Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia
ISSN: 1982-873X

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect

Como estudantes de Licenciatura em Matemática justificam problemas geométricos a partir de provas visuais?

João Caldato
profjoaocaldato@gmail.com
0000-0001-6951-3590
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

André Pereira da Costa
andre.costa@ufob.edu.br
0000-0003-0303-8656
Universidade Federal do Oeste da Bahia, Barreiras, Bahia, Brasil.

Lilian Nasser
lnasser.mat@gmail.com
0000-0001-6050-4807
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil.

RESUMO

O objetivo deste artigo é investigar como estudantes de Licenciatura em Matemática justificam problemas geométricos a partir de provas visuais. Apesar do aumento no número de trabalhos de pesquisa em argumentação e provas no ensino de Matemática, observa-se que atividades desta natureza não são comuns na Educação Básica. Em outras palavras, grande parte dos professores que ensina Matemática não costuma pedir que seus alunos justifiquem as resoluções de tarefas ou os raciocínios utilizados. Em particular, não exploram atividades que desenvolvam a visualização na resolução de problemas ou justificativas para afirmativas de propriedades matemáticas. A visualização constitui um componente importante na compreensão de um conceito ou de um problema geométrico, e pode contribuir para esse desenvolvimento. Visualizar um problema significa compreendê-lo em termos de uma imagem visual (mental), constituindo uma parte essencial do método de solução. O percurso metodológico utilizado nesta pesquisa qualitativa foi o envio de um questionário online, elaborado no *Google Forms*, com três problemas caracterizados por provas visuais para licenciandos de Matemática de diversas Instituições de Ensino Superior. Por meio deste procedimento de coleta, a amostra por conveniência abrangeu 58 estudantes e as respostas foram analisadas de acordo com uma análise textual. Os dados indicam que, ao mobilizarem a visualização, embora os licenciandos consigam apresentar um encadeamento lógico em uma argumentação, grande parte deles não percebe a necessidade de justificar todos os argumentos utilizados. Além disso, em alguns casos, a maioria dos participantes não conseguiu perceber qual era a relação a ser demonstrada a partir da figura geométrica, ou procurou justificar um resultado distinto do que era esperado. Em vista disso, é preciso incentivar a exploração de atividades que desenvolvam o processo dedutivo com os licenciandos de Matemática, em especial, a elaboração e justificativas a partir de provas visuais, a fim de que eles utilizem tais estratégias em suas práticas pedagógicas futuras, uma vez que tais provas podem ser acessíveis aos estudantes da Educação Básica.

PALAVRAS-CHAVE: Licenciandos de Matemática. Argumentação e Provas. Abstrações Geométricas. Provas Visuais.

1 INTRODUÇÃO

Este artigo é uma versão revisada e ampliada de uma pesquisa apresentada no VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), envolvendo a mobilização de licenciandos em Matemática acerca de provas visuais, ou seja, provas sem palavras, baseadas na visualização de esquemas ou figuras (CALDATO; PEREIRA DA COSTA; NASSER, 2021).

Tal pesquisa foi motivada pela observação de que muitos professores de Matemática da Escola Básica não se preocupam em desenvolver em seus alunos habilidades de argumentação, nem pedem que estes justifiquem suas resoluções para as tarefas resolvidas (PEZARINI; MACIEL, 2019). Deste modo, os estudantes perdem oportunidades de desenvolver seu pensamento dedutivo, ficando restritos apenas à resolução de exercícios repetitivos e à aplicação de algoritmos. Uma explicação para este desinteresse pode estar na formação inicial dos professores de Matemática. A necessidade de aprimorar a habilidade do processo dedutivo em licenciandos tem chamado a atenção de pesquisadores como Pietropaolo (2005), Ordem (2015), Mateus (2015), Ferreira (2016) e Nasser e Caldato (2019).

Analisando as respostas de licenciandos a questões discursivas do Exame Nacional do Ensino Superior (ENADE) (BRASIL, 2008, 2011, 2014), que requerem raciocínio dedutivo, propostas aos licenciandos nas últimas aplicações, Nasser e Caldato (2018) investigaram se os cursos de Licenciatura em Matemática têm fomentado o desenvolvimento do processo dedutivo dos futuros professores. Em algumas questões, as respostas apresentadas basearam-se em argumentos de natureza empírica, apenas experimentando a validade da afirmativa para poucos exemplos. Observando os relatórios do ENADE, foi possível inferir que os estudantes não encontram nos cursos de graduação em Matemática oportunidades para superar tais dificuldades e “[...] concluem o curso com pouca habilidade em argumentação, tendo em vista a alta porcentagem de respostas em branco e erradas” (NASSER; CALDATO, 2018, p. 10).

Na tentativa de contribuir com essa problemática da formação de professores para explorar atividades de argumentação e processos dedutivos com seus futuros alunos, este artigo tem como objetivo investigar como estudantes de Licenciatura em Matemática justificam problemas geométricos a partir de provas visuais. A hipótese formulada é que esses sujeitos não conseguem lidar corretamente com situações que abordam argumentação e provas visuais, o que pode significar o pouco contato ou ausência dessas situações no ensino de Matemática, bem como nos cursos de formação inicial de professores.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste texto, como fundamentação teórica, foram adotadas pesquisas que discutem provas e processos dedutivos, visualização no ensino de Matemática e provas visuais, conforme apresentado nas próximas seções.

2.1 Provas e processos dedutivos

Percebendo o crescimento do número de pesquisas e a grande variedade de abordagens sobre provas no ensino de Matemática, Reid e Knipping (2010) apresentam as principais linhas de pesquisa nesta área e discutem trabalhos com foco nas demonstrações em Matemática e suas diversas interpretações.

Dentre tais pesquisas, Tall (1995) descreve três tipos de provas: ativas, visuais e manipulativas. Enquanto as provas ativas envolvem o desenvolvimento de uma ação física para demonstrar a verdade de um resultado, as provas manipulativas envolvem simplificação algébrica. Por sua vez, as provas visuais envolvem elementos ativos (e usualmente têm suporte verbal).

Segundo Healy e Hoyles (1998, p. 1, tradução dos autores), "[...] a prova é o coração do pensamento matemático e do raciocínio dedutivo, que sustenta o processo de prova, e o que distingue a Matemática das ciências empíricas". Porém, para Martin e Harel (1989 apud HEALY; HOYLES, 2000, p. 396), os estudantes de Matemática, em geral, não possuem clareza sobre a distinção entre o raciocínio dedutivo e o raciocínio empírico ou informal.

Por esta razão, Caldato (2018) sugere uma abordagem problematizada nos cursos de licenciatura, de modo que o futuro professor possa estabelecer relações entre o conteúdo matemático e seu ensino, sendo capaz de articular os processos dedutivos e as demonstrações fomentadas no âmbito acadêmico com a sua prática, a fim de fomentar os "porquês" da Matemática na Educação Básica.

