

Invariantes Operatórios em esquemas utilizados por futuros engenheiros em uma abordagem contextualizada de equações diferenciais ordinárias

RESUMO

Rieuse Lopes Pinto

rieuse.lopes@unimontes.br

0000-0003-2342-3084

Universidade Estadual de Montes Claros,
Montes Claros, Minas Gerais, Brasil.

Gabriel Loureiro de Lima

gllima@pucsp.br

0000-0002-5723-0582

Pontifícia Universidade Católica de São
Paulo, São Paulo, São Paulo, Brasil.

Este artigo, recorte de uma pesquisa concluída de doutorado, de natureza qualitativa, que aborda a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias de variáveis separáveis, tem como objetivo explicitar e analisar, a partir da Teoria dos Campos Conceituais, alguns invariantes operatórios acerca de conhecimentos vinculados a conceitos da Matemática, Física e Cálculo mobilizados por um grupo de 21 estudantes do segundo período de Cálculo do curso de Engenharia Civil de uma instituição particular durante a resolução de um Evento Contextualizado (problema integrando diferentes áreas de conhecimento). A coleta de dados foi feita por meio de gravações em áudio das discussões realizadas durante o trabalho com o evento, implementado segundo os preceitos teórico-metodológicos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências. Dentre outros, evidenciam-se a mobilização, de invariantes operatórios relacionados às noções de: função, representação gráfica de uma função, variável dependente e independente e logaritmo (Matemática básica); taxa de variação, derivada, integração como uma operação, variável em uma equação diferencial, ordem e grau de uma equação diferencial (Cálculo); transferência de calor, temperatura, calor e condutividade térmica (Física). Além disso, a análise dos dados evidencia que, na sala de aula, momentos de discussões conjuntas e de interações entre os estudantes deveriam ser mais presentes por colaborarem na promoção de suas aprendizagens e de seus desenvolvimentos cognitivos.

PALAVRAS-CHAVE: Educação Matemática no Ensino Superior. Teoria A Matemática no Contexto das Ciências. Teoria dos Campos Conceituais. Engenharia. Invariantes Operatórios.

INTRODUÇÃO

Com o presente trabalho, intenciona-se explicitar e analisar alguns invariantes operatórios, relacionados à Matemática Básica, ao Cálculo e à Física, mobilizados por estudantes de um curso de Engenharia Civil nos momentos de resolução e discussão por eles vivenciados no desenvolvimento de um Evento Contextualizado (EC), que, conforme será mais detalhadamente discutido, é um problema integrando diferentes áreas de conhecimento. Esse evento foi elaborado e implementado com base em um problema de Transferência de Calor, no intuito de investigar a aprendizagem dos sujeitos da pesquisa em relação às Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de variáveis separáveis em consonância aos preceitos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC) e da Teoria dos Campos Conceituais (TCC).

Nas próximas seções, apresenta-se a noção de EC e, em seguida, explicitam-se os subsídios teórico-metodológicos da TMCC, que serviram de preceitos fundamentais para sua elaboração e implementação. Destacam-se os preceitos da fase cognitiva da TMCC, aliados à Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud, pois serviram de subsídios para a análise dos dados coletados.

Recorre-se à TCC por entender-se que essa legitima a análise da atividade em situação (VERGNAUD, 2009) e mais especificamente proporciona a investigação da forma operatória do conhecimento na resolução de situações de aprendizagem vivenciadas por estudantes. Nesse ambiente, há um interesse por propriedades, as relações e técnicas manifestadas pelos estudantes de forma explícita ou implícita na resolução de uma situação, representando o que Vergnaud (1996a) denomina de invariantes operatórios dos esquemas, que se manifestam sobre a forma de conceitos-em-ação ou teoremas-em-ação. Ressalta-se que foram evidenciados os invariantes operatórios relacionados à Matemática Básica, ao Cálculo e à Física, mobilizados pelos sujeitos da pesquisa, porque considerou-se que estes foram significativos na construção de conceitos para a aprendizagem das EDO.

PONTO DE PARTIDA: A IDEIA DE EVENTO CONTEXTUALIZADO

Optou-se por iniciar este artigo apresentando a noção de Evento Contextualizado (EC), antes mesmo de explicitar os preceitos fundamentais do referencial teórico no qual esta se insere, por tal ideia ter tido importância central na tese de doutorado da qual este texto é recorte. Os EC são entendidos pela pesquisadora mexicana Patricia Camarena Gallardo, que foi quem introduziu essa noção no âmbito das reflexões acerca do ensino e da aprendizagem de Matemática em cursos de graduação nos quais a Matemática está presente, mas não é o objeto central de estudo, como atividades não rotineiras, na forma de “problemas, projetos ou estudos de caso que se comportam como entes integradores entre áreas” (CAMARENA, 2021, p. 179), com potencial de “causar um conflito cognitivo nos estudantes ao ler o enunciado, motivá-los e intrigá-los para que queiram continuar com a tarefa de resolvê-lo” (Idem).

No caso da pesquisa de doutorado realizada pela primeira autora deste artigo sob a orientação do segundo autor, no intuito de investigar a aprendizagem, por parte de estudantes de um curso de Engenharia Civil, de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de variáveis separáveis a partir de uma abordagem

contextualizada, elaborou-se um EC vinculando o Cálculo Diferencial e Integral e a Transferência de Calor, conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 – O EC elaborado

Conforto térmico em uma edificação

Visando melhorar o conforto térmico de ambientes não climatizados, reduzir o dispêndio de energia elétrica em ambientes climatizados e racionalizar o consumo de energia, o engenheiro civil busca soluções que potencializam a eficiência energética de um projeto de edificações. Para alcançar o conforto térmico desejado, é necessário o conhecimento a respeito da transferência de calor do ambiente externo para o interior das edificações. Assim, apresentamos três paredes construídas da seguinte forma:

PAREDE 1: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 3,5 cm da mesma argamassa. A espessura total da parede é 17 cm.

PAREDE 2: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 3,5 cm de gesso. A espessura total da parede é 17 cm.

PAREDE 3: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 1,5 cm da mesma argamassa. Nessa parede, foi colado na face externa e interna um poliestireno expandido ou *expanded polystyrene* (EPS) de 2 cm. A espessura total da parede é 17 cm.

De acordo com as especificidades de cada parede, respondam:

- Qual das três paredes apresenta maior conforto térmico em uma edificação? Por quê?
- Qual é o comportamento térmico dos materiais de cada parede?
- O que é preciso fazer para reduzir as perdas térmicas em uma edificação?

Fonte: Lopes (2021, p. 118-119).

Mas, por que se optou pelo contexto da Transferência de Calor? Responde-se a essa indagação na próxima seção, na qual simultaneamente, apresentam-se os preceitos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências, que subsidiaram, dos pontos de vista teórico e metodológico, a elaboração e a implementação deste EC.

TEORIA A MATEMÁTICA NO CONTEXTO DAS CIÊNCIAS: SUBSÍDIOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS PARA A ELABORAÇÃO E A IMPLEMENTAÇÃO DO EC

A Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC) foi desenvolvida por Camarena com o objetivo de fundamentar discussões a respeito do ensino de Matemática em cursos superiores que não visam à formação de matemáticos. Sob a ótica desse referencial, o ambiente de aprendizagem é concebido como um sistema em que cinco fases interatuantes estão presentes: curricular, didática, epistemológica, docente e cognitiva, cada uma com subsídios teóricos e processos metodológicos específicos (CAMARENA, 2013).

