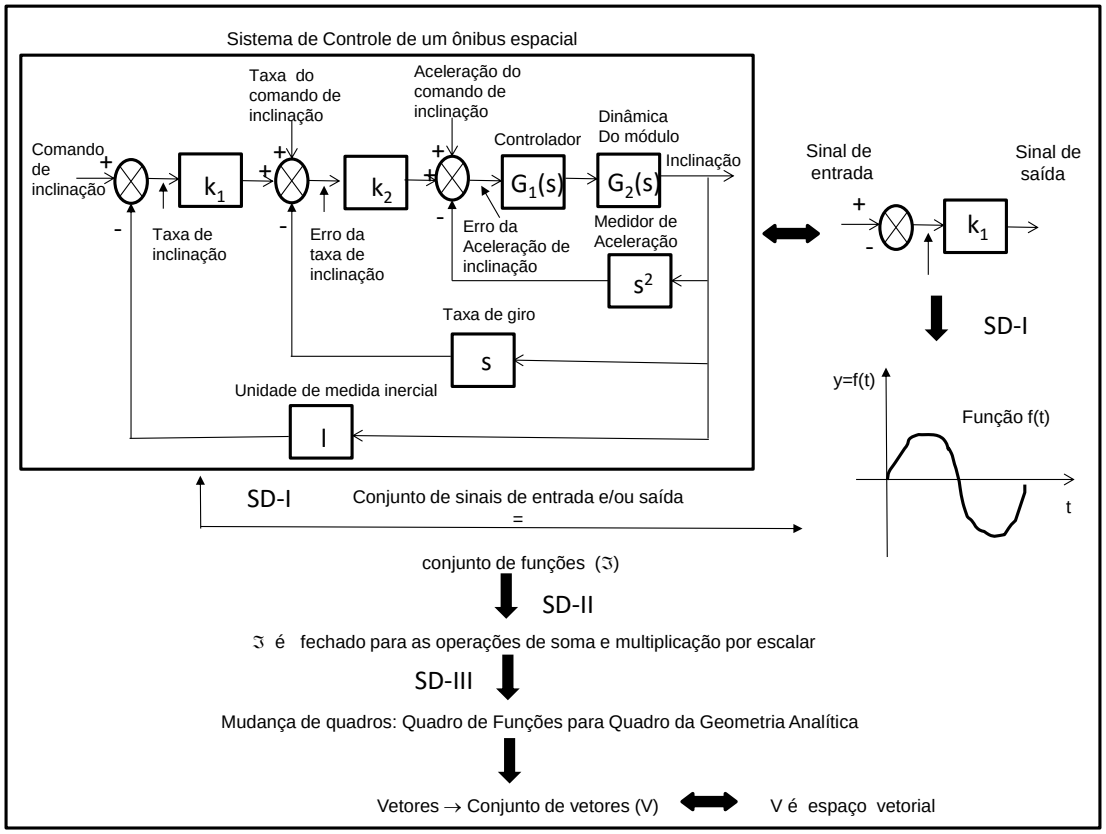

Figura 1: Sequência didática

(Fonte: adaptação dos autores)

1. Situação Didática I

É caracterizada por uma Situação Adidática e, tem como objetivo a compreensão por parte dos alunos dos registros de sinais de entrada e saída do sistema de controle de um ônibus espacial e, a associação destes registros às funções matemáticas. A sequência didática (SEQ) desta Situação é representada pela Figura 2.

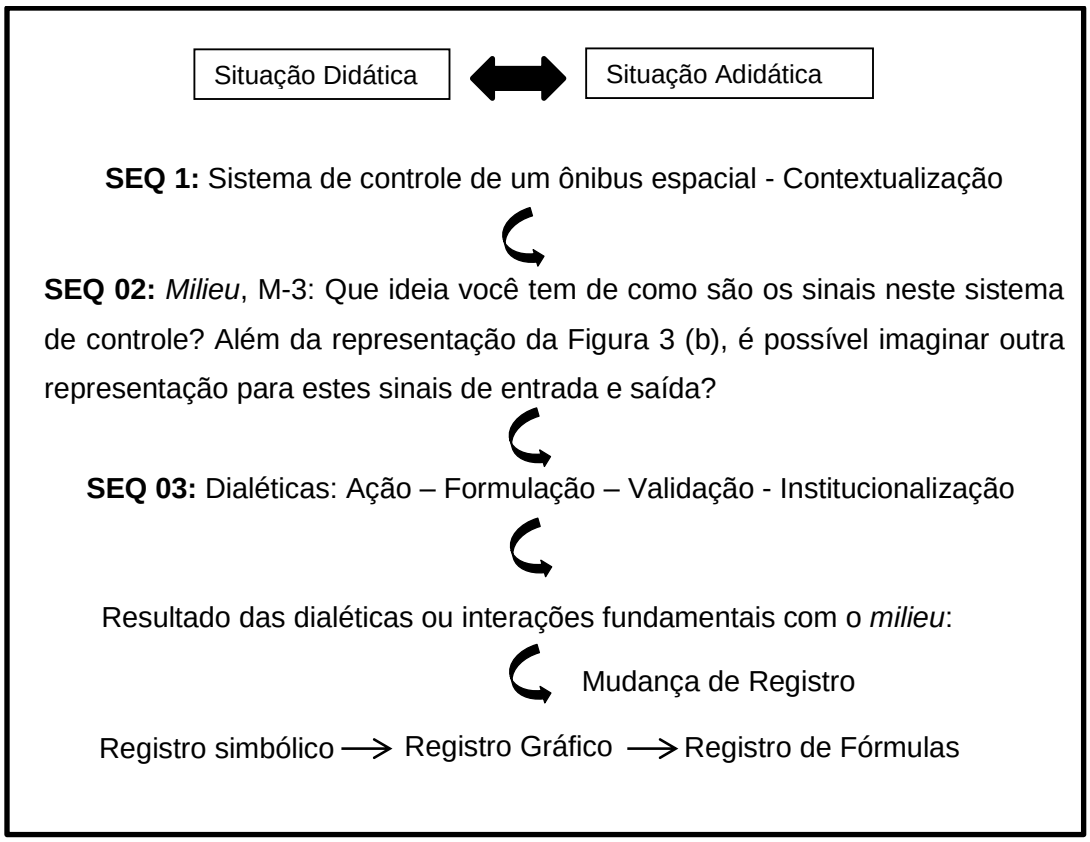

Figura 2: Situação Didática

(Fonte: Autores deste texto)

Descrição das Sequências Didáticas (SEQ) conforme a Figura 2: **SEQ 01: Sistema de Controle de um ônibus espacial - Contextualização:**

O professor apresentou aos alunos a imagem de um ônibus espacial, o US Columbia, (Figuras 3 e 4) e, relatou que o US Columbia partiu de sua plataforma de lançamento numa manhã fresca num domingo de abril de 1981, em Palm. Produto de dez anos de intensa pesquisa e desenvolvimento, o primeiro ônibus espacial dos EUA foi uma vitória da engenharia de controle de sistemas, envolvendo muitas áreas da engenharia – aeronáutica, química, elétrica, hidráulica e mecânica. Os sistemas de controle do ônibus espacial são absolutamente críticos para o voo. Como o ônibus espacial é uma aeronave instável, ele requer um constante monitoramento por computador durante o voo atmosférico. O sistema de controle de voo envia uma sequência de comandos para as superfícies de controle aerodinâmico e 44 jatos de propulsão. (LAY, 1999)