2.2 Visualização no ensino de matemática

Este artigo aborda a percepção de professores em formação inicial em relação a provas visuais, ou provas sem palavras, como as encontradas na obra de Nelsen (1993), que inspiraram os três problemas utilizados nesta pesquisa.

Shatri e Buza (2017) investigaram o uso da visualização no ensino e na aprendizagem para o desenvolvimento do pensamento crítico de estudantes. Segundo esses pesquisadores, atividades com abordagem visual favorecem a comunicação, aumentam o pensamento crítico e possibilitam uma interpretação analítica. Além disso, eles consideram que a visualização ajuda na compreensão de um conceito ou de um problema. Visualizar um problema significa compreendê-lo em termos de uma imagem visual mental, constituindo uma parte essencial do método de solução.

Portanto, a visualização é um componente crucial para a aprendizagem de conceitos geométricos. Neste artigo, o foco da investigação é sobre o domínio de licenciandos de Matemática em relação a provas sem palavras, apoiadas apenas na visualização de esquemas ou figuras.

Em sua dissertação, Santos (2014, p. 26) apresenta um quadro com as definições de visualização adotadas por 18 pesquisadores nacionais e internacionais, e assume "[...] a vertente que aponta para um entendimento da visualização como elemento estruturante na formação das imagens mentais para o desenvolvimento do pensamento visual". A autora analisa três tipos de visualização: geométrica, algorítmica e contextualizada, salientando que uma não se sobrepõe à outra, e nem se equivalem, apenas se complementam. No entanto, destaca que o tipo de visualização mais encontrado na literatura acadêmica é a geométrica.

Presmeg (2006) apresentou um levantamento de pesquisas envolvendo visualização e afirma que esta inclui processos de construir e de transformar uma imagem visual mental e todas as representações de natureza espacial que podem estar envolvidas em fazer Matemática.

A visualização não pode ser confundida com o simples enxergar com os olhos, mas consiste em um processo que engloba aspectos que vão além dos sentidos, como as capacidades de: imaginação, intuição, compreensão e síntese. Assim, a visualização é um elemento importante para a abstração em Matemática e, consequentemente, para o desenvolvimento do pensamento geométrico, cuja relevância foi reconhecida pelos antigos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> [...] o pensamento geométrico desenvolve-se inicialmente pela **visualização**: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas. As figuras geométricas são reconhecidas por suas formas, por sua aparência física, em sua totalidade, e não por suas partes ou propriedades. (BRASIL, 1997, p. 82, grifo dos autores).

Na localização do espaço, a criança reconhece as figuras geométricas a partir da representação de objetos físicos. Trata-se de um processo de abstração de natureza empírica, no qual a interação física com a realidade desempenha um papel essencial. Nessas atividades geométricas, "o objeto é o foco da atenção e, só mais tarde, a linguagem utilizada para a descrição permite que a mente construa objetos platônicos, como linhas 'sem largura' [...]" (ALMOULOUD, 2017, p. 29).

Considerando que os objetos em Matemática são invisíveis em nossa realidade sensível e só existem no mundo inteligível, estes devem ser analisados por meio de um sistema de representação (DUVAL, 1995). Assim, os objetos matemáticos são construções mentais que só são entendidos por meio da nossa capacidade de abstração.

No campo da Geometria, Pereira da Costa (2019, 2020) discute que as abstrações geométricas possibilitam o desenvolvimento do pensamento geométrico. Esse tipo de abstração "[...] é uma operação mental, por meio da qual somos conscientes de similaridades entre nossas experiências geométricas" (PEREIRA DA COSTA, 2020, p. 142). Assim, propõe uma tipologia de abstrações em Geometria, que consiste em uma alternativa para caracterização do pensar geométrico, mostrada no Quadro 1.

Quadro 1 – Tipologia de abstrações geométricas

Abstração Geométrica	**Caracterização**
Espacial	É distinguida pelo estudo (ou vivência) dos conceitos de orientação espacial, que envolvem também localização, orientação, deslocamento, etc.
Perceptiva	É caracterizada por sensações perceptivas e visuais. Nessa abstração geométrica, uma figura é analisada como um todo, destituída de elementos e de propriedades.
Analítica	É marcada pela análise das figuras geométricas conforme seus elementos constituintes e suas propriedades, todavia, não é possível estabelecer relações de inferências entre essas propriedades.

Descritiva	É assinalada pelo estabelecimento de relações de implicação entre propriedades dos objetos geométricos, mas sem o uso de argumentação dedutiva na justificativa desse estabelecimento.
Dedutiva	Caracteriza-se pelo estudo (ou vivência) de provas, demonstrações, argumentações e conjecturas de natureza tanto intuitiva como dedutiva. A Geometria passa a ser vista como um modelo teórico matemático, formado por axiomas e teoremas.
Hipotética (ou teórica)	É apontada pelo estudo (ou vivência) com diferentes geometrias, sobretudo as chamadas Geometrias Não-Euclidianas, a partir do estudo de teorias axiomáticas e do uso de uma linguagem formal axiomática.

Fonte: Pereira da Costa (2019).

Nessa direção, tendo por base um ensino de Geometria na Educação Básica que promova o desenvolvimento do pensamento geométrico, seria aconselhável que os cursos de Licenciatura em Matemática enfatizassem propostas ancoradas nas abstrações geométricas, em especial, a dedutiva e a hipotética (teórica). Desse modo, o futuro professor teria oportunidade de vivenciar experiências de argumentação e provas e, consequentemente, do processo dedutivo, sendo capaz de explorar esse tipo de atividade em suas aulas, minimizando os problemas de desempenho apresentados pelos alunos.

2.3 Provas visuais

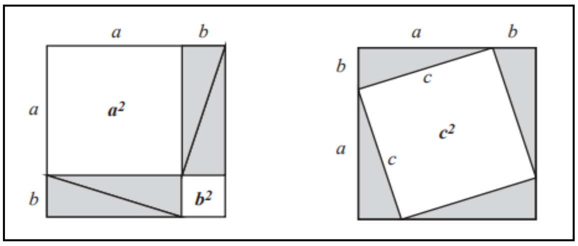
Hanna (2000) questiona o uso intensificado da visualização, isto é, se, ou até que ponto,

> [...] as representações visuais podem ser usadas, não apenas como evidência de uma declaração matemática, mas também em sua justificativa. Diagramas e outros auxílios visuais têm sido usados há muito tempo para facilitar a compreensão. Eles foram bem-vindos como acompanhamentos heurísticos à prova, na qual podem inspirar o teorema a ser provado e abordar a própria prova. [...] hoje, há muita controvérsia sobre esse tema, e a questão agora está sendo explorada por vários pesquisadores. (HANNA, 2000, p. 15, tradução dos autores).