Os pressupostos teóricos e metodológicos da TMCC serviram de fundamento para a construção e implementação do EC apresentado na Figura 1. Para a elaboração desse evento, a primeira autora deste artigo recorreu aos procedimentos da *Dipcing* (CAMARENA, 2002), metodologia inserida na fase curricular da teoria. Por meio de um documento denominado Integralização Curricular, no qual são explicitadas todas as disciplinas do curso de Engenharia Civil da instituição em que a pesquisa foi desenvolvida, analisou-se em quais disciplinas não matemáticas presentes nesta Integralização Curricular há mobilização de EDO.

A leitura desse documento oportunizou à pesquisadora inteirar-se das especificidades de cada Núcleo de Formação segundo os quais o curso está organizado. Em seguida, foi realizada uma sondagem com os professores que nele lecionam para que indicassem, nas disciplinas que ministram, quais conhecimentos

relacionados a conceitos das disciplinas matemáticas são mobilizados. O próximo passo foi analisar os livros-texto das disciplinas não matemáticas apontadas por eles para compreender em quais situações das áreas específicas e profissionalizantes do curso as EDO são empregadas. Com base nas respostas dos docentes, a pesquisadora optou por analisar os livros indicados das seguintes disciplinas: Física Geral, Estatística e Probabilidade, Química Geral, Mecânica Geral, Mecânica dos Fluidos, Resistência de Materiais e Análise Estrutural.

A leitura de livros de Transferência de Calor evidenciou a mobilização, nesse contexto, de uma ampla gama de conceitos matemáticos e, pela análise histórico-epistemológica realizada acerca do conteúdo matemático com o qual a autora da tese desejava trabalhar, observou-se que os problemas relacionados à Transferência de Calor estiveram atrelados ao desenvolvimento epistemológico das equações diferenciais e, portanto, ao elaborar um EC relacionado à Transferência de Calor, estaria sendo contemplado um contexto que estava, de fato, inserido naqueles nos quais, historicamente, as equações diferenciais se desenvolveram. Além disso, um dos professores que contribuíram com a etapa de sondagem anteriormente mencionada, destacou que uma importante necessidade da Engenharia Civil é a investigação das diversas formas de sustentabilidade e economia dos recursos energéticos existentes, pois o emprego de materiais com maior resistência térmica pode representar uma grande redução no consumo de energia elétrica em edificações com ambientes climatizados. Representa também um maior conforto dos ocupantes de edificações sem condicionamento de ar, já que esses materiais proporcionam maior isolamento térmico do ambiente a ser ocupado, diminuindo as trocas de calor com o meio externo.

Optou-se então por elaborar um evento cujo contexto fosse o da transferência de calor do ambiente externo para o interior de paredes de alvenaria planas, a fim de buscar soluções matemáticas para problemas relacionados ao conforto térmico de edificações, por meio da resolução de Equações Diferenciais Ordinárias. Na construção do EC, visando trabalhar com as EDO de maneira contextualizada, foram seguidas as cinco etapas do percurso metodológico considerado na fase epistemológica da TMCC, de acordo com Camarena e González (2001): realizou-se a análise de livros de Engenharia para compreender como as EDO são aplicadas na Engenharia Civil; analisou-se o programa e a ementa do curso, com o objetivo de compreender como é previsto o tratamento a ser dado ao assunto e em que disciplinas ou outros tipos de unidades curriculares ele é abordado; realizou-se um estudo epistemológico das Equações Diferenciais; analisaram-se textos de Matemática para a Engenharia visando compreender como, nos materiais didáticos destinados à formação de engenheiros, está prevista a abordagem das EDO e foram também analisados, a partir de pesquisas antecedentes realizadas por outros autores, os aspectos cognitivos relacionados ao ensino e à aprendizagem das EDO.

Para implementar o EC junto aos sujeitos da pesquisa - 21 estudantes do segundo período de Cálculo da Engenharia Civil de uma instituição particular do Estado de Minas Gerais, que ainda não possuíam conhecimento dos conceitos fundamentais de Equações Diferenciais – foram utilizados os preceitos construtivistas do Modelo Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo), inerente à fase didática da TMCC (CAMARENA, 2017). O objetivo foi o de trabalhar conceitos matemáticos com os estudantes de forma a auxiliá-los no

desenvolvimento de habilidades em transferir conhecimentos¹ acerca desses conceitos para áreas específicas, no caso a Transferência de Calor.

Foram trabalhados os dois eixos orientadores do MoDiMaCo: a contextualização e a descontextualização. Na contextualização, que é interdisciplinar, foram explorados conhecimentos do Cálculo e da Transferência de Calor e, na descontextualização, a primeira autora deste artigo ministrou uma aula explicando conhecimentos básicos das Equações Diferenciais e os sujeitos resolveram EDO de Variáveis Separáveis de forma disciplinar, por meio de atividades individuais e em grupo, com a formalidade e rigor requerido em um curso de graduação visando formar um engenheiro civil.

Para as atividades em grupo, também em consonância ao que é proposto no MoDiMaCo, foram compostas equipes de três estudantes: um líder **emocional**, um **intelectual** e um **operacional** que, conforme ressalta Camarena (2017), possuem características complementares para o bom desenvolvimento de um trabalho colaborativo. O líder emocional é o estudante que motiva a equipe; o líder intelectual é reflexivo e analítico, com conhecimentos prévios bem construídos; e o líder operativo é aquele que executa efetivamente as tarefas e que expõe os argumentos da equipe para todos, entre outros (CAMARENA, 2017). A escolha desses líderes se fez mediante a um questionário, adaptado de Camarena (2003) e a respeito do qual o leitor pode obter maiores informações em Lopes (2021). Tal questionário é aplicado pelo professor e constitui-se por 80 perguntas com respostas “sim” ou “não” a respeito do modo como o estudante se vê e como faz suas escolhas em várias áreas de sua vida, o que está diretamente relacionado a seu estilo de aprendizagem, isto é, às suas preferências ou tendências pessoais de utilizar algumas estratégias em detrimento de outras quando se deseja ou se necessita aprender (BARROS, 2008; HERNÁNDEZ; ALONSO, 2013).

De forma a oportunizar a exploração dos eixos orientadores do MoDiMaCo, o trabalho com o EC foi organizado em duas situações, cada uma delas com três atividades realizadas em seis momentos presenciais. O tempo de duração de cada atividade foi de aproximadamente 4 horas e, nos seis momentos da experiência, realizados em diferentes ambientes (sala de aula, laboratório de materiais de construção e biblioteca), os dados foram coletados por meio de gravação de áudio das discussões dos sujeitos-em-ação para responderem às questões propostas, observação participante, registros escritos contendo o desenvolvimento das atividades, além de anotações feitas pela pesquisadora durante a aplicação dessas atividades.

A Situação I, denominada “**Conforto térmico em uma edificação**”, serviu para a construção de fundamentos teóricos para a resolução do EC. Na Atividade I dessa Situação, a pesquisadora conduziu os estudantes ao laboratório, e apresentou o EC a eles, exatamente como consta na Figura 1. Mostrou a eles as três paredes mencionadas no evento, que haviam sido construídas previamente para a experiência. Após as conjecturas iniciais dos sujeitos acerca de como responder ao EC, na Atividade II da Situação I, eles foram conduzidos à biblioteca para realizar uma investigação com o intuito de responder a algumas questões contemplando conhecimentos básicos da Transferência de Calor e que serviriam de fundamento teórico para a resolução do EC. Esperava-se que começassem a compreender que a transferência de calor por condução é governada por uma equação, a chamada Lei de Fourier, que envolve uma taxa de variação.

