Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia
ISSN: 1982-873X

https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect

Raciocínio matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral: uma análise a partir de tarefas exploratórias

André Luis Trevisan
andrelt@utfpr.edu.br
0000-0001-8732-1912
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Paraná, Brasil.

RESUMO

Neste artigo, estão sintetizados resultados de estudos que discutem possibilidades para o desenvolvimento do raciocínio matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral a partir de tarefas exploratórias. Trata-se de uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo com dados recolhidos no contexto de aulas desta disciplina, compostos por (a) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes, (b) áudios dessas discussões e (c) vídeo da discussão coletiva mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes. Dentre os resultados, apresentam-se quais conceitos matemáticos foram mobilizados pelos estudantes na elaboração de argumentos que buscam justificar suas resoluções em uma das tarefas, são elencados processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes em uma segunda tarefa, com destaque para conjecturar e justificar. No trabalho, destaca-se as ações do professor que contribuíram para o desenvolvimento do raciocínio matemático na discussão de uma terceira tarefa.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Matemática. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Raciocínio Matemático. Tarefas exploratórias.

INTRODUÇÃO

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é parte integrante essencial do núcleo básico de cursos de Ciências Exatas no Brasil, em especial das Engenharias, e pode contribuir para o desenvolvimento de processos de raciocínio necessários à formulação e à solução de problemas de diversas áreas, à análise e compreensão de fenômenos, sua validação por experimentação e à comunicação eficaz, oral, escrita e gráfica (BRASIL, 2019). Constitui-se como uma importante ferramenta capaz de desenvolver critérios essenciais para a interpretação e resolução de problemas do cotidiano profissional (GUIMARÃES, 2019). Entretanto, a defasagem no conhecimento matemático prévio dos estudantes (GHEDAMSI; LECORRE, 2021) e a estrutura didático-pedagógica dos cursos de Engenharia, em especial em nosso contexto de trabalho, no qual prevalece ainda uma metodologia de ensino tradicional que prioriza aulas expositivas e centradas no professor (CABRAL, 2015), contribuem para a reprovação na disciplina de CDI e a evasão no curso (ZARPELON; RESENDE; REIS, 2017; THOMPSON; HAREL, 2021).

Pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da Matemática (com resultados que podem contribuir para reverter o quadro mencionado acima) apontam que abordagens de ensino promissoras são aquelas em que os estudantes trabalham de forma colaborativa (GRANBERG; OLSSON, 2015; CARLSEN, 2018), envolvendo-se em discussões matemáticas (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018; RIBEIRO *et al*., 2021) e resolvendo tarefas de natureza exploratória ou matematicamente ricas (PONTE, 2005; WHITE; MESA, 2014), contribuindo, assim, para o desenvolvimento do raciocínio criativo (LITHNER, 2008; 2017).

Nos últimos anos, enquanto grupo de pesquisa[1], temos investigado propostas de trabalho factíveis em sala de aula reais do Ensino Superior. Tomando-se, como pressuposto, a importância de o estudante assumir um papel ativo em seu processo de aprendizagem. Em nossa prática de sala de aula, desenvolvemos uma proposta de trabalho com episódios de resolução de tarefas que foge de uma aula “usual” de CDI nos aspectos metodológicos (COUTO; FONSECA; TREVISAN, 2017; TREVISAN; MENDES, 2018; TREVISAN; ALVES; NEGRINI, 2021) e na organização curricular, com conteúdo em formato de espiral e um “adiamento” para o final do curso, de um tratamento rigoroso do conceito de limites e das definições formais de derivada e integral (TREVISAN; MENDES, 2017). Apesar dos resultados promissores desta forma de trabalho, pouco ainda sabíamos a respeito do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, dos conceitos mobilizados e do papel das ações do professor durante episódios de resolução de tarefas.

Assim, nos últimos anos, aprofundamos e refinamos a investigação acerca do desenvolvimento do raciocínio matemático de estudantes de CDI que cursam Engenharia e a mobilização de seus diferentes processos no trabalho com tarefas exploratórias. Essa temática alinha-se ao movimento atual de renovação dos modelos de curso de Engenharia para se adaptar às novas realidades globais, com metodologias de ensino mais modernas e a formação por meio de competências[2] que supram as necessidades de mercado.

Por um lado, destacam-se as novas Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de graduação em Engenharia (BRASIL, 2019), de que se deve proporcionar, ao longo da formação, o desenvolvimento de competências relacionadas à formulação e concepção de soluções criativas, bem como o uso de técnicas adequadas. Por outra, apontam também o desenvolvimento de competências mais amplas, envolvendo aspectos relacionados à comunicação, trabalho em equipes e atitude investigativa. Assim, estimula-se a formação de um profissional que, além da formação técnica, seja também humano, crítico, reflexivo, criativo, cooperativo e ético. Tal discussão apresenta interface direta com orientações resultantes das pesquisas em Educação Matemática acerca do desenvolvimento de competências matemáticas que precisam ser desenvolvidas com estudantes nas diferentes fases do sistema educativo, em especial o raciocínio matemático, tanto em termos de seus processos (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011; JEANNOTTE; KIERAN, 2017) quanto em relação ao seu caráter criativo (LITHNER, 2008).

Este estudo é a ampliação de uma versão mais sucinta, apresentada no VIII – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, realizado em formato *online* no ano de 2021, e compila resultados de estudos desenvolvidos no âmbito do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática (PPGMAT) – UTFPR CP/LD sobre a temática *raciocínio matemático e a disciplina de CDI* (TREVISAN; ARAMAN, 2021a, b; NEGRINI, 2022; TREVISAN; VOLPATO, 2022).

Assim, nosso objetivo é discutir possibilidades para promoção do raciocínio matemático em aulas de CDI 1 a partir do trabalho com algumas tarefas exploratórias. Mais especificamente, pretendemos: (i) reconhecer conceitos matemáticos mobilizados pelos estudantes na elaboração de argumentos que buscam justificar suas resoluções; (ii) discutir os processos de raciocínio matemático que estudantes mobilizam; (iii) compreender como ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Para tal, na continuidade deste trabalho, destacamos alguns resultados de pesquisas que caracterizam o raciocínio matemático e seus processos e discutem as ações do professor que o apoiam. Apresentamos o contexto em que o estudo foi realizado e procedimentos metodológicos assumidos na pesquisa. Por fim, analisamos e discutimos dados provenientes de tarefas envolvendo representações gráficas, apresentando implicações para o ensino e a pesquisa em CDI no que tange ao desenvolvimento do raciocínio matemático de estudantes que cursam essa disciplina.

RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Um desafio para os professores de todos os níveis de escolaridade refere-se a como desenvolver o raciocínio matemático em seus estudantes. Apesar das diferentes perspectivas teóricas assumidas a respeito desse tema, discutidas em detalhes por Araman, Serrazina e Ponte (2019), é consenso entre os pesquisadores que o raciocínio matemático – processo dinâmico de conjecturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos – é uma competência básica na aprendizagem matemática.

Jeannotte e Kieran (2017) discutem, no âmbito dos aspectos processuais do raciocínio matemático, aqueles relacionados à busca por similaridades e diferenças entre situações (conjecturar, identificar um padrão, generalizar, comparar e classificar) e outros relacionados à validação (como justificar, provar e provar formalmente), além desses, e dando suporte a eles, o exemplificar. Apesar da relevância de todos esses processos no desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, destacamos, de forma especial neste trabalho, os processos de conjecturar e justificar, visto que foram mais evidentes nos dados analisados.

Segundo Jeannotte e Kieran (2017), conjecturar é um processo cíclico de: (i) enunciar a conjectura; (ii) verificar se cobre todos os casos e exemplos; (iii) tentar refutar; (iv) encontrar um motivo que faça com que a conjectura seja verdadeira ou tentar modificá-lá. Os estudantes podem criar conjecturas válidas ou inválidas, alicerçadas em raciocínios válidos ou, por vezes, inválidos, sendo que esses últimos, embora não desejados, podem servir como ponto de partida para o entendimento das ideias matemáticas. Quanto à forma de apresentação de uma conjectura, ela pode ser escrita de várias formas ou, até mesmo, existir apenas na mente dos estudantes.

Justificar, por sua vez, relaciona-se à explicação de uma conjectura inicialmente elaborada, apresentando motivos (argumentos) para alterar o valor epistêmico primeiramente de "provável para mais provável", e, em seguida, para verdadeiro ou falso. Araman, Serrazina e Ponte (2019) afirmam que justificar está relacionado com "a identificação de relações que permitem entender por que uma afirmação pode ser verdadeira ou falsa" (p. 468). Assim, justificar como intimamente relacionado ao "investigar o porquê" e à elaboração de argumentos pelos estudantes "para se convencerem a si próprios e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira" (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011, p. 35), recorrendo, para tal, a diferentes conceitos matemáticos.

No que tange à mobilização desses processos, seja em momentos de discussões nos pequenos grupos de estudantes ou em plenária com toda a turma, Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) propõem um modelo para análise das ações dos professores em quatro categorias. A primeira é *convidar*, que seria o primeiro contato dos alunos com o tema que será abordado. A segunda, *guiar/apoiar*, em que o professor, por meio de perguntas, guia os alunos a continuar participando de uma resolução de uma tarefa já iniciada. A terceira *informar/sugerir*, é o momento em que o professor valida as respostas dos alunos, introduzindo novas informações e proporcionando novos argumentos. A última é *desafiar*, o professor "coloca o aluno na situação de ser ele próprio a avançar em terreno novo, seja em termos de representações, da interpretação de enunciados, do estabelecimento de conexões, ou de raciocinar, argumentar ou avaliar" (PONTE; MATA-PEREIRA; QUARESMA, 2013, p. 59). Outro modelo similar, que também organiza as ações do professor em categorias e, para cada uma delas, detalha ações possíveis, é o TMSSR (*Teacher Moves for Supporting Student Reasoning*) de Ellis, Özgür e Reiten (2018).

Baseados nestes dois modelos, Araman, Serrazina e Ponte (2019) organizaram um quadro de análise que descreve as ações docentes que apoiam o raciocínio matemático, mostrado no Quadro 1, e que servirá como suporte para análise no contexto de uma das tarefas apresentadas neste artigo.

Quadro 1 - Quadro de análise das ações do professor

Categoria	Ações
Convidar	Solicita respostas para questões pontuais. Solicita relatos de como fizeram.
Guiar/ Apoiar	Fornece pistas aos alunos. Incentiva a explicação. Conduz o pensamento do aluno. Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.
Informar/ Sugerir	Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. Fornece informações e explicações. Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.
Desafiar	Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). Propõe desafios. Encoraja a avaliação. Encoraja a reflexão. Pressiona para a precisão. Pressiona para a generalização.

Fonte: Adaptado de Araman, Serrazina e Ponte (2019)

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo que deu origem a este artigo foi desenhado como uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994). Os participantes foram estudantes de cursos superiores de Engenharia de uma Universidade Federal do Paraná, que cursaram a disciplina de CDI 1 (sob responsabilidade do autor) no 2º semestre de 2017 (tarefas 1 e 2) e no 1º semestre de 2019 (tarefa 3). Essa disciplina, com uma carga de 90 horas-aula, contempla o estudo de funções, limites, derivadas e integrais de funções reais de uma variável real e foi organizada em uma estrutura curricular "não usual" (TREVISAN; MENDES, 2017) com conteúdos apresentados em formato de espiral (revisitados em vários momentos ao longo do semestre).

Em geral, 25 horas do curso (cerca de dez encontros de três horas-aula de 50 minutos) foram dedicadas ao trabalho com episódios de resolução de tarefas, com os 50 estudantes da turma organizados em grupos de três a quatro estudantes em um primeiro momento, trabalhando de forma autônoma. O professor acompanhou o trabalho e fez intervenções quando necessário. Por fim, houve uma discussão coletiva, mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes, havendo a sistematização de conceitos.

Três das tarefas selecionadas para este artigo, que foram propostas logo no início da disciplina, buscaram mobilizar nos estudantes a capacidade de analisar, de maneira coordenada, as mudanças que ocorrem em duas variáveis interdependentes, articulando diferentes representações. Uma quarta tarefa foi aplicada no início da segunda metade do curso. Considerando os conteúdos propostos no planejamento semestral do professor da disciplina, neste momento, os estudantes conheciam o conceito de limites de sequências numéricas, e o desenvolvimento da tarefa antecedeu intencionalmente a extensão desse conceito para o caso de funções de domínio real, no caso, estudo de limites no infinito.

Na tarefa 1 (Figura 1), discutida em detalhes por Trevisan e Araman (2021a), ao solicitar que os estudantes descrevessem o gráfico a uma pessoa que não o estivesse vendo, o objetivo foi reconhecer conceitos que seriam mobilizados na elaboração dessa descrição, e os argumentos por eles apresentados para elaborá-la. Embora ambas as funções presentes na tarefa sejam crescentes, os valores de *f(x)* crescem a uma taxa decrescente (sendo, portanto, a representação gráfica dessa função uma curva côncava para baixo), enquanto os valores de *h(x)* crescem a uma taxa crescente (com representação gráfica sendo uma curva côncava para cima).