Figura 3: Ônibus Espacial Columbia na torre de lançamento
(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%94nibus_espacial)

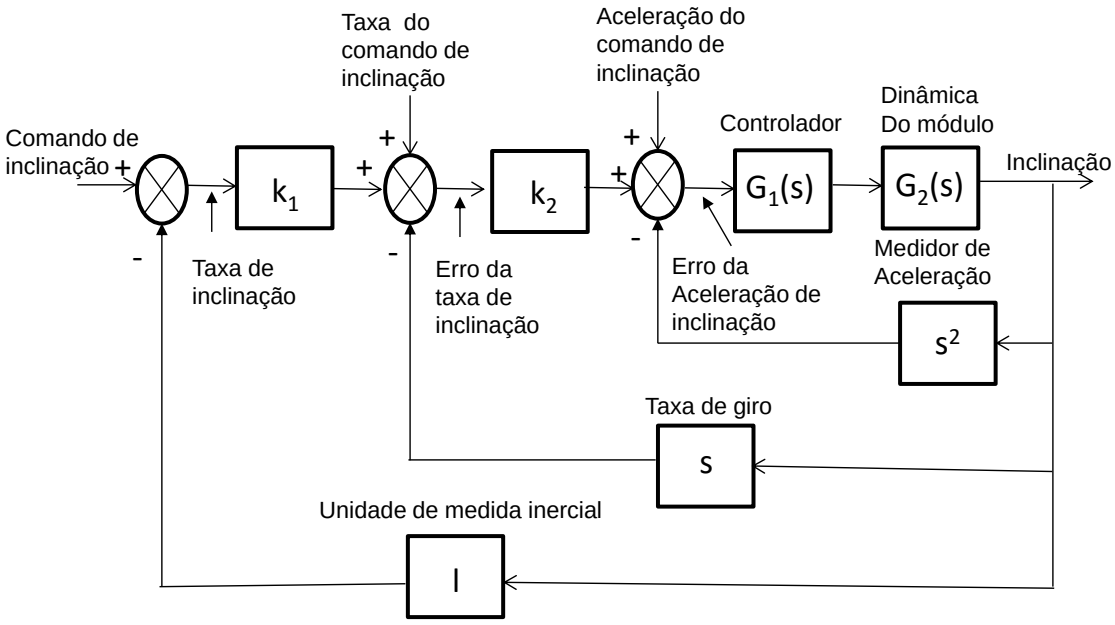

Figura 4: Sistema de Controle
(Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%94nibus_espacial)

O professor explicou que a Figura 4 mostra um sistema fechado de feedback típico que controla a inclinação do ônibus espacial durante o voo. E que o símbolo de junção (⊗) mostra os locais onde os sinais dos diversos sensores são somados aos sinais do computador. Os sinais de mais ou menos determinam se o sinal deve ser adicionado ou subtraído. As setas indicam o sentido de fluxo do sinal. $G_1(s)$ e $G_2(s)$ são funções de transferência que atuam sobre o sinal de entrada produzindo o sinal de saída.

SEQ 02: Após a contextualização, o professor propôs a Questão 01 aos alunos, associada ao esquema da Figura 3 estabelecendo, dessa forma, o *milieu*, a partir do qual ocorreram as interações entre professor-aluno diante das situações e dialéticas, conforme Quadro 1.

Questão 01: Que ideia você tem de como são os sinais neste sistema de controle? Além da representação da Figura 4, é possível imaginar outra representação para estes sinais de entrada e saída?

Quadro 1: Estruturação do Milieu

Dialéticas	*Milieu* (M)	Aluno (P)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M0: *Milieu* de Aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização do tratamento, conversão e mudança de registro
Validação	M-1 *Milieu* de Referência	E-1 Aprendiz Conversão: registro gráfico → registro de fórmulas	P-1 Observador	S-1 Mudança de registros
Formulação	M-2 *Milieu* Objetivo	E-2: Levantamento de hipótese/analogia Registro simbólico Tratamento →conversão: registro simbólico → registro gráfico	P-2 Mediador e Observador	S-2 Situação de exposição de ideias, tratamento da representação, conversão
Ação	M-3 *Milieu* Material Esquema da Figura 3, Questão 01	E-3 Analisar os saberes relacionados à Questão 01	Adequação do *milieu* e utilização desse *milieu* pelos alunos	S-3 Situação de reflexão, raciocínio

(Fonte: Elaborado pelos próprios autores)

SEQ 03: Descrição das Dialéticas: Ação – Formulação – Validação – Institucionalização conforme Quadro 1.

Para a determinação da situação objetiva (S-3) tem-se o meio material (M-3), organizado pelo professor como um meio a fim de provocar uma situação adidática motivadora, a partir de uma questão que induzirá o aluno a usar o seu conhecimento prévio sobre a ideia que ele tem do que seja um sinal. A partir da situação (S-3) ocorrerão situações de desestabilização/reconstrução de acordo com as sequências didáticas e as interações em grupo, necessárias para a aquisição do novo conhecimento.

Ação: Situação autônoma de cada um dos alunos, posicionados como sujeitos E-2, inseridos no *milieu* M-2, o qual é constituído dos objetos da situação objetiva S-3, com os

quais E-3 estabelece uma relação. Nesta etapa, E-2 age, tentando responder a Questão 01 por intermédio do conhecimento prévio e da troca de informações com os colegas. Algumas das respostas são descritas a seguir:

Aluno 1: Um sinal pode representar um alerta.

Aluno 2: Falar em sinal me lembra sinal digital

Aluno 3: Um sinal tem a ver com um sinal do osciloscópio.

Aluno 4: Um sinal pode mudar no decorrer do tempo.

A discussão provocada pela Questão 01 resultou no tratamento da Figura 4, ou seja, a transformação das informações representadas pela Figura 4 (registro simbólico) para a linguagem natural a partir do conhecimento prévio dos alunos sobre um sinal.

A partir da resposta dos alunos iniciou-se uma discussão e a conversão do registro simbólico (Figura 4), em um registro gráfico, ou seja, a associação a um desenho, ou mais precisamente a um sinal gráfico.

Sendo assim, o professor pediu aos alunos para fazerem os seus registros por meio do esboço de um sinal qualquer procurando dar uma resposta à Questão 01. As Figuras 5 e 6 apresentam alguns registros de alunos.

A Figura 5 mostra a interpretação de cada aluno do sistema de controle apresentado na Figura 4, o Aluno A, interpretou na forma de sinais que são enviados ao computador, onde as informações são tratadas e transmitidas à nave. O Aluno B interpretou o sistema de controle como um painel de comandos que são acionados gerando entrada e saída de dados. Os Alunos A e B associaram aos sinais, um registro na forma de gráficos de funções dependentes do tempo, t.

A associação dos alunos a este tipo de registro é de fundamental importância para a articulação deste a outros registros.

Formulação: Nesta situação ocorreu a troca de informações entre os alunos. Os alunos posicionados como sujeito E-1, em uma situação de aprendizagem, formularam e descreveram as suas funções $f(t)$ utilizando fórmulas matemáticas. O *milieu* M-1 é definido pela questão: Estes esboços de sinais podem ser representados por fórmulas matemáticas?

Validação: Nesta etapa, os alunos posicionados como sujeitos E0, argumentaram, de forma a justificar o que assimilaram na situação S-1, ou seja, um sinal gráfico pode ser representado por uma função matemática, que varia em função do tempo t, uma vez que os sinais do sistema de controle variam no decorrer do tempo.