[...] para uma parede plana unidimensional com uma distribuição de temperaturas T , a equação da taxa de transferência é escrita na forma $\dot{q}_x = -k \frac{dT}{dx}$, na qual o fluxo térmico $\dot{q}_x (W/m^2)$ é a taxa de transferência de calor na direção x por unidade de área perpendicular à direção da transferência, proporcional ao gradiente de temperatura $\frac{dT}{dx}$, nessa direção. O parâmetro k representa a condutividade térmica do material e seus valores variam em extensa faixa dependendo da constituição química, estado físico e temperatura dos materiais. O sinal negativo no segundo membro da equação $\dot{q}_x = -k \frac{dT}{dx}$ é uma consequência do fato de o calor ser transferido no sentido da temperatura decrescente (LOPES, 2021, p. 123).

Ainda durante essa Atividade II, foi solicitado às equipes que registrassem pelo menos três perguntas a serem feitas aos professores que participariam da Atividade III, na qual as dúvidas e indagações dos alunos foram objeto de reflexão em uma aula ministrada conjuntamente por três professoras: a pesquisadora, uma professora de Física e uma professora de Transferência de Calor.

Na Situação II, denominada **“Realização da experiência e resolução de EDO”**, a Atividade I teve por objetivo oportunizar aos sujeitos a vivência de uma experiência real da Engenharia Civil: no laboratório, instalaram sensores de temperatura nas paredes e coletaram dados acerca do comportamento térmico de cada uma delas. Para a realização dessa experiência, a pesquisadora, previamente, construiu uma câmara térmica com dimensões internas 60 cm x 40 cm x 40 cm, sendo que uma das faces de 40 cm x 40 cm é vazada. Para a sua confecção, utilizou-se madeira compensada, poliestireno expandido de 50 mm, papel laminado, duas lâmpadas, um *dimmer* (dispositivo também conhecido como variador de luminosidade que permite regular a intensidade do brilho da iluminação) e ferragens. Parafusou-se a madeira compensada, formando a casca da câmara, e revestiu-se seu interior com o poliestireno expandido forrado com papel laminado. Para aferir a temperatura em cada ponto da parede, fez-se o acoplamento da parede em estudo, já devidamente instrumentada com os sensores de temperatura. Na extremidade aberta da câmara, nesse acoplamento, o centro da parede coincidiu com o centro da lâmpada. A importância dessa experiência reside no fato de ser realizada com paredes reais, construídas com materiais utilizados em edificações, ou seja, é uma experiência real, não virtual, com comportamento de temperatura não simulado.

Na Atividade II, tendo os estudantes chegado à conclusão de que a Lei de Fourier é utilizada para determinar a taxa de transferência de calor por unidade de área, foi proposto a eles que resolvessem uma questão do ENADE² relacionada a esse assunto. Um dos motivos pelo qual a pesquisadora optou por propor essa questão foi explorar a Lei de Fourier e construir o conceito de EDO de variáveis separáveis. A questão retrata a experiência realizada com as paredes e mobiliza conhecimentos importantes, como: propriedade dos materiais, transferência de calor por condução, regime permanente e a equação geral da condução – Lei de Fourier. Envolve também os conhecimentos de propriedades térmicas dos materiais, mecânica dos fluidos, transformações de unidades físicas e explora basicamente dois tipos de materiais: cerâmicos (concreto e seus constituintes) e polímeros (madeiras e seus constituintes).

Após a resolução da questão, a pesquisadora indagou aos sujeitos se haveria alguma função que pudesse fornecer a temperatura em qualquer ponto ao longo

da largura da parede que estava nela sendo considerada. Esse questionamento deveria desencadear a necessidade de se resolver uma EDO.

Finalmente, na Atividade III, por meio inicialmente de uma aula expositiva dialogada, a pesquisadora formalizou com os estudantes, de forma descontextualizada, a noção de EDO e algumas características desse tipo de equação.

[...] as equações diferenciais foram classificadas considerando: o número de variáveis independentes da função incógnita; o número de funções incógnitas; a estrutura, a ordem e o grau da equação. Definimos também solução geral e solução particular e verificamos se uma função é solução da equação dada. Transformamos uma equação da forma normal para a forma diferencial e vice-versa, identificamos os diversos tipos de Equações Diferenciais e resolvemos Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis. (LOPES, 2021, p. 209).

Em um segundo momento dessa Atividade, as equipes resolveram algumas EDO propostas e essas resoluções foram discutidas coletivamente. Em seguida, voltaram à resolução do EC, analisaram os dados coletados no laboratório e, subsidiadas por todo o trabalho desenvolvido, responderam às questões centrais do EC.

Foram consideradas, ao longo de toda a elaboração e implementação do evento, as ideias de Camarena (2000, 2012) segundo as quais, assim como os contextos de outras ciências, dão sentido e significado à Matemática, esta dá sentido e significado aos temas e conceitos das ciências. O EC foi abordado de forma a considerar a perspectiva epistemológica da interdisciplinaridade, em que alguns conhecimentos do Cálculo e da Transferência de Calor se entrelaçam em forma de rede, mantendo relações entre eles, gerando significado um ao outro.

A pesquisadora, para o desenvolvimento de sua tese, não se ateu à fase docente da TMCC. Já a fase cognitiva foi mobilizada no momento da análise dos dados, de forma articulada à Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, como se detalha na próxima seção.

FASE COGNITIVA DA TMCC E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS: SUBSÍDIOS PARA A ANÁLISE DOS DADOS OBTIDOS NA IMPLEMENTAÇÃO DO EC

Os preceitos da fase cognitiva da TMCC, aliados à Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Vergnaud serviram de fundamentos para a análise dos dados coletados pela pesquisadora a partir da implementação do EC.

É necessário destacar que, embora a TCC tenha se originado a partir de estudos que Vergnaud realizou com crianças tendo como foco nos campos conceituais das estruturas aditivas e das multiplicativas, como ressalta Moreira (2002, p. 8), tal teoria não é específica desses campos e nem mesmo da Matemática. “Em Física, por exemplo, há vários campos conceituais - como o da Mecânica, o da Eletricidade e o da Termologia – que não podem ser ensinados, de imediato, nem como sistemas de conceitos nem como conceitos isolados”. Isto é válido também, conforme enfatiza Moreira (2002), em Biologia, História, Geografia, Educação Física etc. Assim, apesar de a TCC ter se desenvolvido inicialmente como subsídio para investigações relativas à aprendizagem de crianças, atualmente este referencial é empregado para análises cognitivas com

sujeitos de diferentes níveis educacionais. Mais ainda, conforme os dados apresentados por Cunha e Ferreira (2020) em uma pesquisa que buscou analisar, por meio de uma revisão de literatura em periódicos nacionais e internacionais da área de ensino de ciências publicados entre 2008 e 2018 e das atas de 2007 a 2017 do Encontro Nacional de Pesquisas em Educação em Ciências, o emprego da TCC em análises relacionadas à aprendizagem de Ciências Naturais (Química, Física e Biologia), quanto ao nível de ensino tomado como objeto nas pesquisas, os autores observaram a prevalência do Ensino Superior (com 28 dos 66 trabalhos analisados).

A Teoria dos Campos Conceituais constitui um referencial teórico para o estudo da aprendizagem de conceitos e, também, possibilita compreender as construções do conhecimento pelo indivíduo e a forma como ele se encontra organizado dentro de uma estrutura cognitiva. Assume-se que o conhecimento está organizado em campos conceituais que são conjuntos “de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados” (VERGNAUD, 1983, p. 127). Os docentes devem fornecer aos estudantes situações problematizadoras, entendidas como tarefas ou conjuntos de tarefas que possuam significado para o estudante e que, em um campo conceitual específico, podem variar em suas complexidades. O objetivo é o de desenvolver potencialidades para o surgimento e aquisição do conceito e sua estrutura.