Figura 1 – Tarefa 1

Como você descreveria a uma pessoa que não esteja vendo o gráfico de cada uma das funções descritas por meio das tabelas abaixo?

x	0	1	3	6
$f(x)$	1	1,3	1,7	2,2

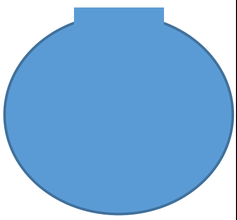
x	12	15	18	21
$h(x)$	21,40	21,53	21,75	22,02

Fonte: Trevisan e Araman (2021a, p. 602)

Na tarefa 2 (Figura 2), detalhada em Trevisan e Araman (2021b), era necessário: (i) reconhecer grandezas envolvidas na situação (no caso, altura da água na garrafa e tempo); (ii) reconhecer a direção de crescimento (por exemplo, altura e volume aumentam com o tempo, mas o raio aumenta e depois diminui); (iii) identificar o "modo" como a altura de água varia (inicialmente, crescendo a uma taxa decrescente, e depois crescente); (iv) esboçar uma representação gráfica com mudança de concavidade.

Figura 2 – Tarefa 2

Água é derramada em uma garrafa/vaso a uma taxa constante. Use esta informação e a forma do vaso (figura ao lado) para responder às perguntas a seguir. Esboce um gráfico que relacione a altura da água na garrafa com o passar do tempo. Explique o raciocínio que levou ao seu esboço.



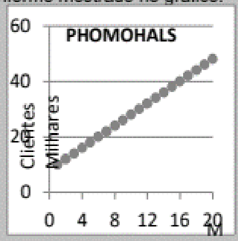
Fonte: Trevisan e Araman (2021b, p. 166).

Já na tarefa 3, adaptada de Fonseca (2017) e Ramos (2017) e discutida por Trevisan e Volpato (2022) (Figura 3), *Caso Compunet*, exploram-se diferentes representações de sequências numéricas. A tarefa apresenta potencial para a exploração de uma progressão aritmética. No caso da primeira empresa, progressão geométrica, no caso da segunda empresa e da terceira empresa, fornece indícios de certa "estabilização" em seu comportamento.

Figura 3 – Tarefa 3

A empresa COMPUNET fornece conexões de Internet para seus atuais 10.000 consumidores. A COMPUNET está interessada na contratação de uma agência de publicidade para desenvolver uma campanha, para aumentar o número de consumidores. A empresa tem três agências de publicidade diferentes para escolher: PROMOHALS, H & G publicidade e SCHLEICH & Co. Cada empresa garante um aumento do lucro para COMPUNET, mas em ritmos diferentes. Seu trabalho é investigar qual agência é melhor para COMPUNET.

A campanha desenvolvida pela PROMOHALS promete um crescimento nos negócios, conforme mostrado no gráfico.



H & G Adversiting
A campanha da Agência de publicidade H & G Adversiting promete um crescimento mensal a uma taxa 10%. Ou seja, o lucro de cada mês é 10% maior que do mês anterior.

Schleich & Co promete o crescimento mostrado na Tabela.

Tempo (meses)	Clientes (Milhares)
1	10
2	15
3	19
4	23
5	27
6	30
7	32
8	34
9	36
10	38
11	39
12	40
13	41
14	42
15	42
16	43
17	43
18	44
19	44

Fonte: Trevisan e Volpato (2022, p. 7)

Por fim, a tarefa 4 considera um tanque que contém, inicialmente, 5000 litros de água pura e recebe uma mistura contendo 750g de sal diluídos em 25 litros de água a cada minuto. Pede-se para investigar o comportamento da concentração da mistura ao longo do tempo. Nessa tarefa, é possível analisar: (i) a quantidade de sal (em gramas) como função do tempo (em minutos), no caso Q_1 (t)=750t; (ii) a quantidade de água (em litros), também como função do tempo (em minutos), no caso Q_2 (t)=5000+25t; (iii) a concentração da mistura (em gramas por litros), em função do tempo (em minutos), no caso $C(t) = \frac{750t}{5000+25t} = \frac{30t}{200+t}$ $(t \geq 0)$. A partir de dados coletados com essa tarefa, foram realizadas análises com dois focos: os processos de raciocínio matemático mobilizados por grupos de estudantes (NEGRINI, 2022) e as ações do professor em momento de discussão coletiva com a turma (plenária).

Os dados recolhidos são compostos por (a) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes, (b) áudios das discussões nos pequenos grupos e (c) vídeo da discussão coletiva mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes. As gravações em áudio e vídeo foram transcritas na íntegra (como parte de um projeto maior), em articulação com os protocolos produzidos, propiciando, assim, a organização e a análise dos dados.

Na intenção de reconhecer uma maior variedade de processos de raciocínio que foram mobilizados, bem como evidenciar argumentos apresentados pelos estudantes. No caso das tarefas 1, 2 e 4, foram considerados dados dos tipos (a) e (b), tomando, por critério, para escolha dos grupos, aqueles em que houve um maior envolvimento dos estudantes na “apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados” (RODRIGUES; MENEZES; PONTE, 2018, p. 399). Por sua vez, com objetivo de compreender como as ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático, destacamos dados em (c), considerando dois trechos da plenária na qual entendemos ter havido uma participação expressiva dos estudantes e uma maior variedade dessas ações (um acerca da tarefa 3 e outro da tarefa 4). Os resultados estão organizados sequencial e separadamente para cada uma das tarefas propostas, considerando os objetivos anunciados na introdução do artigo. As letras A1, A2, e assim sucessivamente, são usadas para indicar falas dos estudantes.

ANÁLISE DOS DADOS

Tarefa 1

Para análise da Tarefa 1, apresentamos a transcrição do diálogo dos integrantes da equipe com o pesquisador, no intuito de sintetizar o modo como haviam pensado.

A1: A gente fez por valores, fez os gráficos e observou os gráficos como dava para explicar... a gente falou que era uma curva de crescimento e para representar para um cego a gente pegaria a mão dele levaria no ponto de início, no ponto final. Explicaria olha aqui no ponto de início começou com tal valor. E daí o valor de *x* cresceu um padrão e o valor *y* cresceu em outro padrão, só que esses padrões são proporcionais e formam essa curva. O crescimento de [valores de] *x* é mais rápido que o crescimento de [valores de] *y*. A gente explicou como é a extensão, se uma cresce mais rápido e outra cresce mais lentamente, mais ou menos assim.