Institucionalização: Nesta etapa o professor de acordo com as conclusões dos alunos simplificou o sistema de controle da Figura 4 introduzindo a Figura 6.

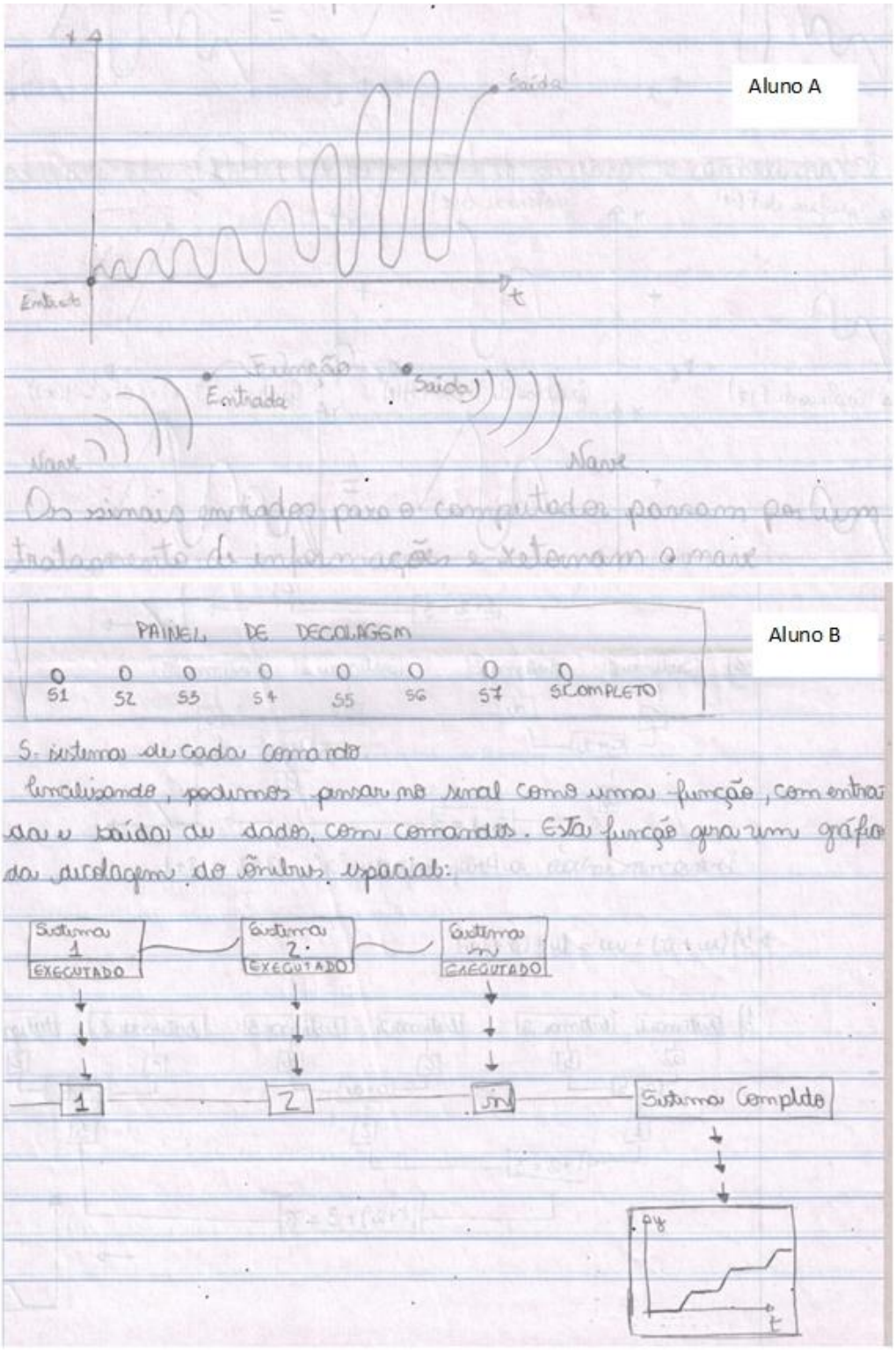

Figura 5: Respostas: Aluno A e Aluno B

(Fonte: produção dos alunos)

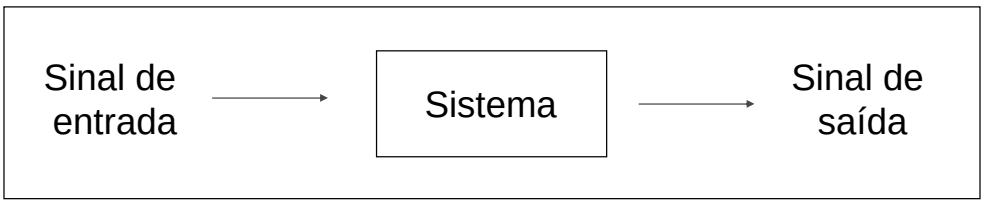

Figura 6: Esquema simplificado de um sistema de controle
(Fonte: Elaborado pelos próprios autores)

A partir das discussões sobre os sinais de entrada e saída do sistema de controle, Figura 4, observou-se que os alunos concluíram que a leitura do sistema de controle sob o ponto de vista da matemática é realizada associando funções matemáticas aos sinais de entrada e saída, como por exemplo, à função definida por $f(t) = sen(t)$, Figura 7:

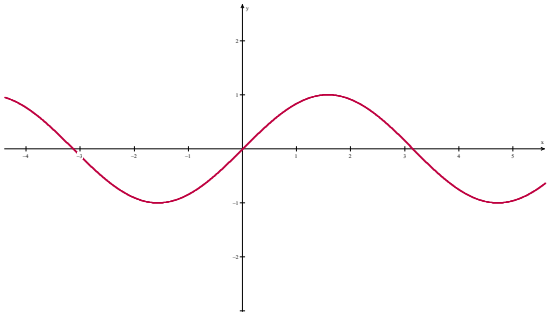

Figura 7: Exemplo de um sinal de entrada ou sinal de saída
(Fonte: Elaborado pelos próprios autores)

E, além disso, associaram que o conjunto de sinais de entrada e saída podem ser comparados a um conjunto de funções f definidas por $f(t)$, que pode ser representado pelo símbolo $\Im$.

2. Situação Didática II

O objetivo desta situação é criar condições para o aluno compreenda e verifique que o conjunto de funções ($\Im$) é fechado para a soma e para a multiplicação por escalar, ou seja, que verificam as propriedades de soma e multiplicação por escalar e, que o resultado destas operações é sempre um elemento do mesmo conjunto. Esta situação é caracterizada pelo Quadro de Funções. E o *milieu* é estabelecido pela Questão 02. Sabendo que um sinal pode ser representado por um sinal gráfico, o qual é uma representação de uma função definida por, pede-se ao aluno que verifique quaisquer funções f, g e h do conjunto ($\Im$) satisfazem as seguintes propriedades:

$f, g, h \in \Im$ e $a, b \in \Re$, tais que:

i) $f + g = g + f$

ii) $(f + g) + h = f + (g + h)$

iii) Existe a função nula, tal que $f + 0 = f$ (0 é chamado de função nula)

iv) Existe $-f$ tal que $f + (-f) = 0$

v) $(a * b) * f = a * (b * f)$

vi) $(a + b) * f = a * f + b * f$

vii) $a * (f + g) = a * f + a * g$

viii) $1 * f = f$

As interações entre professor-aluno diante das situações e dialéticas estão descritas no Quadro 2.