As atividades de ensino devem ser diversificadas de forma a permitir ao sujeito aplicar conhecimentos relativos a um dado conceito em diversas situações e testar seus modelos explicativos em diversos contextos. De acordo com Vergnaud (1993, 1997), a construção de conceitos envolve uma terna de conjuntos indicada simbolicamente por S I R, em que: (S) é um conjunto de situações que dão sentido ao conceito; (I) é um conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito, representando o que nele se preserva e permite com que seja reconhecido e operacionalizado em diferentes situações; e (R) é um conjunto de representações simbólicas que podem ser utilizadas para indicar e representar os invariantes.

Embora tendo a clareza de que a construção do campo conceitual relativo às EDO exige que os estudantes trabalhem com uma grande variedade de situações e, em sua investigação, a primeira autora deste artigo trabalhou apenas com um EC, recorreu à TCC para realizar as análises apresentadas em sua tese, e que estão inseridas no âmbito da fase cognitiva da TMCC, por entender que a implementação desse evento poderia desencadear o início da construção de conhecimentos fundamentais relativos a conceitos desse campo e ao campo conceitual da Transferência de Calor.

Considerou-se, assim como Camarena e Muro (2012), que os eventos contextualizados da TMCC são equivalentes às situações na TCC, mais especificamente, no caso da pesquisa em tela, àquela categoria de situações para cujas soluções o sujeito não possui todas as competências necessárias, o que o leva a um processo de reflexão e exploração em que diferentes esquemas, isto é, organizações invariantes para uma determinada classe de situações serão acomodadas, separadas ou combinadas, levando à construção de novos esquemas para novas situações.

Para Vergnaud *et al.* (1990) e Vergnaud (1983, 1993, 1997, 2009), uma das componentes dos esquemas, os invariantes operatórios, é que dirige o

reconhecimento, por parte do indivíduo, dos elementos pertinentes à situação e, portanto, guiam a construção dos modelos mentais. Os invariantes operatórios constituem a base conceitual implícita que permite obter a informação pertinente e, a partir dela e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais adequadas. Identificam-se dois tipos de invariantes operatórios: os **conceitos-em-ação** e os **teoremas-em-ação**. Os conceitos-em-ação constituem um objeto, propriedades e relações ou uma categoria de pensamento considerada relevante entre as que compõem o repertório dos sujeitos que será selecionada para determinada ação. Articulam-se, por meio dos teoremas-em-ação, proposições que podem ser verdadeiras ou falsas. Tanto os conceitos-em-ação como os teoremas-em-ação permanecem, em sua maioria, implícitas nas ações do sujeito, mas podem também tornarem-se explícitos. Um conceito-em-ação não é um conceito e um teorema-em-ação não é um teorema, porque, na ciência, os conceitos e teoremas são explícitos e sua veracidade pode ser discutida. Mas conceitos-em-ação e teoremas-em-ação podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos.

De acordo com a TCC, uma das formas de analisar os conhecimentos-em-ação (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) dos sujeitos é por meio do acompanhamento dos diversos momentos em que são chamados a dar respostas a problemas, das estratégias utilizadas na resolução de um problema, dos esquemas que utilizam e dos modelos mentais construídos frente a novas situações. No que diz respeito especialmente ao trabalho dos estudantes com um EC, Camarena e Trejo (2011), a ação cognitiva concentra-se,

[...] na realização de operações de pensamento que são feitas dos invariantes operatórios nos esquemas que são construídos, que afetam direta ou indiretamente o conhecimento sobre a estrutura das ciências que estão ligadas ao evento contextualizado (CAMARENA; TREJO, 2011, p. 138).

Portanto, interessada nessa análise cognitiva, a primeira autora deste artigo, em sua tese, optou por empregar a TCC como fundamento na investigação dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes nas situações de resolução e discussão e durante a escolha dos esquemas utilizados no desenvolvimento do EC. Os invariantes, isto é, os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação relacionados ao Cálculo e à Transferência de Calor, foram analisados por meio do acompanhamento dos diversos momentos em que os estudantes foram chamados a dar respostas a problemas, estratégias utilizadas na resolução de um problema, esquemas que utilizam e modelos mentais construídos frente a novas situações surgidas no desenvolvimento do EC. Essa análise permite compor um quadro que possibilita a compreensão das filiações e rupturas entre conhecimentos da Física e do Cálculo e mostra a evolução temporal dos modelos explicativos dos sujeitos em relação à aprendizagem de EDO, inferida com base nos conceitos-em-ação e dos teoremas-em-ação utilizados nas atividades realizadas.

Em Lopes e Lima (2021), explicitam-se alguns conceitos-em-ação e teoremas-em-ação relacionados ao Cálculo mobilizados pelos sujeitos de pesquisa de Lopes (2021), especificamente aqueles que, na visão dos autores do artigo, podem impactar mais significativamente o enfrentamento de situações relacionadas às EDO. No presente artigo, além de sintetizar as análises apresentadas em Lopes e Lima (2021), são apresentados também outros invariantes operatórios identificados por Lopes (2021) em sua pesquisa, tanto relacionados à Matemática quanto à Física.

INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À MATEMÁTICA BÁSICA EXPLICITADOS PELOS SUJEITOS NO TRABALHO COM O EC

O desenvolvimento do Evento Contextualizado trouxe algumas contribuições para a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias de variáveis separáveis aos graduandos em Engenharia Civil, e, dentre elas, destaca-se a construção de conhecimentos relacionados a conceitos da Matemática Básica. Na pesquisa relatada em Lopes (2021), tinha-se um objetivo, uma meta final, um problema a ser resolvido, e isso serviu como mola propulsora para a busca de conhecimento. Nesse processo, todo tipo de dúvida relacionada à Matemática da Educação Básica, à Física, ao Cálculo e à Transferência de Calor pôde ser discutida de acordo com as demandas e os interesses dos estudantes ao longo da resolução do EC. Assim, nesta seção, apresentam-se alguns invariantes operatórios relacionados à Matemática Básica explicitados pelos sujeitos no trabalho com o EC, principalmente em relação à noção de função, sua representação gráfica, variável, dependente e independente, e logaritmo.

Sabe-se que é possível representar uma função das seguintes formas: verbalmente (descrevendo-a com palavras), numericamente (por meio de uma tabela de valores), visualmente (por meio de um gráfico) e algebricamente (fórmula explícita). Essas quatro formas de representar uma função podem ser observadas em um diálogo retratado em Lopes (2021), quando um dos sujeitos da pesquisa questiona: “professora, quando a senhora diz que é uma função do tipo $f(x) = ax + b$, a senhora ‘tá’ falando daquela que a gente faz uma tabelinha e coloca os pontos no gráfico ‘pra’ traçar uma reta?”. Logo a seguir, o colega ratifica dizendo: “isso mesmo, se x for positivo a concavidade é ‘pra’ cima e se for negativo é ‘pra’ baixo”. Com essa afirmação, o estudante contesta: “‘Peraí moço’, essa aí que você está falando é a da parábola de segundo grau e a nossa aqui é a reta de primeiro grau”.