Em sua pesquisa, Borwein e Jörgenson (2001) levantam a seguinte questão: Até que ponto uma representação visual pode ser considerada uma prova?. Para os autores, enquanto a prova matemática tradicionalmente segue uma sequência dedutiva de sentenças, uma prova visual seria apresentada como uma imagem estática. Eles apontam que tal imagem pode conter a mesma informação que a primeira, mas não exibem um caminho explícito para obtê-la, “[...] deixando o espectador estabelecer o que é importante (e o que não é) e em que ordem as relações devem ser analisadas” (BORWEIN; JÖRGENSON, 2001, p. 899, tradução dos autores). Por isso, estes pesquisadores acreditam que, em geral, as provas visuais tendem a ser limitadas quanto à generalização. Apesar dos próprios pesquisadores não terem respondido definitivamente à questão introdutória, ao problematizar o lugar das representações visuais na Matemática, eles acreditam que algumas podem ser denominadas como provas (HANNA, 2000).

Por sua vez, Reid e Knipping (2010) enquadram a prova visual como uma subcategoria de provas genéricas, as quais utilizam argumentos baseados em exemplos representativos de uma classe de objetos. Em vista disso e com o intuito de exibir uma prova visual, os pesquisadores recorrem ao trabalho de Tall (1995), em particular, à prova indiana para o Teorema de Pitágoras, que utiliza a comparação entre as áreas de dois quadrados de lado $a + b$ para justificar a igualdade $a^2 + b^2 = c^2$, como mostra a Figura 1. Esta prova visual foi apresentada no segundo problema do questionário.

Figura 1 – Prova visual do Teorema de Pitágoras



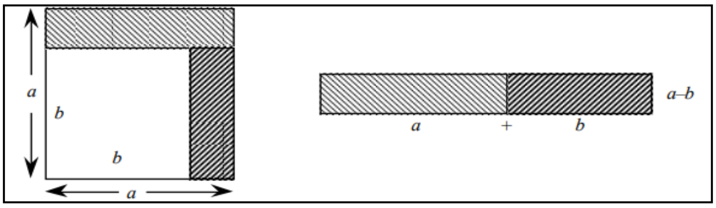
Fonte: Tall (1995, p. 5).

De acordo com Tall (1995), para compreender esta prova visual é essencial imaginar os triângulos como objetos dinâmicos. Além disso, ele evidencia que

> [...] qualquer desenho real terá valores específicos para a e b, mas esse diagrama pode ser visto como um protótipo, típico de qualquer triângulo retângulo. Isso fornece um tipo de prova que muitas vezes é denominada “genérica”; ela permite “ver o [caso] geral no específico”. (TALL, 1995, p. 6, tradução dos autores).

Contudo, o pesquisador ressalta que um dos pontos fracos da prova visual se deve à limitação dos diagramas, visto que sua aplicação se estende apenas à classe de objetos em questão. Para exemplificar isso, pode-se observar a Figura 2, na qual Tall (1995) utiliza argumentos visuais para justificar a identidade algébrica $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, que expressa a diferença dos quadrados de dois números.

Figura 2 – Prova visual para a diferença entre dois quadrados



Fonte: Tall (1995, p. 6).

Note que essa prova possui certas limitações, pois se aplica apenas aos números reais positivos, com $a > b$, enquanto a identidade algébrica para a diferença de dois quadrados é válida para quaisquer números reais. Além disso, Tall (1995, p. 9, tradução dos autores) afirma que “[...] o que é satisfatório para um indivíduo em fase de desenvolvimento pode se tornar insatisfatório mais tarde”, ou seja, a prova visual ilustrada na Figura 2 poderia ser convincente para os alunos da Educação Básica, por exemplo, mas devido às suas restrições poderia também ser questionada por estudantes do Ensino Superior.

3 PERCURSO METODOLÓGICO

O objetivo desta pesquisa foi investigar como estudantes de Licenciatura em Matemática justificam problemas geométricos a partir de provas visuais. Nesse sentido, adotou-se uma abordagem qualitativa por considerá-la a mais adequada ao estudo, tendo por base sua natureza e especificidade. Para Gil (2008), a pesquisa qualitativa busca compreender um fenômeno social em sua complexidade a partir de dados verbais e visuais coletados sistematicamente. No caso desta pesquisa, o fenômeno a ser compreendido é constituído pelos processos dedutivos mobilizados por licenciandos em Matemática na resolução de problemas que exploram provas visuais.

Para desenvolver a investigação, foram propostos três problemas envolvendo provas visuais, que demandam apresentação de justificativa/argumentação de natureza dedutiva, logo, são problemas que se situam na abstração geométrica dedutiva, conforme indicado por Pereira da Costa (2019). Assim, foi utilizado como instrumento de coleta de dados um questionário online, elaborado no *Google Forms*. Posteriormente, o link (https://forms.gle/BpTUxTKniNkeNapq6) foi compartilhado em grupos nas redes sociais ou enviados por e-mail, para diferentes Instituições de Ensino Superior, e a seleção da amostra foi por conveniência. Esta forma de coleta de dados permitiu uma maior abrangência da amostra, especialmente, no sentido geográfico.

Ao todo, 60 participantes responderam ao questionário durante o mês de abril de 2021. Contudo, dois deles não autorizaram a utilização dos dados. Em vista disso, a amostra foi constituída por 58 licenciandos em Matemática, designados, respectivamente, por L1, L2, ..., L58. Os estudantes eram oriundos de sete estados brasileiros (RJ, BA, PB, PE, RN, TO e SP), cujo ano de ingresso na graduação variava entre 2009 e 2021. Todavia, como o propósito deste artigo não é fazer uma avaliação das instituições, os seus nomes foram preservados.

O procedimento de coleta pode ser classificado, apesar das limitações, como uma pesquisa *survey* (levantamento), descrita como,

> [...] a obtenção de dados ou informações sobre características, ações ou opiniões de determinado grupo de pessoas, indicado como representante de uma população-alvo [...] por meio de um instrumento de pesquisa, normalmente um questionário (ALYRIO, 2009, p. 129).

Assim, como ferramenta analítica, a escolha foi utilizar uma análise textual dos dados, por meio da qual foi possível elaborar uma classificação simples das respostas/produções dos estudantes aos três problemas contidos no questionário, conforme apresentado no Quadro 2.

Quadro 2 – Tipos de respostas e critérios de análise dos dados

Tipos de respostas	Descrição
Identificação da relação matemática com justificativa completa	O participante identificou a relação matemática abordada no problema e justificou corretamente todos os argumentos utilizados.
Identificação da relação matemática com justificativa incompleta	O participante identificou a relação matemática abordada no problema e justificou parcialmente os argumentos utilizados.