Quadro 2: Estruturação do Milieu - Questão 2

Dialéticas	*Milieu* (M)	Aluno (P)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M0: *Milieu* de Aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização, generalização realizada pelo professor
Validação	M-1 *Milieu* de Referência	E-1 Aprendiz	P-1 Observador	S-1 Conhecimento e verificação das propriedades da adição e multiplicação
Formulação	M-2 *Milieu* Objetivo	E-2: Levantamento de hipótese	P-2 Mediador e Observador	S-2 Situação de exposição do saber
Ação	M-3 *Milieu* Material Quadro de Funções, Questão 02	E-3 Analisar os saberes relacionados à Questão 02	Adequação do *milieu* e utilização desse *milieu* pelos alunos	S-3 Situação de reflexão, conhecimento algébrico: soma de funções e multiplicação por escalar

(Fonte: Elaborado pelos próprios autores)

A maioria dos alunos expressou as propriedades por intermédio de registros gráficos das funções anteriormente definidas na Situação didática I, conforme Figura 8.

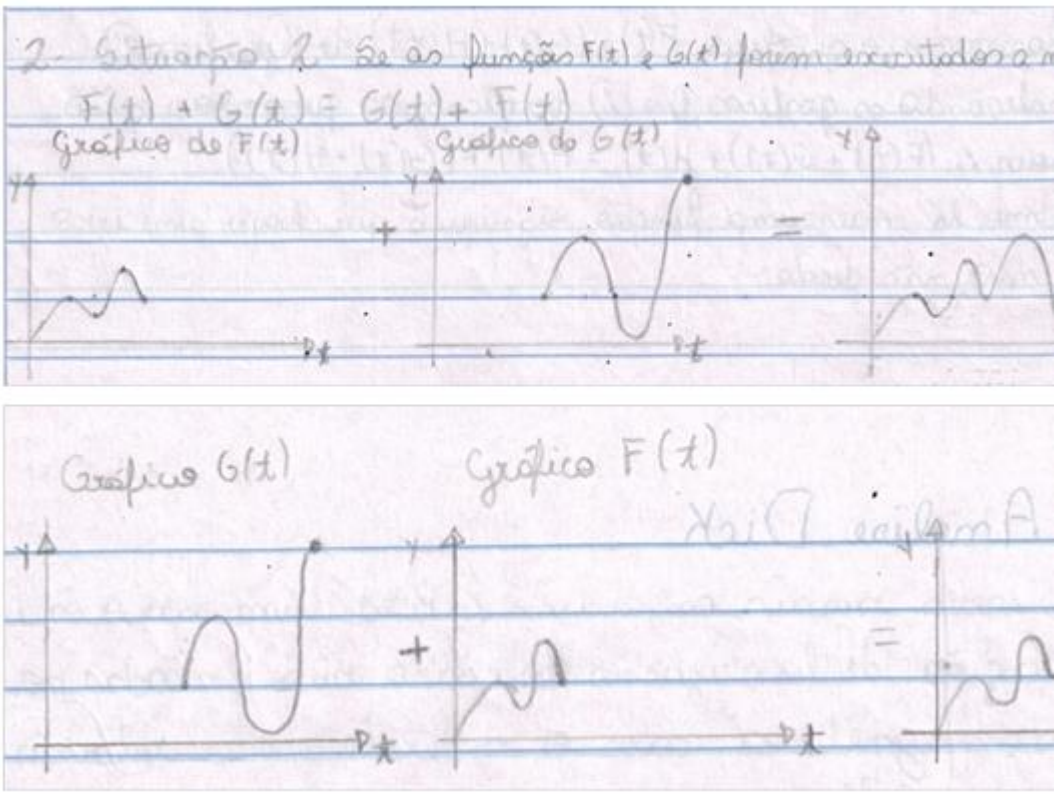

Figura 8: Questão 02 – Resposta do Aluno A (propriedade i)

(Fonte: produção de um aluno nesta pesquisa)

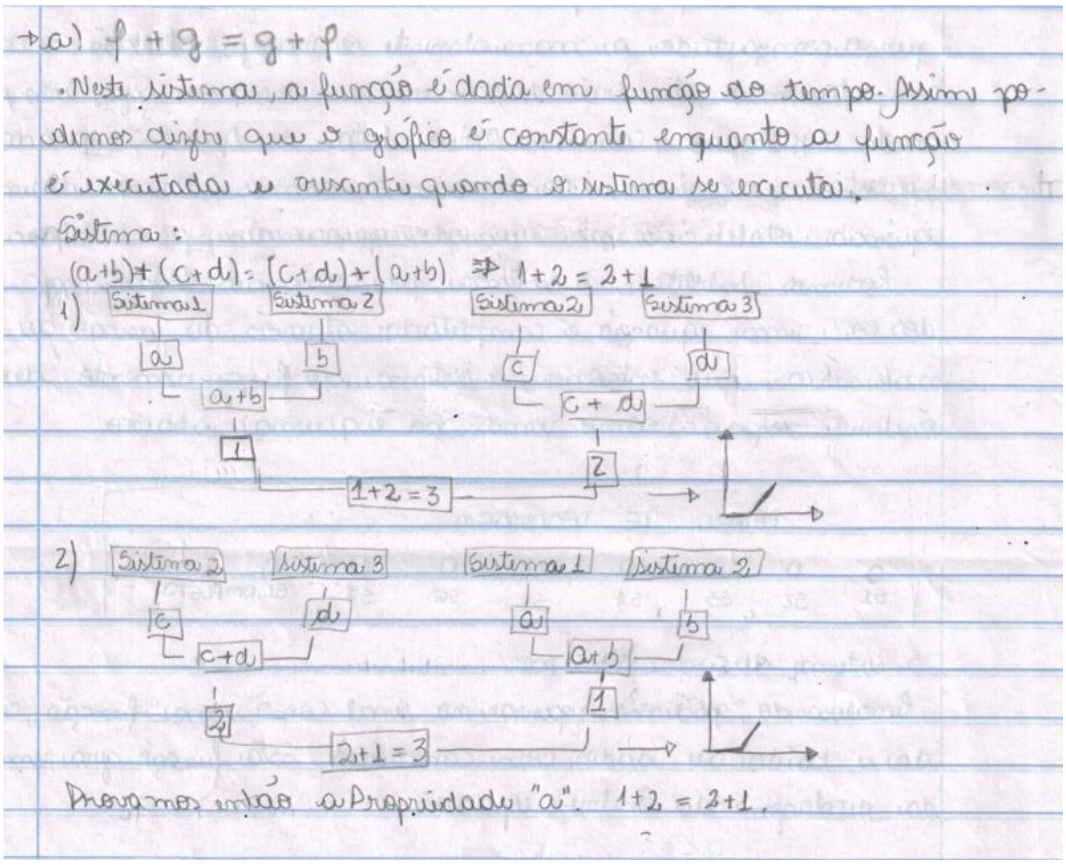

Figura 9: Questão 02 – Resposta do Aluno B (propriedade i)

(Fonte: produção de um aluno nesta pesquisa)

O aluno tem a oportunidade de expressar o seu raciocínio, a sua percepção e, interpretação do problema. Pois, de uma forma geral no caso do ensino de Espaço Vetorial a representação simbólica é imposta sem dar espaço para outras representações.