Quando o estudante faz menção à “tabelinha”, ele mobiliza o conceito-em-ação da tabela de valores em que, para cada valor de x definido, obtém-se conseqüentemente um valor para $f(x)$. Ele não faz referência ao conceito de função, mas se certifica com a pesquisadora a respeito do procedimento que faz para construir a representação gráfica de uma função polinomial de primeiro grau. Ressalta-se que os estudantes ao discorrerem acerca da Matemática, fazem-no em uma linguagem natural imprecisa, que revela a ausência de clareza em relação aos significados de conhecimentos básicos, por exemplo, parábola de segundo grau e reta do primeiro grau. O grau é do polinômio associado à representação algébrica da função e não da curva que representa graficamente a função. O colega que concordou com ele também mobiliza o conceito-em-ação que associa a parábola à função quadrática e a reta à função afim. Nesse momento, ele mobiliza o teorema-em-ação relacionado à função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, que tem como representação gráfica uma parábola com concavidade voltada para cima se $a > 0$ e com concavidade voltada para baixo se $a < 0$. O estudante não menciona o sinal de a , mas o sinal de x , ficando evidente que não percebe, de fato, o significado desempenhado pelos termos literais presentes na expressão algébrica de uma função. Parece que ele não associa em sua ação, daí o termo teorema-em-ação, essa ideia somente à função polinomial de segundo grau. Provavelmente, para esse estudante, sempre que $x > 0$ (e novamente não seria x , mas a), a parábola de equação $f(x) = ax^2 + bx + c$ é a representação gráfica da função que tem concavidade voltada para cima e se $x < 0$ (ou, corretamente

$a < 0$), a concavidade é voltada para baixo. Observa-se que, para ele, essa ideia pode ser aplicada a qualquer função.

Nesse mesmo diálogo, uma estudante questiona: “Essa ‘a’ $ax + b$ é aquela do problema do táxi que a gente viu no nivelamento de Cálculo, que tem uma parte fixa da bandeirada e a do km rodado que varia?”. Essa estudante refere-se a uma situação-problema que utiliza a função afim como modelo matemático para uma corrida de táxi em que x representa o número de quilômetros rodados e $f(x)$ o preço cobrado pelo taxista. Ela mobiliza o conceito-em-ação em que b representa o valor da bandeirada cobrado pelo taxista (valor fixo) e a representa o valor cobrado por km rodado. Percebe-se que ela não se refere a x como variável independente e $f(x)$ como variável dependente em $f(x) = ax + b$.

Para Vergnaud *et al.* (1990), a transformação de invariantes operatórios em palavras e textos ou em qualquer outro sistema semiótico (gráficos, diagramas, notação algébrica, entre outros) não é direta, nem simples; existem importantes lacunas entre aquilo que é representado na mente do indivíduo e o significado usual dos signos, pois os estudantes podem associar determinadas expressões linguísticas ou gráficas a significados diferentes, decorrentes de seu conhecimento-em-ação. Isso é perceptível quando a estudante, em $f(x) = ax + b$, associa o coeficiente angular com a variável independente e o coeficiente linear com a variável dependente, e quando em $f(x) = ax^2 + bx + c$, o estudante não considera o parâmetro a quando afirma que “se x for positivo a concavidade é pra cima e se for negativo é pra baixo”.

Em outro momento, quando os estudantes resolviam a EDO $\frac{dx}{dt} = 3xt^2$, um deles confessou que nunca entendeu o logaritmo Neperiano, recebendo a seguinte explicação do colega: “Isso é logaritmo na base e . É a mesma coisa de exponencial. Olha aqui, ‘pega’ o e , e eleva o t ao cubo mais c ”, referindo-se à equação $\ln|x| = t^3 + C$. Refletindo a partir da explicação do colega, esse estudante responde: “Se é a mesma coisa, então ‘pra’ que existe logaritmo?”. Para o colega que explicou, vale o teorema-em-ação: logaritmo na base e e exponencial são ideias equivalentes. É possível que ele tenha assimilado que o logaritmo é uma operação matemática diretamente relacionada com a exponencial, mas equivocadamente não distingue tais operações.

Vergnaud (1996a) propõe que as condições de aprendizagem devem emergir nas situações-problema, com o objetivo de que se tornem significativas para os estudantes, e que é função do professor identificar quais conhecimentos seus estudantes têm explicitamente e quais os que eles usam corretamente, mas não os desenvolveram a ponto de serem explícitos. Nesse sentido, foi muito importante a pergunta: “‘pra’ que existe logaritmo?”, pois trouxe uma oportunidade para ajudar o sujeito-em-ação a construir conceitos e teoremas explícitos e cientificamente aceitos.

Enfatiza-se que, quando os estudantes se deparam com uma situação em que precisam colocar em ação seus conhecimentos, muitos questionamentos acabam vindo à tona, principalmente se forem em situações diferentes das situações escolares usuais. Para que os estudantes possam progredir em um campo conceitual, é imprescindível explorar diversas situações que permitam a explicitação de seus invariantes operatórios e a negociação de seus significados.

INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS AO CÁLCULO: UMA SÍNTESE DOS RESULTADOS DE LOPES E LIMA (2021)

Relativamente ao Cálculo Diferencial e Integral e, especialmente, atrelados a elementos que são essenciais para a construção de conhecimentos relacionados às EDO, as manifestações dos sujeitos durante a resolução do EC, em suas discussões com colegas e com a pesquisadora, tornaram-se evidentes diferentes invariantes operatórios.

Destacam-se dois conceitos-em-ação concernentes à relação existente entre as noções de taxa de variação e de derivada: **a derivada é uma taxa de variação e taxa de variação é derivada**. Além disso, articulado a essas ideias, salienta-se o teorema-em-ação **se uma equação envolve uma taxa de variação, então ela é uma equação diferencial ordinária**. A respeito desses invariantes, ressalta-se que, embora reconhecer a vinculação entre as noções de derivada e de taxa de variação seja essencial a um estudante de Engenharia, é importante que este possa perceber, por meio do trabalho com diferentes situações, que não é qualquer taxa de variação que é uma derivada; que a derivada é uma taxa de variação instantânea.

Também relativo à ideia de taxa de variação, especificamente de variação instantânea, destaca-se o seguinte teorema-em-ação: **a taxa de variação instantânea de x em relação a t é sempre igual à taxa de variação instantânea de t em relação a x** . Conforme detalhadamente analisado em Lopes e Lima (2021), conjecturou-se que este teorema-em-ação – que para a pesquisadora foi explicitado por um dos sujeitos quando afirma que “escrever $\frac{dx}{dt}$ é a mesma coisa de escrever $\frac{dt}{dx}$ ” e ratificado por outros estudantes que, ao concordarem com o colega, afirmaram que “achar o x ou achar o t é a mesma coisa ou que tem que achar uma letra, então é a mesma coisa sim” – possivelmente tem origem em esquemas utilizados em determinadas situações, mas que não são adequados em qualquer caso.

No parágrafo anterior estão implícitos esquemas que, em algumas situações envolvendo equações polinomiais eram eficientes, mas que não o são no trabalho com EDO. Como apontam Lopes e Lima (2021), faz-se presente, implicitamente, nestas afirmações o seguinte teorema-em-ação: **como é indiferente a letra que se utiliza para denotar uma variável em uma equação, se em uma equação há duas letras, é indiferente, para solucionar a equação, determinar o valor de uma letra ou de outra, além do conceito-em-ação determinar as raízes de uma equação significa encontrar os valores assumidos por uma letra específica, x , para que a igualdade seja satisfeita**. A partir dessas observações, Lopes e Lima (2021) conjecturam, ademais, que, provavelmente não tenham sido suficientemente exploradas, no percurso formativo do estudante, situações nas quais as incógnitas de uma equação tenham sido denotadas por outras letras que não x ou ainda situações nas quais a letra x estava presente na equação, mas não denotando uma incógnita. O estudante parece ter interiorizado que **ser denotada pela letra x é um invariante operatório do conceito de variável**.