Identificação da relação matemática sem justificativa	O participante identificou a relação matemática abordada no problema e não apresentou argumentos válidos.
Sem identificação da relação matemática	O participante não identificou corretamente a relação matemática abordada no problema.
Sem resposta	O participante não respondeu ao problema, ou seja, disse que não sabia ou deixou em branco.

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

4 ANÁLISE DOS DADOS

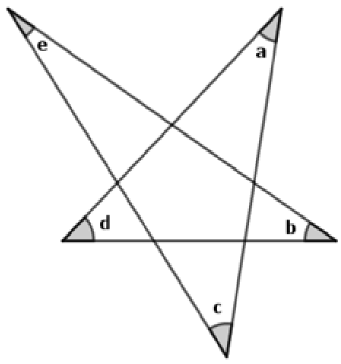
Neste artigo são apresentadas e discutidas as respostas dos licenciandos aos três problemas descritos no questionário, os quais estão ilustrados nas Figuras 3, 5 e 8.

O primeiro problema (Figura 3) aborda a medida dos ângulos internos de uma estrela pentagonal, também conhecida como pentagrama ou estrela de cinco pontas. Na justificativa, se o participante conseguir provar que a soma das medidas dos ângulos internos mede 180°, certamente, estará mobilizando a abstração geométrica dedutiva proposta por Pereira da Costa (2019), visto que será capaz de perceber a Geometria (Euclidiana) como um modelo matemático constituído por um conjunto de teoremas e axiomas.

Figura 3 – Problema 1

A figura ao lado pode ser utilizada para justificar um resultado matemático. Com base nisso, responda:

a) Qual seria este resultado?
b) Como você chegou a esta conclusão? **Justifique a sua resposta.**



Fonte: Caldato, Pereira da Costa, Nasser (2021, p. 692).

Há pelo menos cinco formas corretas de se resolver esse problema. Mas, basicamente, para descobrir que a soma das medidas dos ângulos internos é igual a 180° ($a + b + c + d + e = 180°$), é necessário fazer uso de duas propriedades vinculadas aos triângulos euclidianos: (i) a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°; (ii) em um triângulo qualquer, o valor da medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele. Esta última relação também é conhecida como teorema do ângulo externo. A dificuldade deste item está na incompreensão dessas propriedades acerca dos triângulos euclidianos.

Nelsen (1993), ao propor este problema em seu livro, sugere auxílios visuais por meio de semirretas, a partir de um dos vértices, paralelas a dois lados da estrela. O uso de elementos auxiliares vai na direção do que foi descrito por Hanna

(2000), pois ajuda na compreensão do problema e encaminha a construção de uma justificativa do resultado.

A partir da análise dos dados, foram identificados os seguintes tipos de respostas descritos no Quadro 3:

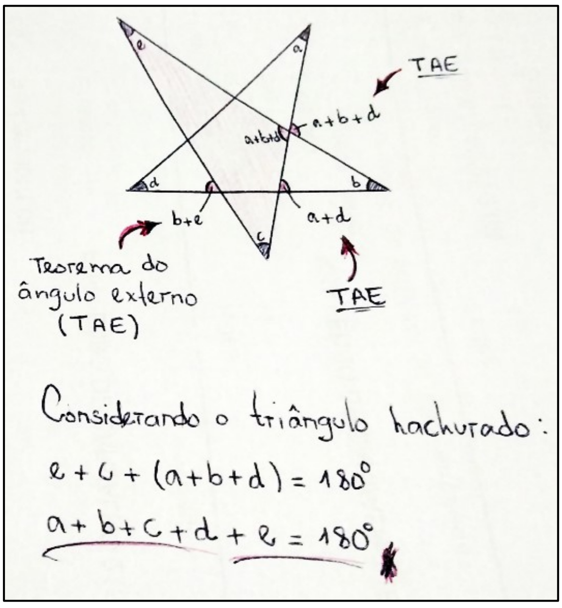
Quadro 3 – Tipos de respostas dos licenciandos ao problema 1

Tipos de respostas	Descrição	Frequência
Identificação da relação matemática com justificativa completa	O participante identificou a relação matemática e justificou corretamente por meio do teorema do ângulo externo e a partir da soma das medidas dos ângulos internos.	12
Identificação da relação matemática com justificativa incompleta	O participante identificou a relação matemática e justificou parcialmente por meio do teorema do ângulo externo e a partir da soma das medidas dos ângulos internos.	04
Identificação da relação matemática sem justificativa	O participante identificou a relação matemática e não justificou por meio do teorema do ângulo externo e nem a partir da soma das medidas dos ângulos internos.	02
Sem identificação da relação matemática	O participante não identificou corretamente a relação matemática.	37
Sem resposta	O participante não respondeu ao problema.	03

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Doze estudantes apresentaram justificativas corretas ao problema, fazendo referência às duas propriedades dos triângulos euclidianos, isto é, fizeram uso do teorema do ângulo externo e da soma dos ângulos internos, conforme é possível observar na Figura 4 (Resposta do L14). Logo, esse dado indica que aproximadamente 20% dos licenciandos mobilizaram a abstração geométrica dedutiva, conforme dito anteriormente.

Figura 4 – Resposta com identificação e justificativa completa



Fonte: Caldato, Pereira da Costa, Nasser (2021, p. 693).

Além disso, quatro participantes encaminharam uma resposta correta. Contudo, não apresentaram uma justificativa adequada, como a resposta do L20; e dois apresentaram resposta incompleta, justificando outro resultado, isto é, outra relação matemática, como a resposta do L30. Assim, esses resultados parecem indicar que tais estudantes ainda não alcançaram a abstração geométrica dedutiva. Os fragmentos seguintes corroboram este fato:

> A soma dos 5 ângulos é 180 graus, cheguei nessa conclusão movimentando os ângulos e colocando um do lado do outro. (Resposta do L20).
>
> A soma da medida de abertura dos ângulos do pentágono é 540°, utilizando os triângulos que compõem a figura. (Resposta do L30).

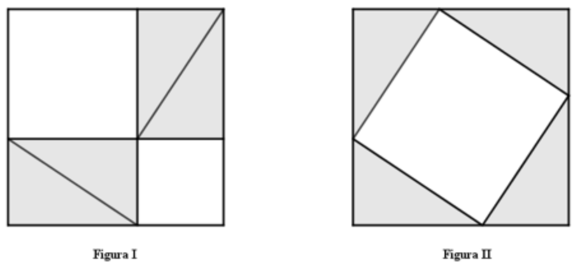
Nota-se que 63,79% dos participantes não conseguiram identificar a relação matemática explorada no problema; e 5,17% não responderam o problema. Esses dados parecem evidenciar que esses estudantes não atuam na abstração geométrica dedutiva, ou seja, não conseguem realizar provas e demonstrações em Geometria, e nem fazem uso de argumentação.