3. Situação Didática III

O objetivo desta situação é conduzir o aluno à mudança de quadro, do Quadro de Funções para o Quadro da Geometria Analítica, ou seja, compreender que no quadro da Geometria Analítica um conjunto de vetores tem o mesmo comportamento que um conjunto de funções em relação às operações de adição e multiplicação por escalar. E, dessa forma formalizar o conceito de Espaço Vetorial. Nesta situação o *milieu* é caracterizado pela Questão 03: Podemos dizer que um conjunto de vetores V também satisfaz as propriedades i), ii), iii), iv), v), vi), vii) e viii) enunciadas na Situação Didática II, verificadas para o conjunto de funções ($\Im$)? Verifique a partir de esboço gráfico ou de notação algébrica.

Nesta situação, a maioria dos alunos verificou as propriedades a partir do esboço de vetores quaisquer (Figura 11) e, outros utilizaram a notação algébrica (Figura 10) informações verificadas pelo professor durante a Validação.

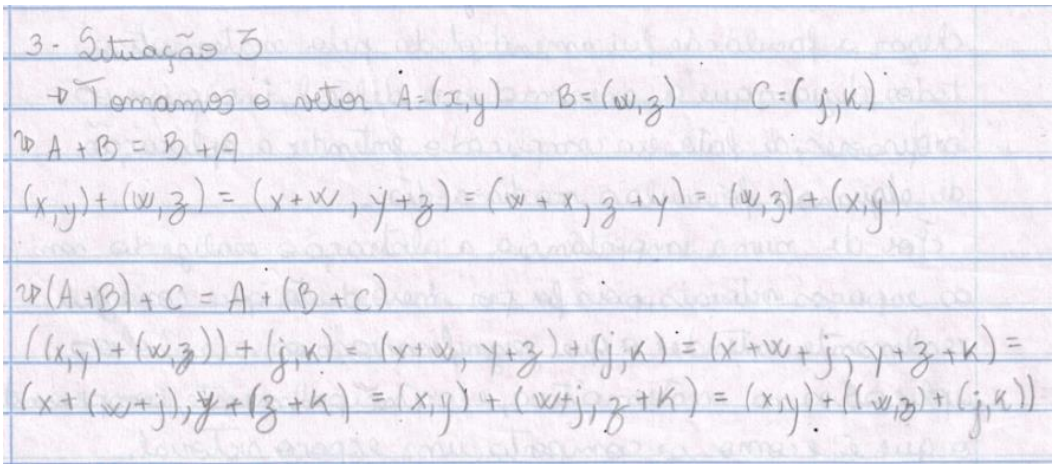

Figura 10: Questão 03 – Resposta do Aluno A (propriedade i e ii)

(Fonte: produção de aluno)

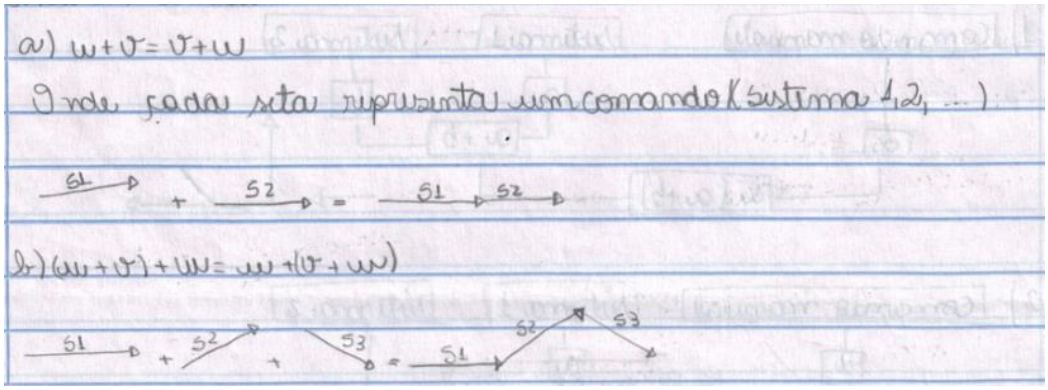

Figura 11: Questão 03 – Resposta do Aluno B (propriedade i e ii)

(Fonte: produção de aluno)

Os tipos de respostas dos alunos, Figuras 9 e 10 são de fundamental importância para o professor na fase de institucionalização, pois a valorização dos diferentes tipos de registros e, a discussão da possibilidade de outros tipos de registros é essencial para o processo de ensino e aprendizagem.

Sendo assim, na fase de institucionalização, a partir dos registros dos alunos o professor verificou as propriedades juntamente com os alunos usando a notação algébrica a partir do esboço de vetores para cada propriedade.

Quadro 3: Estrutura do Milieu - Questão 3

Dialéticas	*Milieu* (M)	Aluno (P)	Professor (P)	Situação (S)
Institucionalização	M0: *Milieu* de Aprendizagem	E0: aluno Aprendizagem	P0: professor Institucionalização	S0: didática Sistematização, generalização realizada pelo professor
Validação	M-1 *Milieu* de Referência	E-1 Aprendiz	P-1 Observador	S-1 Conhecimento e verificação das propriedades da adição e multiplicação por escalar de vetores
Formulação	M-2 *Milieu* Objetivo	E-2: Levantamento de hipótese	P-2 Mediador e Observador	S-2 Situação de exposição do saber
Ação	M-3 *Milieu* Material Quadro de Funções, Questão 03	E-3 Analisar os saberes relacionados à Questão 03	Adequação do *milieu* e utilização desse *milieu* pelos alunos	S-3 Situação de reflexão, conhecimento sobre vetores, soma de vetores e multiplicação por escalar

(Fonte: Elaborado pelos próprios autores)

Em função dos resultados das Situações Didáticas I, II e III, os alunos chegaram à conclusão que um espaço vetorial é um conjunto de elementos que, apesar de terem natureza diferente, se comportam como vetores, ou seja, podem ser somados ou multiplicados por escalares e, sempre resultam em elementos do mesmo conjunto. Esses elementos satisfazem as propriedades de soma e multiplicação por escalar enunciadas na seção 2.2. E, dessa forma ficou claro que o conjunto dos sinais de entrada do sistema de feedback do ônibus espacial é um exemplo de Espaço Vetorial, pois o conjunto de sinais de entrada e/ou saída podem ser associados a um conjunto de funções matemáticas que é fechado em relação as propriedades de soma e multiplicação por escalar.

4. Situação Didática IV

Esta situação é composta por uma situação adidática e as dialéticas de Ação, Formulação, Validação e Institucionalização.

A evolução desta situação é descrita sob o ponto de vista da estrutura do *milieu*. Primeiramente o professor em uma situação de construção P+2 reflete como avaliar se os alunos realmente entenderam a definição de Espaço Vetorial. Em seguida, posicionando-se como P+1, no nível de projeto propõe uma atividade à turma de alunos, que constitui o

meio material M-3, o qual deve ser executado pelo aluno E-3, que se encontra em uma situação S-3 de superar o desafio e resolver a atividade proposta.

Atividade: Sabendo que um espaço vetorial é um conjunto de elementos que se comportam como vetores em relação às operações de adição e multiplicação. E, partindo do fato de que o sistema de controle do ônibus espacial é um Espaço Vetorial, criem o seu Espaço Vetorial inserido em um contexto que mais se identifique com você, pode ser um contexto puramente matemático ou relativo a alguma aplicação, verificando as propriedades da adição e da multiplicação por escalar.