Ainda relacionado à noção de derivada, por meio de um diálogo entre os sujeitos, observa-se que um deles evidenciou ter-se dado conta de um invariante operatório relacionado à determinação da derivada de uma função composta: “Professora, a regra da cadeia se aplica quando a função é composta, ‘né’? Eu não

tinha percebido isso antes”. Ou seja, a afirmação do estudante indica um teorema-em-ação que, naquele momento, parece ter sido interiorizado por ele: se $h(x) = f(g(x))$, então $h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Identifica-se também que um dos sujeitos da pesquisa de Lopes (2021) não associa o cálculo de uma integral indefinida com uma operação, mas com uma mudança na fórmula, que se desenvolve e se modifica do ponto de vista simbólico. Ao debater com um colega, o estudante menciona: “é a mesma fórmula, ela vai se desenvolvendo, daí muda de símbolo. Igual a integral, quando resolve a conta, perde o símbolo do s e o dx e entra a constante C ”. Explicita-se então, na visão dos autores do artigo, o seguinte conhecimento em ação: **ao finalizar o cálculo da integral indefinida de uma função de x , no resultado obtido não estarão presentes o símbolo de integração e nem o dx , mas haverá a presença de uma constante C** . Evidencia-se, portanto, o quanto a não atribuição de significados, por parte de um estudante, a um objeto matemático pode prejudicar sua compreensão acerca de tal objeto.

Essa não atribuição de significados evidencia-se também quando um dos sujeitos debate com a pesquisadora a respeito do método de resolução de uma EDO de variáveis separáveis: “a senhora disse que era para integrar com x de um lado³ e com y do outro. Foi o que fizemos, então esse dx e esse dy não alteram nada”. Nota-se, nesta manifestação do estudante, o seguinte teorema-em-ação: **Como na notação $\int f dx$ o elemento dx não indica nada a respeito da operação matemática a ser realizada, então $\int f dx = \int f dy = \int f dz = \int f dt...$ etc.** Como não percebe o significado dos elementos dx e dy , recorrendo a esse teorema-em-ação mencionado e ao conceito-em-ação **resolver uma EDO de variáveis separáveis significa integrar uma função de x em um membro da equação e integrar uma função de y em outro membro da equação**, o estudante conclui que, como $\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3} \Leftrightarrow (x+3)dy = (y-1)dx \Leftrightarrow \int (x+3)dy = \int (y-1)dx$, então se integrar o membro da esquerda da última igualdade em relação a x e integrar em relação a y o membro da direita, a última igualdade permanecerá válida, porque estará mobilizando o esquema que, para ele, confere operacionalidade ao método de resolução de EDO de variáveis separáveis: **integrar um membro da equação em relação a x e o outro em relação a y** .

Associado à ideia do que significa resolver uma EDO, foi possível observar a partir de um questionamento de um dos sujeitos – “na equação da Lei de Fourier, a gente resolve para encontrar o valor de x ou de T ?” – a mobilização do conceito-em-ação: **determinar as raízes de uma equação é encontrar valores numéricos que tornem a igualdade verdadeira**. Este é, de fato, um invariante operatório que possibilitava aos sujeitos resolver as equações com as quais haviam se deparado até então, mas que em situações envolvendo EDO, novos esquemas relacionados à resolução de equações precisam ser elaborados, o que parecia já estar ocorrendo, no momento da implementação do EC, com outro sujeito que afirmou: “Nem x e nem T , precisamos encontrar uma função”. Nesta afirmação percebe-se o conceito-em-ação: **a solução de uma equação diferencial é uma função**.

O último invariante operatório mencionado em Lopes e Lima (2021) está relacionado ao grau e à ordem de uma EDO. Um dos sujeitos faz a seguinte afirmação a um colega: “É a mesma coisa das equações que a gente já conhece, a de 1º grau tem uma raiz, a de 2º grau tem duas raízes, e assim por diante”. Essa declaração explicita um teorema-em-ação proveniente de um conhecimento que

o estudante poderia mobilizar acertadamente em situações envolvendo equações polinomiais, mas que ao trabalhar com EDO precisa ser reelaborado: **se uma equação possui grau n , então possui n raízes**. Atrélado a esse teorema-em-ação está o conceito-em-ação de que **o número de raízes de uma equação é dado pelo grau da equação**. Em Lopes (2021), discute-se que, durante a implementação do EC, enquanto esses conhecimentos-em-ação válidos eram assumidos como válidos por alguns sujeitos também nas situações em que é necessário resolver uma equação diferencial, outro estudante já evidenciava necessitar de mais informações para avaliá-los e incorporá-los às situações envolvendo EDO.

INVARIANTES OPERATÓRIOS RELACIONADOS À FÍSICA EXPLICITADOS PELOS SUJEITOS NO TRABALHO COM O EC

O desenvolvimento do Evento Contextualizado, além de trazer contribuições relacionadas à Matemática da Educação Básica e ao Cálculo, já exemplificadas nas seções anteriores, também contribuiu na construção de conhecimentos relacionados a conceitos da Física. Nesta seção, apresenta-se a análise de alguns dados relacionados aos conhecimentos-em-ação sobre transferência de calor, temperatura, calor e condutividade térmica, mobilizados pelos estudantes no momento em que discutiam e investigavam o comportamento térmico de três configurações de paredes em alvenaria durante uma prática laboratorial no trabalho com o EC.

Observou-se que, no início do desenvolvimento do evento, os estudantes haviam percebido que precisavam estudar alguns conceitos necessários para sua resolução, pois, em dado momento, um estudante admitiu: “Li sobre as três transferências de calor, sobre gradiente, fluxo térmico, condutividade, tem até uma tabela dessa condutividade. Não sei explicar, mas sei que o assunto é importante em nosso curso”. Quando o estudante fez menção às “três transferências de calor”, referia-se aos modos de transferência de calor (condução, convecção e radiação), conceitos da Física estudados na Educação Básica. Esse diálogo evidenciou que os estudantes estavam retomando conhecimentos mobilizados anteriormente para construir novos conhecimentos concernentes ao Ensino Superior, principalmente conhecimentos relacionados a gradiente, fluxo térmico, condutividade e a tabela da condutividade, estudados na Educação Básica, e que são aprofundados na Transferência de Calor, disciplina do Ensino Superior.

Ficou evidente que muitos dos estudantes confundem calor com temperatura, pois quando questionados a respeito das propriedades do isopor como isolante térmico, um dos estudantes respondeu que “o isopor precisa de uma temperatura muito alta ‘pra’ começar a trocar calor com o meio, assim, como ele tem um calor específico baixo, você tem que submeter ele a uma alta temperatura ou uma temperatura muito baixa ‘pra’ ele começar a trocar”. No mesmo diálogo, um grupo de estudantes concluiu que a primeira parede (revestida de areia e cimento) absorve muito calor pelo fato de seus materiais terem uma alta capacidade de reter a temperatura; a segunda parede (revestida de gesso) consegue também reter a temperatura, mas a parede revestida de isopor é a que transmite temperatura mais baixa para o ambiente, garantindo assim, maior conforto térmico. Outro estudante reitera que “o isopor precisa de uma temperatura muito alta pra começar a trocar calor com o meio”. Os estudantes se referiam à

transferência de calor, que ocorre quando existe uma diferença de temperatura em um meio ou entre meios, ou seja, energia em trânsito devido a uma diferença de temperatura. O estudante fala sobre “reter a temperatura”, em vez de dizer reter calor, e alega que o isopor “tem um calor específico baixo”. Nessas afirmações, é incorreto dizer que um corpo possui calor, pois o que esse corpo possui é energia térmica, e isso foi corrigido pela pesquisadora durante o diálogo ocorrido. Todavia, percebe-se que o estudante mobilizou o teorema-em-ação referente ao coeficiente de condutividade térmica, pois compreende que o isopor pode ser utilizado como isolante térmico (percepção do senso comum). Fica implícito que, na verdade, o aluno quis dizer que o isopor tem “baixo” coeficiente de condutividade térmica, pois quanto menor o coeficiente, maior a capacidade desse isolamento.