Além disso, os dados descritos no Quadro 3 sinalizam que os licenciandos em Matemática desta amostra não observam a importância e a necessidade de justificar o raciocínio apresentado na resolução de um problema. Tal comportamento pode gerar implicações diretas na Educação Básica, visto que não é trabalhada com os alunos desse nível escolar a justificativa para a solução de problemas matemáticos, sobretudo, os de natureza geométrica.

O segundo problema diz respeito ao Teorema de Pitágoras. Inicialmente foram apresentadas as figuras I e II que podem ser utilizadas para justificar este teorema no âmbito da Educação Básica, como mostra a Figura 5:

Figura 5 – Problema 2

As figuras I e II representam dois quadrados que podem ser utilizados para justificar uma relação matemática que é ensinada na Educação Básica.



Com base nisso, responda:

a) Qual seria esta relação matemática?
b) Você conseguiria justificar esse resultado utilizando as figuras acima? **Se sim, como? Se não, por quê?**

Fonte: Elaborado pelos autores (2021).

O objetivo do item (a) era investigar se os licenciandos tinham o conhecimento de que tais figuras estavam relacionadas a uma prova visual do Teorema de Pitágoras. Com base nisso, a ideia do item (b) era apresentar uma justificativa dessa prova visual e para isso era necessário: (i) comparar as áreas das figuras I e II e argumentar que elas são iguais; (ii) demonstrar que o quadrilátero inscrito na figura II é um quadrado, a partir da congruência de triângulos e as medidas dos ângulos. Neste problema, em consonância com Tall (1995), imaginar os triângulos como objetos dinâmicos favorece a visualização da equivalência entre as áreas dos quadrados e a construção de uma justificativa genérica para a relação matemática.

A análise dos dados evidenciou que apenas 34,48% da amostra conseguiu identificar a relação matemática no item (a), como mostra o Quadro 4:

Quadro 4 – Tipos de respostas dos licenciandos ao problema 2(a)

Tipos de respostas	Descrição	Frequência
Identificação da relação matemática	A resposta classificada nesta tipologia mencionava explicitamente que era o Teorema de Pitágoras.	20
Sem identificação da relação matemática	A resposta classificada nesta tipologia mencionava que era uma relação sobre áreas ou figuras planas ou geometria plana, mas não deixava explícito que era o Teorema de Pitágoras.	10
	A resposta classificada nesta tipologia mencionava o uso do Teorema de Pitágoras no cálculo de área de figuras planas	03
	A resposta classificada nesta tipologia mencionava os produtos notáveis.	05
	A resposta classificada nesta tipologia mencionava outros tópicos de Matemática, tais como, relações métricas e equação de 2º grau.	06
Sem resposta	7 participantes disseram não saber e 8 deixaram em branco.	15

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

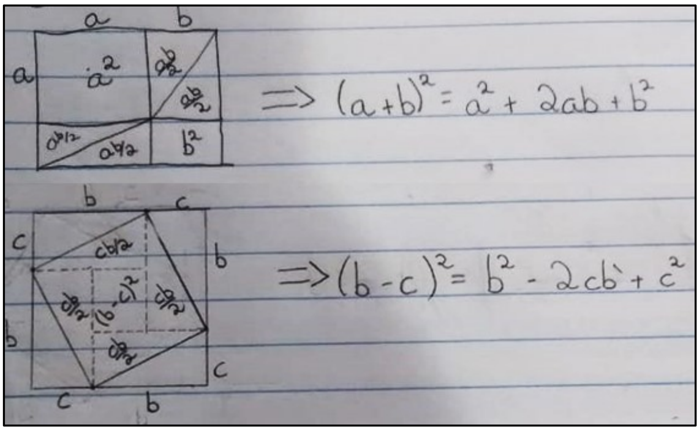
Dentre os 20 participantes que mencionaram que a relação era o Teorema de Pitágoras, mobilizando a abstração geométrica dedutiva, vale destacar a resposta do L52 que apenas escreveu a seguinte expressão: $c^2 = a^2 + b^2$. Embora a resposta esteja correta por julgar que o mesmo faz menção ao teorema, é importante pontuar que esta relação não se restringe a uma expressão algébrica, até mesmo porque o problema não dava inicialmente nomes aos lados das figuras. E se a medida do comprimento da hipotenusa tivesse associada a uma letra diferente de c, a relação continuaria sendo a mesma? Questionamentos como esse precisam ser problematizados no ensino de Matemática.

Um tipo de resposta que merece ser destacada, mesmo sendo considerada incorreta, foi mencionar a aplicação do Teorema de Pitágoras no cálculo numérico relativo à área de figuras planas. Essa ideia esteve presente na resposta de três licenciandos e uma delas foi ilustrada no fragmento a seguir:

> Está relacionada com a grandeza "área" que é uma característica de objeto geométrico, além do cálculo envolvendo o comprimento e pode ou não utilizar o teorema de Pitágoras por envolver representações de triângulos retângulos, para solucionar determinado problema proposto, além de estar relacionado com o método de completar quadrado como na Figura I. (Resposta do L33).

Embora o problema em tela trouxesse no enunciado que ambos os quadrados estavam associados a uma relação matemática, alguns participantes buscaram encontrar duas relações. Dentre eles, seis estudantes não identificaram o Teorema de Pitágoras e fizeram menção aos produtos notáveis, que foi o caso do L57, que relacionou a primeira figura ao quadrado da soma de dois termos e a segunda figura ao quadrado da diferença de dois termos, como mostra a Figura 6.

Figura 6 – Resposta sem identificação do Teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

É importante destacar que, de fato, a primeira figura geométrica representada poderia ser utilizada para provar geometricamente o quadrado da soma de dois termos, no âmbito da Educação Básica, conforme foi discutido na fundamentação teórica com base em Tall (1995). Entretanto, note que a justificativa da diferença de dois termos está incorreta, pois, dentre outros motivos, não é possível observar quadrados de áreas b^2 e c^2.