Ação: Situação autônoma de cada um dos alunos, posicionados como sujeitos E-2, inseridos no *milieu* M-2, o qual é constituído dos objetos da situação objetiva S-3, com os quais E-3 estabelece uma relação. Nesta etapa, E-2 age, pesquisa, evolui por iniciativa própria sob a supervisão do professor, que exerce o papel de mediador.

Formulação: Nesta situação ocorre a troca de informações entre os alunos. Os alunos posicionados como sujeito E-1, em uma situação de aprendizagem, formulam e descrevem o seu Espaço Vetorial utilizando as ferramentas matemáticas necessárias. O *milieu* M-1 é definido pela questão: O seu exemplo é um Espaço Vetorial? Verifica as propriedades da adição e multiplicação por escalar?

Validação: Nesta etapa, os alunos posicionam como sujeitos E0 argumentam, de forma a justificar o que desenvolveram na situação S-1. Nesta etapa há a intervenção do professor P0 para concluir e fazer a Institucionalização.

Institucionalização: Nesta etapa o professor apresenta à turma os vários exemplos de espaço vetorial desenvolvidos por cada um dos alunos dando a liberdade de discussão, questionamento e, esclarecimento de dúvidas.

Resultados

Os resultados obtidos foram satisfatórios, pois houve a participação dos alunos a partir da representação de seus registros, do tratamento e da conversão dos mesmos no decorrer das situações didáticas propostas pelo professor. E, são as representações, segundo a teoria de Duval, que quando convertidas umas nas outras conduzem ao aprendizado do objeto estudado E, quanto mais diversificada é a representação de um objeto, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dá a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo.

As discussões mediadas pelo professor foram de extrema importância no processo de aprendizagem, o que incentivou o aluno a assumir o papel de protagonista em cada situação didática.

A Figura 11 apresenta o relato de um aluno sobre a metodologia proposta e, a impressão que ele tinha da matemática. Este relato reforça ainda mais a ideia de que é preciso criar condições para que o aluno exponha as suas opiniões com liberdade e, assim possa evoluir em seu processo de aprendizagem percebendo a verdadeira beleza da linguagem matemática.

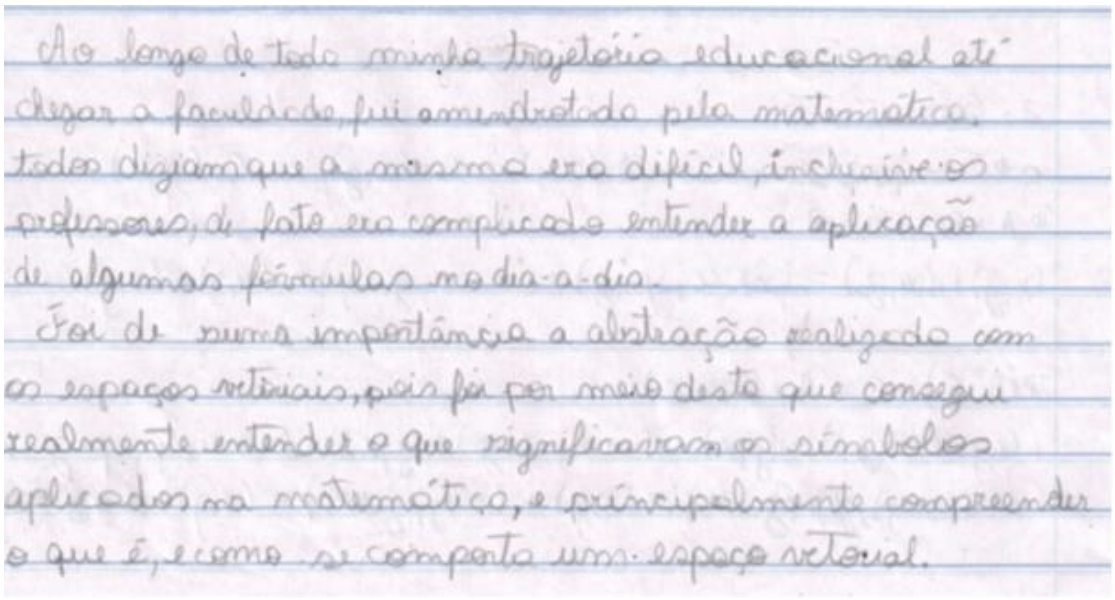
Ao longo de toda minha trajetória educacional até chegar a faculdade, fui amedrontado pela matemática. todos diziam que a mesma era difícil, inclusive os professores, de fato era complicado entender a aplicação de algumas fórmulas no dia-a-dia.
Foi de suma importância a abstração realizada com os espaços vetoriais, pois foi por meio deste que consegui realmente entender o que significavam os símbolos aplicados na matemática, e principalmente compreender o que é, e como se comporta um espaço vetorial.

Figura 12 Depoimento de um dos alunos
(Fonte: produção de um aluno)

Resultados relativos à situação 4

A atividade proposta aos alunos na situação 4 foi desenvolvida em sala de aula e, entregue à professora na forma de um trabalho digitalizado.

A primeira parte dessa situação é composta de dois exemplos de espaço vetorial desenvolvidos pelos alunos e, algumas discussões relacionadas às dificuldades, erros e acertos dos alunos.

Exemplo 1: Espaço Vetorial dos vetores relativos às diagonais dos polígonos

O aluno definiu o conjunto $K = \{0, D(n)\}$ tal que $D(n)$ tem direções a nordeste ou a sudoeste, com a soma usual e a multiplicação por escalar definida por $a * D(n) = a^2 * D(n)$, onde $D(n)$ é o vetor relativo à diagonal do polígono n, usualmente com direção nordeste e podendo assumir direção à sudoeste e; a um escalar qualquer, $a \in \Re$.

Em seguida verificou se K é um espaço vetorial com as propriedades de soma e multiplicação por escalar anteriormente definidas.

Sendo u, v vetores pertencentes ao espaço K e a, b escalares pertencentes ao conjunto dos números reais ($\Re$)

i) $u + v = v + u$

Seja $D(n)$, $D(n1) \in K$ então: $D(n) + D(n1) = D(n1) + D(n)$

ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$

Seja $D(n)$, $D(n1)$ e $D(n2) \in K$ então:

$(D(n) + D(n1)) + D(n2) = D(n) + D(n1) + D(n2) = D(n) + (D(n1) + D(n2))$

iii) $u + en = u$

O aluno definiu en (Elemento Neutro) desse espaço, denominado $D(t)$, como o vetor relativo às diagonais do triângulo. Pela fórmula $D(t) = \frac{t(t-3)}{2}$ tal que $D(t)$ é o número de diagonais e t o número de lados do polígono, dessa forma tem-se que para um triângulo: $D(t) = 0$, $D(t) \in K$, pois $O \in K$, portanto: $D(n) + D(t) = D(n)$, o que caracteriza a presença do elemento neutro (en) nesse espaço.

iv) $u + (-u) = en$

A direção usual do vetor relativo à diagonal, especificado acima é para nordeste ou sudoeste, portanto o aluno caracterizou como elemento inverso desse espaço o vetor denotado por $-D(n), -D(n) \in K$, o qual é um vetor de direção oposta a $D(n)$, ou seja, direção nordeste ou sudoeste, dependendo da direção de $D(n)$. Logo: $D(n) + (-D(n)) = D(t)$. Portanto, o aluno mostrou o conjunto K satisfaz as propriedades de soma, para a soma usual definida.