Ainda relacionado à noção de temperatura e calor, por meio de um diálogo entre os sujeitos, observa-se que um deles evidenciou ter-se dado conta de um invariante operatório relacionado a um importante conceito-em-ação da Física sobre transmissão de calor, segundo o qual sempre que um corpo estiver a uma temperatura maior que a de outro ou, inclusive, no mesmo corpo existirem temperaturas diferentes, ocorre uma cessão de energia da região de temperatura mais elevada para mais baixa. A discussão a respeito da possibilidade de a transferência de calor acontecer inclusive no mesmo corpo, com temperaturas distintas, deu-se quando um dos sujeitos da pesquisa comunicou que “[...] a transferência de calor só acontece entre dois corpos com temperaturas diferentes”. Analisando as declarações dos estudantes, percebem-se **sujeitos-em-situação**, dando sentido a conceitos da Física, ampliando e redirecionando esses conceitos para a Transferência de Calor, quando confrontados com uma variedade de situações.

Identificam-se também importantes conhecimentos-em-ação mobilizados pelos estudantes em uma situação-problema quando necessitaram transformar medidas de temperatura de Celsius para Kelvin. Não era esperado pelos autores que os estudantes apresentassem dificuldades, mas percebeu-se que eles não compreendiam a necessidade dessas transformações e tinham dúvidas sobre os significados e notações das escalas de temperatura. Um dos estudantes confessou que nunca havia entendido essas conversões nas escalas de temperatura, mas se lembrava que a escala Celsius tinha a ver com a temperatura da água gelada e quente. Seu colega explicou que na escala Kelvin não tem número negativo. Nesse diálogo, lembrou-se das tabelas de conversão, quando um deles reitera: “Eu sei das tabelas e também sei fazer essas contas. Estou dizendo que não entendo por que é assim. Tem uma questão que nunca me responderam: Por que as escalas Celsius e Fahrenheit possuem grau ($^{\circ}\text{C}$ e $^{\circ}\text{F}$), mas a escala Kelvin não possui?”.

Destacam-se nesse diálogo importantes conhecimentos-em-ação mobilizados pelos estudantes. Quando o estudante se lembra de que a escala Celsius tem a ver com a temperatura da água gelada e quente, estava se referindo a um conteúdo significativo da Física a respeito da escala Celsius, que tem como pontos de referência a temperatura de congelamento da água sob pressão normal (0°C) e a temperatura de ebulição da água sob pressão normal (100°C). O estudante que afirmou não haver número negativo na escala Kelvin mobilizou um importante conceito-em-ação nessa escala, pois ela é utilizada para medir a temperatura absoluta de um objeto, é calibrada em termos de energia, e, como energia, é uma

grandeza positiva, não existem temperaturas negativas. Portanto, o zero é a temperatura mais baixa possível, chamado de zero absoluto ou zero Kelvin.

Todos esses questionamentos, juntamente com a dúvida do estudante a respeito do fato de as escalas Celsius e Fahrenheit possuírem grau e a escala Kelvin não, foram muito importantes, pois geraram um cenário “[...] que permitiu compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos” (VERGNAUD, 1996b, p. 8). Observou-se que, quando os estudantes se deparam com uma situação na qual precisam colocar em ação seus conhecimentos, muitos questionamentos acabam vindo à tona, principalmente se forem em situações diferentes das situações escolares usuais. Os questionamentos em relação às escalas utilizadas para medir a temperatura evidenciaram que os estudantes aprenderam sem compreender o porquê de serem de fato como são. Nesse sentido, Vergnaud (1996a) declara que os docentes devem fornecer situações problematizadoras que possam ter algum significado para o estudante. Isso mostra que, em cada Campo Conceitual, existe uma grande variedade de situações e os conhecimentos dos estudantes são moldados pelas situações que, progressivamente, vão dominando. Dessa forma, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual, porém, um só conceito precisa de uma variedade de situações para se tornar significativo, da mesma forma que uma só situação precisa de vários conceitos para ser analisada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com os dados obtidos e analisados, considerou-se que o Evento Contextualizado construído e desenvolvido na pesquisa possui potencial para favorecer o processo de aprendizagem das EDO, pois além de possibilitar ao estudante compreensões que extrapolaram a formulação matemática e resoluções algébricas das EDO, desempenhou o papel de ente integrador entre disciplinas matemáticas e não matemáticas, a saber, o Cálculo e a Transferência de Calor.

Para a análise cognitiva da aprendizagem das EDO por parte dos estudantes, utilizou-se a Teoria dos Campos Conceituais, que serviu de fundamento na investigação dos invariantes operatórios mobilizados pelos estudantes nas situações de resolução e discussão, e durante a escolha dos esquemas utilizados no desenvolvimento do EC. Esses invariantes, ou seja, os teoremas-em-ação e conceitos-em-ação, relacionados à Matemática Básica, ao Cálculo e à Transferência de Calor, foram analisados a partir da observação das reflexões dos estudantes no enfrentamento das situações que surgiram durante o desenvolvimento do EC.

A análise dos dados possibilitou – além de, conforme detalhadamente explicitado em Lopes e Lima (2021), identificar a mobilização de conceitos-em-ação e teoremas-em-ação que, nas situações envolvendo a resolução de equações polinomiais, eram válidos e auxiliavam os sujeitos a enfrentarem com êxito as questões propostas, mas que, no âmbito das situações relativas às equações diferenciais, precisam ser adaptados, reavaliados, recombinados e, por vezes, até descartados – evidenciar uma série de outros conceitos-em-ação e teoremas-em-ação relativos à Física, à Transferência de Calor ou a aspectos da Matemática básica que, apesar de não terem tanto impacto no estudo das EDO quanto os

relacionados ao Cálculo, podem oportunizar indicações ao professor acerca do desenvolvimento cognitivo dos estudantes ao vivenciar uma abordagem da Matemática a partir de contextos extramatemáticos.

O docente ter clareza acerca dos esquemas e dos invariantes operatórios relacionados às outras áreas além da Matemática, mobilizados pelos sujeitos ao resolverem um evento contextualizado, é importante para que este possa planejar mediações adequadas para contribuir com suas aprendizagens acerca do objeto matemático visado nesta resolução, no caso as EDO. Nesse sentido, Vergnaud (1994) orienta que é função do professor identificar quais conhecimentos seus estudantes têm explicitamente e quais os que eles usam corretamente, mas não os desenvolveram a ponto de serem explícitos, e recomenda que as condições de aprendizagem devem emergir nas situações-problema, com o objetivo de que se tornem significativas para os estudantes.

Esses resultados indicaram que o EC permitiu um ambiente favorável à aprendizagem, com muitos questionamentos e indagações a respeito de conceitos da Matemática básica, da Física e do Cálculo, todos imprescindíveis para a aprendizagem das EDO. Como sugestões para novos estudos articulando os subsídios teóricos da TMCC e da TCC, indica-se a necessidade de pesquisas visando à construção, por meio de uma variedade de situações-problema (que podem ser, por exemplo, eventos contextualizados) do campo conceitual das EDO em determinada habilitação de Engenharia, visto que Lopes (2021) restringiu-se a um estudo acerca das EDO de variáveis separáveis. Da mesma forma, sugerem-se investigações acerca do campo conceitual das Equações Diferenciais Parciais (EDP), em determinada habilitação de Engenharia.