Professor: Aqui [referindo-se ao movimento das mãos feito por A1, enquanto falava] os dois ficaram meio que com concavidade voltada para cima, é isso?

A1: Sim

A2: Realmente é guiar a mão dele e ele falando: olha, teve um crescimento assim, pouco acentuado.

A1: Colocar a mão dele tipo: aqui é o início do gráfico, ele começou com tais valores e a partir daí ele foi crescendo com essa cara dessa curva aqui você vai. Você vai dar uma curva, fazê-lo dar uma curva maior com a mão. Aqui a curva vai crescer mais rápido... eu acho que ele sentiria que esse crescimento é mais rápido que esse, daí você explicaria. Você explicaria porque o crescimento é mais rápido que o outro. Taxa de variação de *x* em relação a *y*. E do outro *x* em relação ao outro *y*.

O grupo reconhece que os gráficos são crescentes (ao utilizar a expressão *curva de crescimento*), e constrói sua argumentação baseada na marcação de pontos feita no papel (*a gente fez por valores, fez os gráficos*). Recorrem à identificação de um padrão para analisar de forma independente as variações absolutas das variáveis independentes e dependentes para cada uma das funções (*o valor de x cresceu um padrão e o valor y cresceu em outro padrão*). Mobilizam, também, ações de comparação entre as taxas de crescimento (absoluto) das variáveis (*o crescimento de x é mais rápido que o crescimento de y*).

Entretanto, o movimento realizado com as mãos pelo estudante A1 foi similar para ambas as funções, sugerindo a formação de gráficos côncavos para cima. Embora o professor tenha chamado a atenção para esse fato (*os dois ficaram meio que com concavidade voltada para cima*), o grupo não foi capaz de reconhecer esse fato, retificando a descrição já apresentada. Embora o estudante A1 utilize a expressão *taxa de variação de x em relação a y*, não evidencia compreender seu significado, bem como sua relação com a concavidade dos gráficos, deixando sua justificativa carente de apoio.

Tarefa 2

Os integrantes do grupo elaboraram um primeiro esboço (Figura 4A) e, no trecho da discussão a seguir, procuraram validá-lo:

A1: Então, mas daí o gráfico vai ficar assim, não vai?

A2: É, então, porque ela cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido, por causa daqui [apontando para a parte central da garrafa].

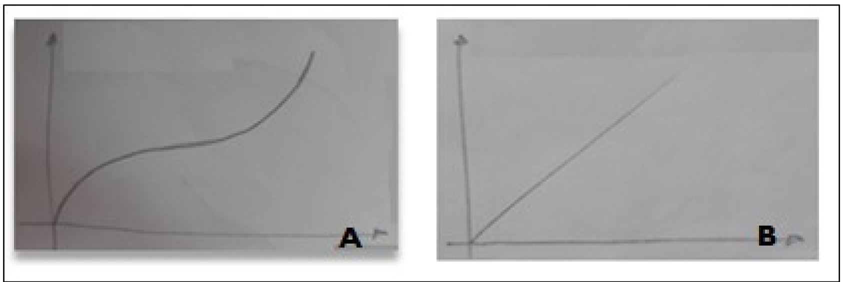
A3: Então, mas daí se for medir a altura do vaso pelo diâmetro, é uma reta.

A2: Não, não porque tipo assim, ó! O raio daqui é menor que o daqui [comparando a parte inferior com a parte central da garrafa] então a quantidade de água que for colocar aqui, ela já vai aparecer aqui. Na hora que ele começar a encher a partir desse ponto, ele vai demorar pra estar crescendo e aqui ele vai crescer mais rápido [apontando os diâmetros da superfície de água na garrafa conforme ela estaria sendo preenchida].

A3: É então, mas estou falando em relação a diâmetro.

A2: Eu acho que ficaria mais ou menos assim [Figura 4B]. Seria uma reta?

Figura 4 – Esboços propostos pelo grupo de estudantes na Tarefa 2



Fonte: Adaptado de Trevisan e Araman (2021b).

No intuito de validar o primeiro esboço, A2 elaborou justificativas baseadas no formato da garrafa, imaginando como seriam os diâmetros da superfície de água à medida que ela fosse preenchida. Argumentou que a altura *cresce no começo rápido, depois ela diminui e depois volta mais rápido*. A3, por sua vez, apresentou uma nova conjectura: a de que a representação gráfica, relacionando a altura de água com o diâmetro da superfície de água, seria uma reta. A2 novamente elaborou sua justificativa para o formato da curva que representa graficamente a relação supracitada, mencionando agora o raio em sua argumentação. A3 parece ter ficado confuso e não reconheceu que, implicitamente, os argumentos de A2 consideravam o tempo como variável independente, e não o raio da garrafa. Surgiu uma nova representação (uma reta), realizada por A1 com base na conjectura de A3. A discussão seguiu:

A3: Não. Depende, o que vamos relacionar? Volume ou altura.

A2: altura de água na garrafa, tá vendo [apontando para o enunciado da tarefa]?

A3: ah sim.

A1: Daí eu acho que seria esse gráfico assim [Figura 4A], porque tipo quando começa colocar água aqui ela vai crescer rápido, vai dar uma diminuída na rapidez, olha o tamanho disso aqui [apontando para o centro da garrafa], daí a hora que começar afunilar aqui ele vai crescer mais rápido. Esse gráfico aqui [Figura 4B] seria de altura de água. O volume vai ser constante, vai tá sempre enchendo na mesma quantidade [Figura 4B].

Neste trecho, o grupo retornou ao enunciado da tarefa e reconheceu que a representação gráfica pedida deveria relacionar a altura da água na garrafa com o passar do tempo. O estudante A1 reformulou então os argumentos para validar o esboço inicial, baseando-se no "modo" como a altura de água variava. Apontou também a outra representação gráfica, reconhecendo que ela representava o volume de água na garrafa; porém, em sua justificativa, utilizou incorretamente a palavra constante, visto que a taxa de variação do volume que era assumida no enunciado da tarefa como sendo constante.

Embora o grupo tenha validado a conjectura inicial, não fez parte da discussão a elaboração de argumentos que justificassem a mudança de concavidade ou, ainda, o fato de a curva que é a representação gráfica da relação em foco possuir, em sua parte inicial, uma concavidade voltada para baixo e depois para cima. Tais aspectos foram "aceitos" quase que naturalmente por A2 e A3 a partir do esboço elaborado por A1, embora se tratasse de uma justificativa incompleta, que não abordava o conceito de concavidade.