Com relação ao item (b) do segundo problema, no qual os estudantes deveriam justificar a prova visual do Teorema de Pitágoras, mobilizando a abstração geométrica dedutiva, o Quadro 5 apresenta os tipos de respostas que foram identificados nos questionários:

Quadro 5 – Tipos de respostas dos licenciandos ao problema 2(b)

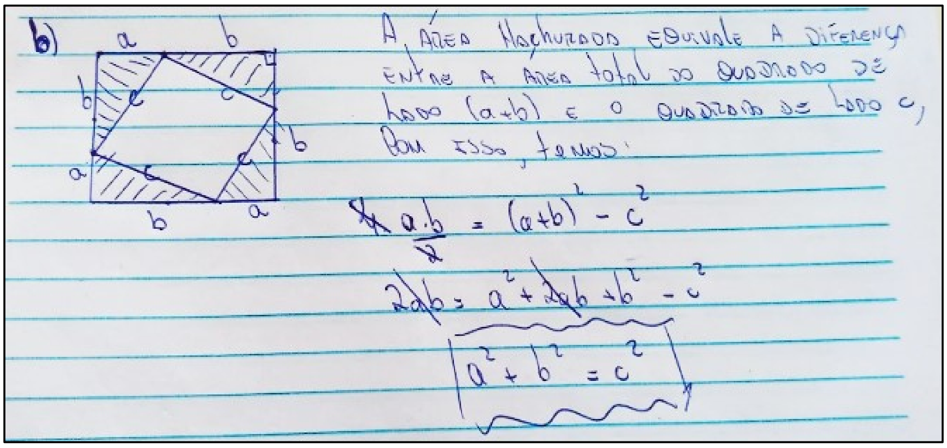
Tipos de respostas	Descrição	Frequência
Identificação da relação matemática com justificativa completa	O participante identificou no item (a) o teorema e justificou corretamente todos os argumentos utilizados no item (b).	00
Identificação da relação matemática com justificativa incompleta	O participante identificou no item (a) o teorema e justificou parcialmente os argumentos utilizados no item (b). No caso, a resposta classificada nesta tipologia, ou não justificava que o quadrilátero inscrito na figura II é um quadrado ou afirmava que era por meio da comparação das áreas dos quadrados, mas sem detalhes do raciocínio.	08
Identificação da relação matemática sem justificativa	O participante identificou no item (a) o teorema e não apresentou argumentos válidos. No caso, a resposta classificada nesta tipologia,	12

	ou evidenciava um argumento incorreto, ou não apresentava uma justificativa.	
Sem identificação da relação matemática	O participante não identificou no item (a) o teorema e respondeu ao item (b). No caso, a resposta classificada nesta tipologia identificava outra relação no item (a).	23
Sem resposta	O participante não identificou no item (a) o teorema e não respondeu ao item (b)	15

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Note que nenhum dos 20 participantes, que identificaram no item (a) que o problema era sobre o Teorema de Pitágoras, conseguiu descrever uma justificativa completamente correta da prova visual. Dentre os licenciandos que identificaram a relação matemática, oito apresentaram justificativas incompletas no item (b). O equívoco mais comum nesta tipologia, observadas em cinco respostas, foi não argumentar que o quadrilátero inscrito na figura II representa, de fato, um quadrado, de modo que fosse possível calcular a medida da área como sendo a medida do comprimento do lado elevado à segunda potência. A Figura 7 ilustra este tipo de resposta, a qual foi dada pelo L56:

Figura 7 – Resposta com identificação e justificativa incompleta



Fonte: Dados da pesquisa (2021).

Entre os doze licenciandos que identificaram a relação matemática, mas não apresentaram argumentos válidos, chamou a atenção a resposta dada pelo L16: "Se tivermos os dados dos triângulos ou do quadrado, através do teorema de Pitágoras conseguimos encontrar as outras medidas".

Embora o licenciando tenha respondido corretamente ao item (a), para justificar o Teorema de Pitágoras, ele sugere o uso do próprio teorema para determinar as medidas do comprimento de alguns lados. Isso é um indicativo de que o futuro professor não tem a nitidez (ou certeza) do significado de uma demonstração. Isso corrobora o apontamento feito por Martin e Harel (1989 apud HEALY; HOYLES, 2000).

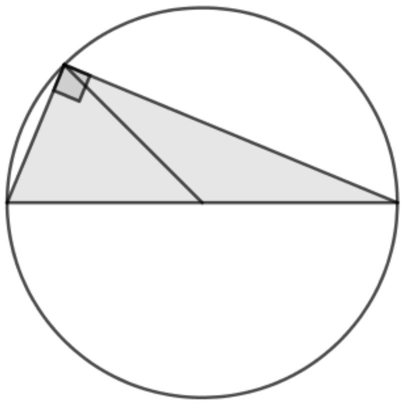
Os resultados do problema 2 apontam que a maioria dos participantes não reconhece uma das provas visuais para o Teorema de Pitágoras e não sabe justificá-la. Algumas pesquisas mostram que os futuros professores, em geral, não dominam estratégias para validar este teorema (CALDATO, 2018; MATEUS, 2015). Tais indicativos vão na direção contrária às orientações descritas na Base Nacional

Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), a qual prescreve que no 9º ano do Ensino Fundamental o aluno já deve ser capaz de demonstrá-lo, pelo menos, por meio da semelhança de triângulos. Logo, isto pode ser mais uma evidência que o ensino de Matemática tem priorizado o uso de resultados “prontos”, em detrimento da compreensão dos conceitos.

O terceiro problema (Figura 8) envolve uma propriedade do triângulo retângulo que pode ser facilmente justificada se o triângulo for inscrito numa circunferência, mobilizando, assim, a abstração geométrica dedutiva.

Figura 8 – Problema 3

A figura abaixo representa um triângulo retângulo inscrito numa circunferência e pode ser utilizada para justificar que a mediana relativa à hipotenusa mede a metade da hipotenusa. **Argumente como isso é possível**.



Fonte: Caldato, Pereira da Costa, Nasser (2021, p. 694).

Para justificar a propriedade apresentada no terceiro problema era necessário: (i) perceber que a hipotenusa do triângulo coincide com o diâmetro da circunferência, e justificar esse fato; (ii) observar que a mediana coincide com um raio e, portanto, sua medida é a metade da medida do comprimento da hipotenusa.

A dificuldade deste item recai na justificativa de que um triângulo retângulo sempre se inscreve numa semicircunferência. Como a medida de um ângulo inscrito numa circunferência corresponde à metade do comprimento do arco subtendido por seus lados, um ângulo de 90° subtende um arco de 180° e, portanto, a hipotenusa coincide com um diâmetro da circunferência. Conforme descrito por Presmeg (2006), a visualização não deve ser confundida com o simples enxergar com os olhos. E nesse sentido, uma conjectura era de que muitos participantes olhariam para a figura proposta sem uma postura crítica, induzindo-os a não considerar necessário argumentar o fato de que a hipotenusa coincide com o diâmetro.