Em seguida verificou as propriedades de multiplicação por escalar, a partir da multiplicação por escalar definida, ou seja, $a * D(n) = a^2 * D(n)$.

v) $(a * b) * u = a * (b * u)$, $a, b \in \Re$

Seja $a, b \in \Re$, $D(n) \in K$, então:

$(a * b) * D(n) = (a * b)^2 * D(n) = a^2 * b^2 * D(n) = a^2 * (b * D(n)) = a * (b * D(n))$

vi) $(a + b) * u = a * u + b * u$

Seja $a, b \in \Re$, $D(n) \in K$, então:

$(a + b) * D(n) = a^2 * D(n) + b^2 * D(n) = a * D(n) + b * D(n)$

vii) $a * (u + v) = a * u + a * v$. Seja $a, b \in \Re$, $D(n)$, $D(n1) \in K$, então:

$a*(D(n)+D(n1))=a^2*D(n)+a^2*D(n1)=a*D(n)+a*D(n1)$

viii) $1*u=u$. Seja $D(n)\in K$, então: $1*D(n)=1^2*D(n)=1*D(n)$

O professor questionou a propriedade vi) ao aluno: será que realmente a propriedade vi é satisfeita? $(a+b)*D(n)=a^2*D(n)+b^2*D(n)$? Analise novamente esta propriedade. Dessa forma, o aluno verificou novamente e, chegou à conclusão que a propriedade vi) não era satisfeita, pois:

$(a+b)*D(n)=(a+b)^2*D(n)\neq a^2*D(n)+b^2*D(n)=a*D(n)+b*D(n)$, pois

$$(a+b)*D(n)=(a+b)^2*D(n)=(a^2+2*a*b+b^2)*D(n)$$
$$=a^2*D(n)+2*a*b*D(n)+b^2*D(n)$$

Neste caso, concluiu que o conjunto K não é um espaço vetorial, pois não satisfaz a propriedade vi) da multiplicação por escalar, de acordo com a multiplicação por escalar definida.

Mas, o aluno definiu novamente a operação de multiplicação do conjunto K como a multiplicação usual e verificou novamente as propriedades v), vi), vii) e viii).

v) $(a*b)*u=a*(b*u)$, $a,b\in\Re$. Seja $a,b\in\Re$, $D(n)\in K$, então:

$(a*b)*D(n)=a*(b*D(n))$

vi) $(a+b)*u=a*u+b*u$. Seja $a,b\in\Re$, $D(n)\in K$, então:

$(a+b)*D(n)=a*D(n)+b*D(n)$

vii) $a*(u+v)=a*u+a*v$. Seja $a,b\in\Re$, $D(n),D(n1)\in K$, então:

$a*(D(n)+D(n1))=a*D(n)+a*D(n1)$

viii) $1*u=u$. Seja $D(n)\in K$, então: $1*D(n)=D(n)$

Neste caso, como todas as propriedades de soma e multiplicação por escalar foram verificadas, concluindo que o conjunto K é um espaço vetorial.

Exemplo 2: Espaço da composição dos concretos

O aluno definiu o conjunto T: composição dos concretos formados por vetores da forma (c,ag,am,a), onde cada coordenada deste vetor informa a proporção de cada elemento c,ag,am,a necessária para resultar no concreto desejado, sendo $c=cimento$, $ag=agregadograúdo$, $am=agregadomiúdo$, $a=água$, de tal forma que $\frac{c}{ag}=\frac{am}{a}$. O conjunto T é definido com a operação de soma e multiplicação por escalar usual.

Em seguida, o aluno verificou se T é um espaço: Sendo u, v vetores pertencentes ao espaço T e, a, b escalares pertencentes ao conjunto dos números reais ($\Re$).

i) $u+v=v+u$. Seja: $u = concreto\,auto\,adensável = (c, ag, am, a) \in T$ e, $v = concreto\,convencional = (c', ag', am', a') \in T$.

$$u+v=(c,ag,am,a)+(c',ag',am',a')=(c+c',ag+ag',am+am',a+a)$$
$$=(c'+c,ag'+ag,am'+am,a'+a)=(c',ag',am',a')+(c,ag,am,a)=v+u$$

ii) $(u+v)+w=u+(v+w)$. Seja:

$u = concreto\,auto\,adensável = (c, ag, am, a) \in T$,

$v = concreto\,convencional = (c', ag', am', a') \in T$ e,
$w = concreto\,leve\,estrutural = (c'', ag'', am'', a'') \in T$

$$(u+v)+w=[(c,ag,am,a)+(c',ag',am',a')]+(c'',ag'',am'',a'')=$$
$$=(c+c',ag+ag',am+am',a+a')+(c'',ag'',am'',a'')$$
$$=(c+c'+c'',ag+ag'+ag'',am+am'+am'',a+a'+a'')$$
$$=(c+(c'+c''),ag+(ag'+ag''),am+(am'+am''),a+(a'+a''))$$
$$=(c,ag,am,a)+((c'+c''),(ag'+ag''),(am'+am''),(a'+a''))$$
$$=(c,ag,am,a)+((c',ag',am',a')+(c'',ag'',am'',a''))=u+(v+w)$$

iii) $u+en=u$, onde $en = elementoneutro$

O aluno definiu o elemento neutro do conjunto T como o vetor (c, ag, am, a), concreto com as mesmas características de um concreto qualquer, u, assim:

$u=(c,ag,am,a)\in T$ e $en=(c,ag,am,a)\in T$, então:

$u+en=(c+c,ag+ag,am+am,a+a)=(2c,2ag,2am,2a)=(c,ag,am,a)$, obtendo um concreto com as mesmas características do concreto u, apenas com volumetria diferente.

iv) $u+(-u)=en$

O aluno definiu o elemento oposto $-u$ a fração qualquer $\left(\frac{1}{2}\right)$ retirada dos componentes do concreto u, de modo que u permaneça com as mesmas características, obtendo o elemento neutro definido na propriedade iii)

Assim: $u+\left(-\frac{1}{2}\right)u=u$ com as mesmas propriedades do concreto u, que é o elemento neutro.

O professor questionou a propriedade iii) pois, percebeu que pela descrição de elemento neutro feita pelo aluno, o mesmo ainda parece não ter entendido o que é

elemento neutro: O elemento neutro (en), não vai ser sempre o mesmo? Vai depender das características de u ? Qual a definição de elemento neutro?

Então o professor explicou que o elemento neutro é sempre o mesmo, ou seja, ele não pode alterar dependendo das características de u, concreto qualquer do conjunto T, pois no item iii), o aluno definiu o elemento neutro como sendo um vetor concreto com as mesmas características de um concreto qualquer (u). E, dessa forma, uma vez alterado o elemento neutro, é preciso repensar o elemento oposto.

O aluno refletiu e definiu o elemento neutro como $en=\left(\frac{c}{2},\frac{ag}{2},\frac{am}{2},\frac{a}{2}\right)$, e validou a sua formulação da seguinte forma:

iii) $u+en=u$, onde $en=elementoneutro$

$$u+en=(c,ag,am,a)+\left(\frac{c}{2},\frac{ag}{2},\frac{am}{2},\frac{a}{2}\right)=\left(c+\frac{c}{2},ag+\frac{ag}{2},am+\frac{am}{2},a+\frac{a}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{3c}{2},\frac{3ag}{2},\frac{3am}{2},\frac{3a}{2}\right)=u$$

Pois, $\frac{\frac{3}{2}c}{\frac{3}{2}ag}=\frac{\frac{3}{2}am}{\frac{3}{2}a}$

O aluno validou a sua formulação ao mostrar que ao adicionarmos o elemento neutro $\left(\frac{c}{2},\frac{ag}{2},\frac{am}{2},\frac{a}{2}\right)$ a qualquer concreto u do conjunto T resultará no mesmo concreto u, pois o que caracteriza os tipos de concretos diferentes é a proporção dos elementos que o constituem, ou seja, $\frac{c}{ag}=\frac{am}{a}$.