Tarefa 3

No intuito de ampliar uma discussão a respeito de representações gráficas que haviam sido expostas por alguns grupos durante a resolução da tarefa, o professor convida a turma para discussão

Professor: Queria ouvir um pouco de vocês, o que vocês pensaram sobre a situação. Alguma equipe se propõe a iniciar? (*Convidar*).

A1: A gente inicia.

Professor: Pode ser então. Conte para a gente o que vocês pensaram. (*Guiar/apoiar*).

A1: Primeiro a gente fez análise do *Promohouse* pelo gráfico. Os primeiros cinco meses, 5.000 clientes, então, no segundo mês, 50.000 clientes, aí, no total, ele recebeu 40.000 clientes novos, aí a gente foi para o HIG. Pode falar a conclusão ou faz assim [indicando continuidade da explicação]?

Professor: Conta como é que vocês foram encaminhando? (*Guiar/apoiar*).

A1: A gente foi usando a fórmula de juros compostos, mas gente analisou mês a mês para conseguir comparar com as duas empresas. Depois a terceira empresa, a gente olhou também aquela tabela de 5 em 5 meses e aí a gente concluiu que a *Promohouse* não se tornou vantajosa em nenhum momento e a terceira empresa, ela se tornou vantajosa no período de até 16 meses, depois quem ficou melhor foi a H&G.

Professor: O que poderia querer me fazer com que esse número de clientes aumentasse muito rápido? (*Guiar/apoiar*). Pensando na situação, o que eu poderia estar querendo que o número de clientes aumente muito rápido? (*Desafiar*).

A2: Talvez porque o seu faturamento seja suficiente naquele período.

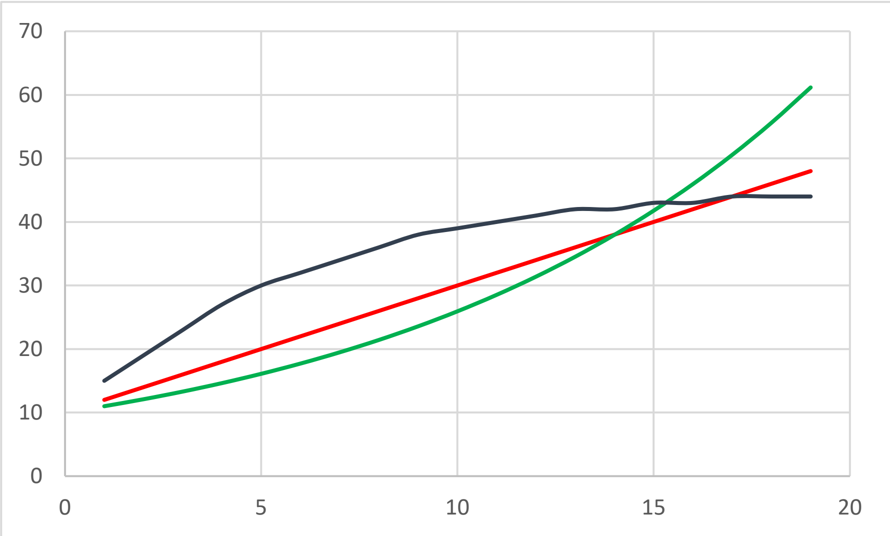
Professor: Eu poderia estar disposto a esperar um tempo maior para ter esse aumento de clientes? (*Guiar/apoiar*).

A2: Depende bastante da disponibilidade da tua empresa. Porque, dependendo se você estiver no vermelho, você precisa de um aumento de clientes muito rápido, mas se você estiver tranquilo e eles tiveram a oportunidade de esperar um pouco mais por mais clientes, por que não?

Neste trecho, observa-se que as ações do professor estão centradas em três categorias: *convidar, guiar/apoiar e desafiar*. A categoria *convidar* ocorreu quando o professor, chamou a turma para compartilhar como pensaram e resolveram a tarefa apresentada. Em determinados trechos, o professor fez perguntas com o intuito de incentivar a explicação da resolução da tarefa, ações da categoria *guiar/apoiar*. Essas ações têm, por objetivo, possibilitar que os estudantes explicitem e detalhem o modo como pensaram, sem a intenção, nesse momento, de julgar se a estratégia estava ou não correta. Ações da categoria *desafiar* mostram que o professor encorajou os alunos à reflexão, solicitando que elaborassem algumas conjecturas frente ao que era solicitado na tarefa.

A discussão prosseguiu, com a intenção de levar a turma a associar essas informações acerca da taxa de crescimento das funções que representam o número de clientes das três empresas em relação ao tempo, com suas representações gráficas (que são apresentadas em um mesmo plano cartesiano, com três cores diferentes conforme solução de um dos grupos, que estava projetado para toda turma - Figura 5).

Figura 5 – Representação simultânea do número de clientes das empresas, em relação ao tempo.



Fonte: Trevisan e Volpato (2022, p. 9).

Professor: Vamos tentar explorar um pouco mais esses gráficos[3] aqui. Como é que vocês reconheceriam a qual empresa que se refere cada gráfico? Como é que eu sei qual gráfico que é da empresa um [vermelho]? Da empresa dois [verde]? E da empresa três [azul]? Por que é que eu sei que o gráfico azul é da empresa 3? (*Desafiar*).

A6: Crescimento decrescente.

Professor: Crescimento decrescente está relacionado com o que naquele gráfico? (*Guiar/apoiar*).

A7: No começo ele tem o melhor ganho de clientes.

Professor: O que o gráfico azul tem de diferente do gráfico verde, por exemplo? (*Guiar/apoiar*).

A6: Tem que formar uma linha horizontal acho.

Professor: E essa linha horizontal está relacionada com o quê? (*Guiar/apoiar*).

A7: Estagnação de crescimento.

Professor: Eu tenho um crescimento cada vez menor, e quando chega lá nos últimos meses que ele me forneceu esse crescimento não é expressivo. (*Informar/sugerir*). E esse gráfico verde não tem esse tipo de comportamento? (*Guiar/apoiar*).

A6: Porque é contrário, quanto maior tempo mais a linha tende a ficar vertical.

Professor: Tenta explicar a ideia que a gente está entendendo por estar ficando vertical (*Guiar/apoiar*).

A7: Crescimento máximo.

Professor: Crescimento máximo. Vocês diriam que essas representações que eu tenho aqui são situações de crescimento ou decrescimento? (*Guiar/apoiar*).

A7: Crescimento.

Professor: E esse crescimento ocorre da mesma maneira nas três empresas? (*Guiar/apoiar*).