A partir da análise das respostas apresentadas ao problema 3, foram identificados os seguintes tipos de respostas descritos no Quadro 6:

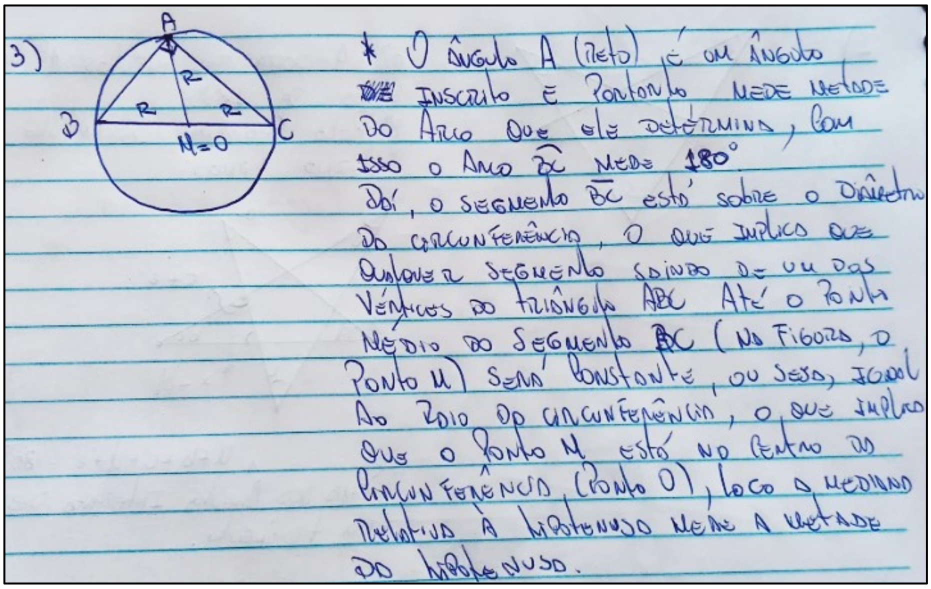
Quadro 6 – Tipos de respostas dos licenciandos ao problema 3

Tipos de respostas	Descrição	Frequência
Identificação da relação matemática com justificativa completa	O participante justificou corretamente que um ângulo inscrito de 90° subtende um arco de 180°, portanto a hipotenusa coincide com o diâmetro, concluindo que a mediana mede a metade da hipotenusa.	06
Identificação da relação matemática com justificativa incompleta	O participante não justificou corretamente porque a hipotenusa coincide com o diâmetro. Mesmo assim, concluiu que a mediana mede metade da hipotenusa.	19
Identificação da relação matemática sem justificativa	O participante não apresentou argumentos válidos ou apenas repetiu o enunciado.	10
Sem identificação da relação matemática	Todos os participantes identificaram a relação matemática, que constava no enunciado.	00
Sem resposta	12 participantes disseram não saber e 11 deixaram em branco.	23

Fonte: Elaborado pelos autores (2022).

Apenas seis licenciandos justificaram corretamente o fato de que a hipotenusa coincide com o diâmetro da circunferência, demonstrando atuarem na abstração geométrica dedutiva, conforme exemplificado na Figura 9 (Resposta do L56) e concluíram a questão com argumento adequado.

Figura 9 – Resposta com identificação e justificativa completa



Fonte: Caldato, Pereira da Costa, Nasser (2021, p. 695).

Por outro lado, 32,75% dos participantes encaminharam o raciocínio corretamente, mas não sentiram necessidade de justificar porque a hipotenusa coincide com o diâmetro. O fragmento a seguir corrobora este fato:

> Note que a hipotenusa do triângulo inscrito mede 2r (2×raio). Por outro lado, a mediana relativa à hipotenusa mede r (raio). Assim, podemos afirmar que a mediana vale metade da hipotenusa. (Resposta do L12).

O restante dos alunos não respondeu ou usou argumentos inadequados, não conseguindo justificar a propriedade, logo, não atuaram na abstração geométrica dedutiva. Esse comportamento vai ao encontro da hipótese formulada nesta pesquisa e ratifica que é preciso reforçar com os licenciandos a necessidade de justificar todos os passos utilizados em um raciocínio dedutivo, de modo que eles se habituem a utilizar essa estratégia com seus futuros alunos. Nesse sentido, a visualização auxilia no processo de argumentação, pois tem um efeito positivo no desempenho e no desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes (SHATRI; BUZA, 2017).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa investigou como estudantes de Licenciatura em Matemática justificam problemas geométricos a partir de provas visuais. Com base nas respostas, constatou-se que, no problema 1, cerca de 80% dos participantes não conseguiram êxito em suas justificativas quanto à soma das medidas dos ângulos internos de uma estrela pentagonal. Além disso, no problema 2, nenhum licenciando conseguiu identificar a relação matemática e justificar todos os argumentos utilizados na prova visual do Teorema de Pitágoras. Ressalta-se ainda que somente cerca de 20% dos futuros professores associaram as representações geométricas a uma prova do teorema. Já no problema 3, apenas seis licenciandos justificaram corretamente que a mediana de um triângulo retângulo mede metade da hipotenusa. Por outro lado, aproximadamente um terço da amostra não achou necessário justificar que a hipotenusa do triângulo coincidia com o diâmetro da circunferência, apesar de apresentar raciocínio coerente.

De modo geral, considerando as respostas aos três problemas, há um indicativo de que a abstração geométrica dedutiva proposta por Pereira da Costa (2019, 2020) não deve estar sendo explorada nos cursos de Licenciatura em Matemática, o que pode provocar efeitos na forma como a Geometria será ensinada por esses futuros professores na Educação Básica. Tal abstração é marcada pela vivência com argumentações, conjecturas, provas e demonstrações de natureza tanto intuitiva como dedutiva.

Em vista disso, a habilidade argumentativa deve ser sempre incentivada pelo professor, seja ele do Ensino Superior ou da Educação Básica, solicitando que o aluno justifique as suas estratégias de resolução para os problemas propostos. Afinal, o domínio do processo dedutivo deve ser construído ao longo da trajetória do estudante. Além disso, por não serem caracterizadas por uma linguagem matemática formal, as provas visuais tendem a ser acessíveis aos estudantes da Educação Básica. E, por estimular a imaginação e abstração dos alunos, tais provas podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio argumentativo durante a sua formação.

HOW DO UNDERGRADUATE MATHEMATICS STUDENTS JUSTIFY GEOMETRIC PROBLEMS FROM VISUAL PROOFS?