Dessa forma, houve a necessidade de se definir novamente o elemento oposto ($-u$):

iv) $u+(-u)=en$

O aluno definiu como elemento inverso do conjunto T o vetor:

$-u=\left(-\frac{c}{2},-\frac{ag}{2},-\frac{am}{2},-\frac{a}{2}\right)\in T$, temos então que:

$$u+(-u)=(c,ag,am.a)+\left(-\frac{c}{2},-\frac{ag}{2},-\frac{am}{2},-\frac{a}{2}\right)=\left(c-\frac{c}{2},ag-\frac{ag}{2},am-\frac{am}{2},a-\frac{a}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{c}{2},\frac{ag}{2},\frac{am}{2},\frac{a}{2}\right)=en$$

Em seguida o aluno verificou as propriedades de multiplicação por escalar:

v) $(a*b)*u=a*(b*u)$, $a,b\in\Re$

Seja $a,b\in\Re$ (quantidades de aditivos para concreto) e $u=(c,ag,am,a)\in T$

Então: $(a*b)*u=(a*b)*(c,ag,am,a)= =(a*b*c,a*b*ag,a*b*am,a*b*a)$

$=a*(b*c,b*ag,b*am,b*a)$

$=a*[b*(c,ag,am,a)]=a*(b*u)$

vi) $(a+b)*u=a*u+b*u$

Seja $a,b\in\Re$ (quantidades de aditivos para concreto) e $u=(c,ag,am,a)\in T$

Então: $(a+b)*u=(a+b)*(c,ag,am,a)=$

$=(a*c+b*c,a*ag+b*ag,a*am+b*am,a*a+b*a)$

$=a*(c,ag,am,a)+b*(c,ag,am,a)$

$=a*u+b*u$

vii) $a*(u+v)=a*u+a*v$

Seja $u=concreto\,auto\,adensável=(c,ag,am,a)\in T$

$v=concreto\,convencional=(c',ag',am',a')\in T$

$a\in\Re$ (quantidades de aditivos para concreto)

Então: $a*(u+v)=a*[(c,ag,am,a)+(c',ag',am',a')]=$

$=a*(c+c',ag+ag',am+am',a+a')$

$=(a*c+a*c',a*ag+a*ag',a*am+a*am',a*a+a*a')$

$=(a*c,a*ag,a*am,a*a)+(a*c',a*ag',a*am',a*a')$

$=a*(c,ag,am,a)+a*(c',ag',am',a')$

$=a*u+a*v$

viii) $1*u=u$

Seja $u=concreto\,auto\,adensável=(c,ag,am,a)\in T$ e 1 = número de vezes que o concreto é misturado. Então:

$1*u=1*(c,ag,am,a)=(1*c,1*ag,1*am,1*a)=(c,ag,am,a)=u$

De fato, o número de vezes que o concreto é misturado não irá alterar a composição do concreto em questão.

Dessa forma, o conjunto T satisfaz as propriedades de um espaço vetorial, logo T é um espaço vetorial.

Conclusão

A partir dos resultados obtidos pode-se dizer que os objetivos foram atingidos, ou seja, os alunos compreenderam o conceito de espaço vetorial, o que permitiu que os mesmos desenvolvessem o seu espaço vetorial estendendo este conceito às mais diversas aplicações.

Porém esta compreensão foi resultado de uma sequência didática planejada pelo professor segundo a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. As interações entre professor-aluno e o *milieu* em cada situação didática proporcionaram aos alunos, situações de reflexão, discussão e ação que contribuíram para a aquisição do conhecimento. Em todas as sequências didáticas apresentadas observou-se que a utilização dos diferentes registros proporcionou uma apropriação mais significativa pelos alunos do objeto matemático Espaço Vetorial.

A imagem do ônibus espacial provocou nos alunos certa curiosidade e, neste espírito de curiosidade, a partir das questões em cada situação didática, o conceito foi sendo construído e formalizado. Sendo assim, o conceito que de uma forma geral é considerado abstrato e de difícil compreensão, foi sendo introduzido de forma natural em cada situação didática, a partir de um *milieu* munido de intenções didáticas.

A partir dos exemplos de Espaço Vetorial desenvolvidos pelos alunos o professor verificou as dúvidas que ainda permaneciam, como dúvidas em relação às propriedades de Espaço Vetorial e dificuldades no desenvolvimento algébrico, observações citadas no exemplo 1 de espaço vetorial.

Percebe-se que quando o aluno tem autonomia para desenvolver o seu próprio espaço vetorial, não há como ele agir de forma mecânica para verificar as propriedades, pois cada uma delas deve fazer sentido para o conjunto definido por ele. Essa experiência é muito diferente da resolução de listas de exercícios propostos pelo professor. Pois quando o aluno resolve os exercícios propostos pelo professor, não há garantia de que ele realmente entendeu o conceito, ou simplesmente seguiu uma regra. Quando o aluno propõe o seu problema, ele precisa justificar e, a sua justificativa deve fazer sentido, ou seja, ele não tem como avançar sem ter validado a sua formulação e, neste momento, surgem as dúvidas significativas para a evolução de seu aprendizado e apropriação do saber. Uma vez, discutida e esclarecida estas dúvidas na fase de validação e institucionalização, ele estará preparado para construir, elaborar conjecturas na resolução de diversos exercícios propostos, pois cada propriedade terá um papel muito mais significativo.

Referências

ALMOULOUD, S. Ag. Fundamentos da Didática da Matemática. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BOLDRINI, J.C et al. Álgebra Linear. 3ª. Edição. São Paulo: Editora Harbra, 1980. 411p.

BOYER, C. B., MERZBACH, U.C. História da Matemática. 3ª. Edição. São Paulo: Blucher, 2012.

BROUSSEAU, Guy. Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARLSON, J. et al. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. The College Mathematics Journal, Vol. 24, No. 1 (Jan., 1993), p. 41-46

COWEN, C.C. On the Centrality of Linear Algebra in the Curriculum, 1987. Disponível em < http://www.maa.org/centrality-of-linear-algebra>. Acesso em: 19/05/2014.

DUVAL R, Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels, Peter Lang, 1995.

FRATELLI, Bianca Cristina; MONTEIRO, Martha Salermo. As Dificuldades do Ensino e Aprendizagem de Álgebra Linear. São Paulo. 2007. Disponível em: < http://www.ime.usp.br/~cpq/main/arquivos/outros/Bianca%20Cristina%20Fratelli.pdf > Acesso em: 19/05/2014.

LAY, D. C. *Álgebra Linear* e Suas Aplicações. 2ª. Edição. São Paulo: LTC, 1999, 470p.

Teodora Pinheiro Figueroa - Doutora em Engenharia Mecânica

Programa de Pós-Graduação em Matemática - PROFMAT

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco

Saddo Ag Almouloud - Doutor em Educação Matemática

PEPEG em Educação Matemática

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.