A6: Não.

Professor: Então quer dizer que, não basta falar que está crescendo, quer dizer tem que olhar o modo como ela está crescendo (*Informar/sugerir*).

A discussão, no início desse trecho, teve, como foco, levar a turma a conjecturar qual gráfico representa cada uma das empresas e informar as justificativas com ações da categoria *desafiar*. Ao longo desse trecho de discussão, em diversos momentos, o professor reelaborou conjecturas e justificativas apresentadas pelos estudantes, no intuito de complementá-las com explicações mais precisas ou buscando utilizar termos mais adequados, ações essas da categoria *informar/sugerir*. Há, também, momentos em que sua fala teve, por objetivo, *guiar/apoiar*, conduzindo o pensamento do estudante e focalizando a discussão para fatos importantes. Em um desses momentos, há uma hipótese de A2 de que o gráfico que representa o número de clientes da empresa cujo crescimento é exponencial “vai ficar vertical”.

O professor aproveitou o contexto da discussão e explorou com a turma a ideia de concavidade da curva que representa graficamente a função, procurando associá-la ao tipo de crescimento do número de clientes de cada empresa (crescente, decrescente ou constante), e antecipando a relação dessa discussão com o estudo futuro de derivadas.

Tarefa 4

Selecionamos um dos trechos de análise da discussão ocorrida em quatro dos grupos analisados por Negrini (2022). Antes, o grupo havia usado exemplos (valores de concentração para tempos específicos) e assumiu como válida a conjectura de que a concentração da mistura, a longo prazo, aproxima-se do valor 30 gramas por litro. Elabora, então, uma justificativa por casos particulares, utilizando diferentes valores de tempo e chegando a uma generalização.

A1: Tá, vamos fazer esse processo aqui de novo... 5000 litros.

A2: Tá, aqui é minuto 0 né?

A3: Será que vai usar 30 gramas por litro de concentração?

A1: Esse valor aqui ele vai variar, o 5000 é constante.

A2: É, o 5000 tem que ter na função.

A3: E se fosse o $\frac{25}{750}.\,0{,}3x$?

A1: Pensa bem, sempre tá aumentando 25 de um para outro.

A3: Certo.

A1: Então vai ser $5000 + 25$, esse 25 tenho quase certeza que ele existe, vezes o tempo. Não! Calma.

A3: Acho que vai ser assim, $\left(5000 + \frac{25}{750}\right).\,0{,}3$, por que é concentração?

A2: Não! A concentração não vai mudar.

A1: 25 vezes o tempo. Então, $t = 1$, temos 5025. Beleza. Isso a gente achou, agora a gente tem que achar uma fórmula para aplicar na concentração. Será que eu divido alguma coisa?

A3: Mais 750t?

A1: Agora como que a gente achou essa concentração. Essa concentração de 30 gramas por litro?

A3: E se colocar mais $750t$? Não dá certo?

A1: Não, vai ficar um número muito grande daí.

A3: Ou dividir tudo por $750t$?

A1: Também não.

A3: Não dá também.

A1: Quer ver $\frac{5000+25}{750}$, não! Não é. Pensa 30 gramas por litro, isso aqui é a quantidade de água... será que é tudo isso?

A3: Acho que alguma hora a gente vai ter que dividir na função. Agora pelo o quê?

A2: Porque, aqui a gente tá dividindo, né? Então eu acho que na função vai ter que dividir.

A3: Como que chegou no limite?

A1: A gente pegou 5025, e o que a gente fez? No minuto 1 a gente tem 5025 litros.

A2: A gente tá dividindo gramas por litro, então a gente tem que trocar aqui [apontando para fórmula]. O $750x$ pra cá, é só trocar aqui, olha. Eu acho que só inverter já vai dar.

A1: É exatamente isso cara.

A2: Só que eu não sei se está certo expressar assim.

A1: Ta certinho, $\frac{750x}{25x+5000}$.

Vai fazendo a prova real aí, conforme for fazendo a prova real você vai encontrando os valores.

O grupo busca uma expressão algébrica para função. Se, por um lado, um dos estudantes apresenta algumas conjecturas aparentemente aleatórias, tentando encontrar uma fórmula "que dê certo", outro estudante sugere refazer os cálculos, para valores particulares de tempo, buscando reconhecer algum tipo de padrão.

Ao longo de parte da discussão, o grupo assume como válida a conjectura de que a concentração, a longo prazo, aproxima-se do valor 30 g/L e tenta incorporar esse valor em sua expressão algébrica. São capazes de representar, de forma independente, com funções do tempo, tanto a quantidade de sal (750 vezes o tempo) quanto a quantidade de água (25 vezes o tempo, mais 5000).

Explicitam a conjectura de que, para expressar algebricamente a generalização encontrada a partir de valores numéricos, será necessário realizar uma divisão. Novos ajustes são realizados na fórmula até que os estudantes terminam por justificá-la, lançando mão de um procedimento que denominam "prova real" (no caso, confrontando valores de concentração calculados pela fórmula, como aqueles que registrados anteriormente em uma tabela, para valores particulares de tempo).

No início da discussão coletiva, o professor convida os alunos a participarem, e o estudante A1 compartilha, então, o modo como haviam pensado. O trecho a seguir é o início dessa discussão.

Professor: Então vamos lá, vamos explorar um pouco essa situação... alguma equipe queira sintetizar o que pensou? (*Convidar*).

A1: A gente quer. Primeiro a gente avaliou como variava a quantidade de sal e a quantidade de litro de água. Aí a gente fez uma tabelinha e depois uma fórmula que sintetizasse a tabelinha.

Professor: E para chegar a essa tabela, vocês fizeram que tipo de cálculo? (*Guiar/apoiar*).

A1: De concentração.

Professor: O que a gente está entendendo como concentração, à propósito? (*Guiar/apoiar*).

A1: Quantidade de sal em água.

Professor: Certo, a gente está pensando com concentração aqui como uma relação que é dada por uma divisão (*Informar/sugerir*). Qual? (*Guiar/apoiar*).

A1: A fórmula que a gente fez é a concentração igual a 750 vezes o t [referindo-se ao tempo], porque no $t = 1$ vai ter 750g de sal. No $t = 2$, vai ter 1500. Dividido pelo volume, que vai ser os 5000 fixo mais 25 vezes o t.

Professor: Então deixa eu colocar essa fórmula [anota na lousa] (*Informar/sugerir*): $C = \frac{750t}{5000+25t}$.