ABSTRACT

The aim of this article is to investigate how undergraduate students in Mathematics justify geometric problems based on visual proofs. Despite the increase in the number of research works on argumentation and proof in Mathematics teaching, it is observed that activities of this nature are not common in Basic Education. In other words, most teachers who teach Mathematics do not usually ask their students to justify task resolutions or reasoning used. In particular, they do not explore activities that develop visualization in problem solving or justifications for statements of mathematical properties. Visualization constitutes an important component in understanding a concept or a geometric problem, and can contribute to this development. Visualizing a problem means understanding it in terms of a visual (mental) image, constituting an essential part of the solution method. The methodological path used in this qualitative research was the sending of an online questionnaire, elaborated in Google Forms, with three problems characterized by visual proofs for Mathematics undergraduate students from different Higher Education Institutions. Through this collection procedure, the convenience sample included 58 students and the responses were analyzed according to a textual analysis. The data indicate that, when they mobilize visualization, although the undergraduates are able to present a logical chain in an argument, most of them do not realize the need to justify all the arguments used. In addition, in some cases, most participants failed to understand what was the relationship to be demonstrated from the geometric figure, or tried to justify a result different from what was expected. In view of this, it is necessary to encourage the exploration of activities that develop the deductive process with Mathematics undergraduates, in particular, the elaboration and justifications based on visual proofs, so that they use such strategies in their future pedagogical practices, since such proofs can be accessible to Basic Education students.

KEYWORDS: Mathematics undergraduates. Argumentation and Proofs. Geometric Abstractions. Visual Proofs.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. Fundamentos norteadores das teorias da Educação Matemática: perspectivas e diversidade. **Amazônia**, Belém, v. 13, n. 27, p. 5-35, 2017. Disponível em: https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/5514. Acesso em: 14 nov. 2022.

ALYRIO, R. D. **Métodos e técnicas de pesquisa em administração**. Volume único. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

BORWEIN, P.; JÖRGENSON, L. Visible Structures in Number Theory. **The Mathematical Association of America**, v. 108, n. 10, p. 897-910, dez. 2001. Disponível em: https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Borwein897-910.pdf. Acesso em: 14 nov. 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, MEC/SEB, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 14 nov. 2022.

BRASIL. **Relatórios do ENADE**: 2014. Brasília: MEC/INEP. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2014/2014_rel_matematica.pdf. Acesso em: 14 nov. 2022.

BRASIL. **Relatórios do ENADE**: 2011. Brasília: MEC/INEP. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2011/2011_rel_matematica.pdf. Acesso em: 14 nov. 2022.

BRASIL. **Relatórios do ENADE**: 2008. Brasília: MEC/INEP. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_superior/enade/relatorio_sintese/2008/2008_rel_sint_matematica.pdf. Acesso em: 14 nov. 2022.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em: 14 nov. 2022.

CALDATO, J. C.; PEREIRA DA COSTA, A.; NASSER, L. Analisando a Interpretação de Provas Visuais por Licenciandos de Matemática. *In*: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2021, Uberlândia. **Anais** [...]. Uberlândia: SBEM, 2021, p. 684-698. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf. Acesso em: 14 nov. 2022.

CALDATO, J. C. **Argumentação, prova e demonstração**: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em Matemática. 219 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/MSc%2090_Carlos%20Caldato%20Correia.pdf. Acesso em: 14 nov. 2022.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine**: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berne: Peter Lang, 1995.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/18952. Acesso em: 14 nov. 2022.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HANNA, G. Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, n. 1, p. 5-23, 2000. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/226598348_Proof_Explanation_and_Exploration_An_Overview. Acesso em: 14 nov. 2022.

HEALY, L.; HOYLES, C. **Justifying and Proving in School Mathematics**: Technical report on the nationwide survey. London: Institute of Education, University of London, 1998. 120 p.

HEALY, L.; HOYLES, C. A Study of Proof Conceptions in Algebra**. Journal for Research in Mathematics Education**, v. 31, n. 4, p. 396-428, jul. 2000. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/749651. Acesso em: 14 nov. 2022.

MATEUS, M. E. A. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica**. 269 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com//handle/123456789/3489. Acesso em: 14 nov. 2022.

NASSER, L.; CALDATO, J. O desenvolvimento do processo dedutivo nos cursos de Licenciatura em Matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais** [...]. Foz do Iguaçu: SIPEM, 2018, p. 1-12. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/SIPEM/VII_SIPEM/paper/view/436/232. Acesso em: 14 nov. 2022.

NASSER, L.; CALDATO, J. Investigação sobre o desenvolvimento do processo dedutivo nos cursos de Licenciatura em Matemática. **REnCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 80-96, 2019. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2333. Acesso em: 14 nov. 2022.

NELSEN, R. B. **Proofs without words**: exercises in visual thinking. 1 ed. USA: The Mathematical Association of America, 1993.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana**: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique. 341 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11035. Acesso em: 14 nov. 2022.

PEREIRA DA COSTA, A. **A construção de um modelo de níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico**: o caso dos quadriláteros notáveis. 402 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/33431. Acesso em: 14 nov. 2022.

PEREIRA DA COSTA, A. Abstrações em Geometria: uma alternativa para análise do pensamento geométrico. **Vidya**, Santa Maria, v. 40, n. 1, p. 1-21, jan./jun. 2020. Disponível em: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/2996/2528. Acesso em: 14 nov. 2022.

PEZARINI, A. R.; MACIEL, M. D. Avaliação dos argumentos e das argumentações produzidas pelos estudantes de Ciências e Biologia a partir de uma proposta didática pautada em Toulmin e Bonini. **REnCiMa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 27-47, 2019. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/2251. Acesso em: 14 nov. 2022.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática**. 388 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: https://sapientia.pucsp.br/handle/handle/11074. Acesso em: 14 nov. 2022.

PRESMEG, N. Research on Visualization in learning and teaching mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Org.). **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**: Past, Present and Future. Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 205-236.

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education**: Research, Learning and Teaching. Rotterdam: Sense Publishers, 2010.

SANTOS, A. H. **Um estudo epistemológico da visualização matemática**: o acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização. 98 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/37264. Acesso em: 14 nov. 2022.

SHATRI, K.; BUZA. K. The Use of Visualization in Teaching and Learning Process for Developing Critical Thinking of Students. **European Journal of Social Sciences Education and Research**, v. 4, n. 1, p. 71-74, jan./abr. 2017. Disponível em: https://revistia.com/index.php/ejser/article/view/6470. Acesso em: 14 nov. 2022.

TALL, D. Cognitive development, representations and proof. *In*: **Proceedings of justifying and proving in school mathematics**. London: Institute of Education, 1995. p. 27-38.

Recebido: 30 jun. 2022.
Aprovado: 14 nov. 2022.
DOI: 10.3895/rbect.v15n3.15688
Como citar: CALDATO, J.; COSTA, A.; NASSER, L. Como estudantes de Licenciatura em Matemática justificam problemas geométricos a partir de provas visuais?. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, Edição Especial, p. 1-21, dez. 2022. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/15688>. Acesso em: XXX.
Correspondência: João Caldato - profjoaocaldato@gmail.com