OPERATIONAL INVARIANTS IN SCHEMES USED BY FUTURE ENGINEERS IN A CONTEXTUALIZED APPROACH TO ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

This article is part of a completed doctoral qualitative research and addresses the learning of ordinary differential equations of separable variables. Drawing from the theory of conceptual fields, it aims to explain and analyze some operational invariants about knowledge linked to concepts of mathematics, physics and calculus used by 21 second-term Calculus students, majoring in civil engineering at a private institution, in the resolution of a contextualized event (problem integrating different areas of knowledge). Data collection was constituted by audio recordings of the discussions held during the work with the event, created according to the theoretical-methodological framework of the theory of Mathematics in the Context of Science. Results indicate that students made use of operational invariants related to the notions of function, graphical representation of a function, dependent and independent variable and logarithm (basic mathematics); rate of change, derivative, integration as an operation, variable in a differential equation, order, and degree of a differential equation (calculus); heat transfer, temperature, heat, and thermal conductivity (physics). In addition, data analysis suggests that group discussions and interactions among students should be more frequent in classes as they contribute to promoting learning and student cognitive development.

Keywords: Mathematics Education in Higher Education. Theory of Mathematics in the Context of Sciences. Theory of Conceptual Fields. Engineering. Operational Invariants.

NOTAS

1. Para Camarena (2021), a transferência de conhecimento é a capacidade de um indivíduo de utilizar um determinado conhecimento construído para resolver problemas em uma diversidade de contextos nos quais a mobilização de tal conhecimento é requerida.
2. O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade) avalia o rendimento dos concluintes dos cursos de graduação em relação aos conteúdos programáticos previstos nas diretrizes curriculares dos cursos, o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias ao aprofundamento da formação geral e profissional, e o nível de atualização dos estudantes com relação à realidade brasileira e mundial.
3. Ao referir-se aos *membros* de uma equação, o estudante utiliza o termo *lados da equação*, revelando que ainda não se apropriou de uma linguagem matemática rigorosa.

REFERÊNCIAS

- BARROS, D. M. V. **A Teoria dos Estilos de Aprendizagem**: convergência com as tecnologias digitais. Revista SER: Saber, Educação e Reflexão, v.1, n.2, p. 14-28, jul. – dez. 2008. Disponível em: <https://repositorioaberto.uab.pt/handle/10400.2/2999> . Acesso em: 10 jun. 2022.
- CAMARENA, P. G. **Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería**. Reporte de proyecto de investigación. Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 2000.
- CAMARENA, P. G.; GONZÁLEZ, L. G. Contextualización de las series en ingeniería. **Científica: The Mexican Journal of Electromechanical Engineering**, Ciudad de México, v. 5, n. 4, p. 201-206, 2001.
- CAMARENA, P. G. La serie de Fourier en el contexto de transferencia de masa. **Científica: The Mexican Journal of Electromechanical Engineering**, Ciudad de Mexico, v. 6, n. 4, oct./dic. 2002.
- CAMARENA, P. G. La matemática en el contexto de las ciencias: la resolución de problemas. **Reporte de investigación**. Ciudad de México: Instituto Politécnico Nacional, 2003.
- CAMARENA, P. G.; MURO, C. **Campos conceptual de la interdisciplinariedad en la ingeniería**. Alemanha: Editorial Académica Española, 2012.
- CAMARENA, P. G. Epistemología de las impedancias complejas en ingeniería. **Innovación Educativa**, Ciudad de México, v. 12, n. 58, ene. /abr. 2012. Disponível

em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732012000100003. Acesso em: 5 mar. 2022.

CAMARENA, P. G. A treinta años de la teoría educativa "Matemática en el contexto de las ciencias", **Revista Innovación Educativa**, Ciudad de México, v. 13, n. 62, p.17-44, 2013. Disponível em: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-26732013000200003. Acesso em: 10 jun. 2022.

CAMARENA, P. G. Didáctica de la matemática en contexto. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 2, p. 01-26. 2017. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/33804>. Acesso em: 22 fev. 2022.

CAMARENA, P. G. **Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias**. 1a ed. - Santiago del Estero: EDUNSE, 2021.

CAMARENA, P. G.; TREJO, E. T. **La Matemática en el Contexto de las Ciencias y los invariantes operatorios**. In: GUTIÉRREZ, R. D.; CENICEROS, C. D.; MÉNDEZ, Z. A. (Eds.). *Cognición y Procesos de Aprendizaje*. Durango, México: REDIE, págs. 130-163, 2011.

CUNHA, K. M. A.; FERREIRA, L. N. A. A Teoria dos Campos Conceituais e o Ensino de Ciências: Uma Revisão. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, Belo Horizonte, n. 20, v. único, p. 523-552, 2020. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/19358>. Acesso em: 22 fev. 2022.

HERNÁNDEZ, C. V.; ALONSO, C. P. **CHAEA 32 simplificada: Propuesta basada em Análisis Multivariantes**. 2013. Dissertação (Mestrado) – Análisis Avanzado de Datos Multivariantes. Universidad de Salamanca, Salamanca, 2013. Disponível em: <https://gredos.usal.es/handle/10366/122182>. Acesso em: 25 jul. 2022.

LOPES, R. **Equações Diferenciais Ordinárias de Variáveis Separáveis na Engenharia Civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor**. 2021. 316 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021. Disponível em: <https://tede.pucsp.br/bitstream/handle/24368/1/Rieuse%20Lopes%20Pinto.pdf>. Acesso em 10 abr. 2022.

LOPES, R; LIMA, G. L. Invariantes Operatórios Mobilizados por Futuros Engenheiros Cívics em uma Abordagem Contextualizada de EDO de Variáveis Separáveis. In: VIII SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2021, Uberlândia. **Anais [...]**. Uberlândia, Minas Gerais: Universidade Federal de Uberlândia, 2021, p. 830-848. Disponível em: <http://www.sbemrasil.org.br/files/sipemviii.pdf>. Acesso em: 3 fev. 2022.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em ensino de ciências**. Porto Alegre. Vol. 7, n. 1 (jan. /mar. 2002), p. 7-29, 2002. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/141212>. Acesso em: 3 fev. 2022.

VERGNAUD, G. Multiplicative structures. In: LESH, R.; LANDAU, M. (ed.). **Acquisition of Mathematics Concepts and processes**. New York: Academic Press Inc, 1983. p. 127-174.

VERGNAUD, G.; BOOKER, G.; CONFREY, J.; LERMAN, S.; LOCHHEAD, J. SFARD, A.; SIERPINSKA, A.; WHEELER, D. Epistemology and psychology of mathematics education. In: NESHER, P.; KILPATRICK, J. (ed.). **Mathematics and cognition: a research synthesis by International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In: NASSER, L. (ed.). SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1. 1993, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: [s.n.], 1993. p. 1-26.

VERGNAUD, G. Multiplicative conceptual field what and why? *In*: HAREL, G.; CONFREY, J. **The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics**. Albany (NY): State University of New York Press, 1994. p. 41-59.

VERGNAUD, G. A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. **Didactica das matematicas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996a. p. 155-191.

VERGNAUD, G. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. **Revista do GEMPA**, Porto Alegre, v. 4, n. 4, p. 9-19, 1996b.

VERGNAUD, G. The nature of mathematical concepts. In: NUNES, T.; Bryant, P. (ed.). **Learning and teaching mathematics, an international perspective**. Hove: Psychology Press, 1997.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**. Curitiba: UFPR, 2009.

Recebido: 30 jun. 2022.

Aprovado: 14 nov. 2022.

DOI: 10.3895/rbect.v15n3.15683

Como citar: PINTO, R. L.; LIMA, G. L. Invariantes operatórios em esquemas utilizados por futuros engenheiros em uma abordagem contextualizada de equações diferenciais ordinárias. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, Edição Especial, p. 1-22, dez. 2022. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/15683>>. Acesso em: XXX.

Correspondência: Rieuse Lopes Pinto - rieuse.lopes@unimontes.br

Direito autoral: Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