A1: Daí a gente pensou, quando o tempo for muito, muito, muito grande, os 5000 vai se tornar nada praticamente, então significa que a concentração máxima que vai chegar vai ser 750 dividido por 25, que vai ser o limite, que vai dar 30.

Professor: Então vocês concluem o quê? (*Guiar/apoiar*).

A1: Que a concentração, concentração não vai passar de 30.

Professor: a concentração não vai passar de 30. Quando a gente pensa que a concentração não vai passar de 30, de algum modo ela está se aproximando desse 30 (*Informar/sugerir*).

Neste trecho, observa-se que as ações do professor podem se enquadrar em três categorias: *convidar*, *guiar/apoiar* e *informar/sugerir*. Como podemos observar, a categoria *convidar* ocorre quando o professor chama alguma equipe para relatar aos colegas como pensou para resolver a tarefa e solicita que eles expliquem o que fizeram, compartilhando seu raciocínio com os demais alunos da classe. Em alguns momentos, o professor faz perguntas com a finalidade de obter respostas para determinadas questões. Tais ações visam chamar atenção para alguns aspectos da resolução da tarefa, conduzindo o pensamento do aluno de modo a esclarecer o seu raciocínio, enquadrando-se na categoria *guiar/apoiar*. Tal ação também é reconhecida quando o professor pede ao aluno que explicite a relação que utilizou para expressão da concentração, guiando-o a elaborar alguma conclusão a partir do seu relato, e afirma que “a concentração não vai passar de 30”.

Algumas ações do professor nesse trecho podem ser classificadas como *informar/sugerir*. Por exemplo, quando o professor fornece uma pista aos alunos, enfatizando que a fórmula da concentração envolve uma divisão e, em seguida, orienta o aluno para que possa expressar a fórmula de concentração por ele encontrada. Também, o professor anota na lousa a fórmula $C = \frac{750t}{5000+25t}$.

Assim, confirmando/valida a resolução do aluno e compartilhando-a com a turma toda. Por fim, o professor rediz a resposta do aluno (“a concentração não vai passar de 30”), validando a afirmação que a concentração está se aproximando de 30.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo discute possibilidades para a promoção do raciocínio matemático em aulas de CDI a partir do trabalho com algumas tarefas de natureza exploratória. Mais especificamente: (i) reconhecendo conceitos matemáticos mobilizados pelos estudantes na elaboração de argumentos que buscam justificar suas resoluções; (ii) discutindo os processos de raciocínio matemático que estudantes mobilizam; (iii) compreendendo ações do professor podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

No que tange aos conceitos do CDI usados na elaboração de argumentos e justificativas, destacamos a direção de crescimento das funções $f(x)$ e $h(x)$; porém, o grupo não deixou evidente o reconhecimento da existência de uma assíntota horizontal na curva que representa graficamente $f(x)$. O grupo analisou, também, as variações independentes nos valores da variável x e da variável y, procurando reconhecer algum tipo de padrão nessas variações (sem, contudo, realizar o cálculo dessas taxas), sem estabelecer uma relação com a concavidade do gráfico das funções. Embora os argumentos apresentados não contemplassem todos os aspectos desejados pelo professor, a tarefa mobilizou nos estudantes a necessidade de elaborar argumentos para explicar as variações observadas nas tabelas e, para isso, mobilizaram os processos de raciocínio de identificar padrão e comparar. Na sequência, fizeram tentativas de validação, apresentando justificativas (a partir de seus conhecimentos matemáticos) que apoiassem suas explicações conforme defendem Lannin, Ellis e Elliot (2011).

Acerca dos processos do raciocínio mobilizados, o grupo que resolveu a tarefa 2, elaborou uma primeira conjectura com base no esboço de uma representação gráfica. Os alunos tentaram então validar essa conjectura, identificando relações que permitem entender porque uma afirmação era verdadeira ou falsa (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019). A partir de novas relações entre os conhecimentos matemáticos, que remetem ao formato da garrafa, a sua altura e ao seu diâmetro, procuram validar essa conjectura.

Quanto a tarefa 4, o grupo inicialmente usou exemplos particulares que serviram para investigar estruturas matemáticas ou pensar sobre justificações, mesmo que não sejam suficientes para tanto (LANNIN; ELLIS; ELLIOT, 2011). Reformulou conjecturas buscando uma expressão algébrica que generalizasse o que haviam percebido. O processo de generalização teve, como finalidade, chegar a conclusões válidas estabelecendo uma relação, aplicando em diferentes objetos matemáticos e transferindo essa relação para um conjunto maior (JEANNOTTE; KIERAN, 2017).

Ao final da discussão, o grupo obtém, com sucesso, e é capaz de validar uma expressão algébrica para a função que relaciona a concentração e o tempo. As discussões possibilitaram aos estudantes estender, para situações mais gerais, regularidades observadas em casos particulares (generalizar) – como, por exemplo, a variação da quantidade de água e da quantidade de sal como funções do tempo e, de forma mais geral, a concentração.

Acerca das ações do professor que podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático, a partir da análise de um trecho de discussão coletiva da tarefa 3 e outra da tarefa 4, nota-se que seu início tem origem na ação de *convidar*, na qual os alunos são solicitados a relatar aos demais como resolveram a tarefa. Posteriormente a isso, podemos observar as ações de *guiar/apoiar* que, segundo Ellis, Özgür e Reiten (2018), são ações que apresentam uma elevada capacidade para o progresso do raciocínio dos alunos, uma vez que o objetivo dos questionamentos, bem como o seu encadeamento, contribui para a generalização e justificação de ideias matemáticas.

Na categoria *informar/sugerir*, as ações se desenvolvem para validar as respostas corretas e trazendo informações, nomenclaturas e conceitos que são novos. Por fim, ações da categoria *desafiar* tornam-se mais presentes nos momentos em que o professor procurou aprofundar justificativas de fatos trazidos pelos estudantes, sendo as que apresentam maior potencial para o desenvolvimento de processos de raciocínio mais sofisticados como generalizar e justificar (ARAMAN; SERRAZINA; PONTE, 2019).

Uma das limitações decorrentes do estudo é que, em alguns momentos, o professor parte apressadamente para informar os estudantes em lugar de convidá-los a reelaborar e/ou explicar o que fizeram na resolução da tarefa, aspecto que compromete o desenvolvimento do raciocínio matemático, podendo também refletir um baixo número de alunos que participaram da discussão.

MATHEMATICAL REASONING IN DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS CLASSES: AN ANALYSIS FROM EXPLORATORY TASKS

ABSTRACT

This paper synthesizes the results of studies that discuss possibilities for the development of mathematical reasoning in Differential and Integral Calculus classes, based on exploratory tasks. This is a qualitative, interpretative research, with data collected in the context of classes of this subject, composed of (a) protocols containing written records of the responsibilities of small groups of students and (b) audios of these tasks, and (c) video of the collective discussion mediated by the teacher from the students' resolutions. Among the results, we present which mathematical concepts were mobilized by students in the elaboration of arguments that seek to justify their solutions in one of the tasks; we list the mathematical reasoning processes that students mobilize in a second task, with emphasis on conjecture and justification; and we recognize the teacher's actions that contributed to the development of mathematical reasoning in the discussion of a third task.

KEYWORDS: Mathematics teaching. Differential and Integral Calculus teaching. Mathematical Reasoning. Exploratory tasks.

NOTAS

1. GEPEAM – Grupo de Estudo e Pesquisa em Ensino e Aprendizagem de Matemática (UTFPR – campus Londrina).

2. “Competências são formadas por conhecimento dos conteúdos, adicionados de habilidades de uso deste conhecimento e de atitudes ao fazê-lo” (ABENGE, 2021, p. 21).

3. A palavra “gráfico”, nos trechos transcritos, refere-se às curvas que representam graficamente o número de clientes das empresas, em relação ao tempo.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Fundação Araucária e ao CNPq pelo apoio à pesquisa.

REFERÊNCIAS

ABENGE. Associação Brasileira de Educação em Engenharia. **Comissão Nacional para Implantação das Novas Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (CN-DCNs)**, 2022. Disponível em: http://www.abenge.org.br/file/RelatorioSintese%20_CN-DCNs_final.pdf. Acesso em: 30 ago. 2021.

ARAMAN, E. M. O., SERRAZINA, M. L., PONTE, J. P. “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 2, n. 2, p. 466-490, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/42505. Acesso em: 04 nov. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Resolução no 2, de 24 de abril de 2019. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**, Brasília, Brasil. Edição 89. Seção 1, p. 43, 2019. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/docman/abril-2019-pdf. Acesso em: 04 nov. 2022.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Alegre: Porto Editora, 1994.

CABRAL, T. C. B. Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, p. 208-245, 2015. Disponível em: https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1397. Acesso em: 04 nov. 2022.

CARLSEN, M. Upper secondary students' mathematical reasoning on a sinusoidal function. **Educational Studies in Mathematics**, v. 99, p. 277–291, 2018. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9844-1. Acesso em: 04 nov. 2022.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. S.; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 4, p. 50-61, 2017. Disponível em: https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1493. Acesso em: 04 nov. 2022.

ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, v. 30, n. 2, p. 1-26, jun. 2018. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s13394-018-0246-6. Acesso em: 04 nov. 2022.

FONSECA, M. O. S. **Proposta de tarefas para um estudo inicial de derivadas**. 2017. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina-PR, 2017. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/2499/1/LD_PPGMAT_M_Fonseca%2C%20Maycon%20Odailson%20dos%20Santos%20da_2017.pdf. Acesso em: 04 nov. 2022.

GHEDAMSI, I.; LECORRE, T. Transition from high school to university calculus: a study of connection. **ZDM – Mathematics Education**, v. 53, p. 563–575, 2021. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-021-01262-1. Acesso em: 04 nov. 2022.

GRANBERG, C.; OLSSON, J. ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 37, p. 48–62, 2015. Disponível em: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312314000728. Acesso em: 04 nov. 2022.

GUIMARÃES, G. Novas tendências de aprendizagem em engenharia: O aluno como protagonista na produção do conteúdo curricular na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 38, n. 1, p. 81-91, 2019. Disponível em: http://revista.educacao.ws/revista/index.php/abenge/article/view/1498. Acesso em: 04 nov. 2022.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Utrecht, v. 96, n. 1, p.

1-16, 2017. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-017-9761-8. Acesso em: 04 nov. 2022.

LANNIN, J.; ELLIS, A. B.; ELLIOT, R. **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

LITHNER. J. A research framework for creative and imitative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 255–276, 2008. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-007-9104-2. Acesso em: 04 nov. 2022.

LITHNER. J. Principles for designing mathematical tasks that enhance imitative and creative reasoning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 67, n. 3, p. 937-949, 2017. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-017-0867-3. Acesso em: 04 nov. 2022.

NEGRINI, M. V. **Processos do raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo Diferencial e Integral em tarefas exploratórias**. 2022. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29810. Acesso em: 04 nov. 2022.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular**. Lisboa: APM, 2005, p. 11-34.

PONTE, J. P.; MATA-PEREIRA, J.; QUARESMA, M. Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, vol. XXII, n. 2, p. 55-81, 2013. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/29810. Acesso em: 04 nov. 2022.

RAMOS, N. S. **Sequências numéricas como desencadeadoras do conceito de convergência**: episódio de resolução de tarefas, 2017. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina-PR., 2017. Disponível em: http://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UTFPR-12_e1ac978708ab24c51f3b3c3f8bcf845a. Acesso em: 04 nov. 2022.

RIBEIRO, A. J.; AGUIAR, M.; TREVISAN, A. L.; ELIAS, H. R. How teachers deal with students mathematical reasoning when promoting whole-class discussion during the teaching of algebra. In: SPINILLO A.G.; LAUTERT S.L.; BORBA, R.E.S.R. (Org.). **Mathematical Reasoning of Children and Adults**. 1ed.: Springer International Publishing, 2021, v. 1, p. 239-264.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. **Bolema**, Rio Claro, v. 12, n. 61, p. 398-418, 2018. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/vKJjLJycccFdLGb9nsx4gdP/?lang=pt&format=pdf. Acesso em: 04 nov. 2022.

THOMPSON, P. W.; HAREL, G. Ideas foundational to calculus learning and their links to students' difficulties. **ZDM – Mathematics Education**, v. 53, p. 507–519, 2021. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-021-01270-1. Acesso em: 04 nov. 2022.

TREVISAN, A. L.; ALVES, R. M. A.; NEGRINI, M. V. Ambiente de ensino e de aprendizagem de Cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas: resultados e perspectivas futuras. In: MENDES, M. T.; JUSTULIN, A. M. (Org.). **Produtos educacionais e resultados de pesquisas em Educação Matemática**. 1ed. São Paulo: Livraria da Física, 2021, v. 1, p. 155-174.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Argumentos Apresentados por Estudantes de Cálculo em uma Tarefa de Natureza Exploratória. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 23, p. 591-612, 2021a. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/51922. Acesso em: 04 nov. 2022.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. **Bolema**, v. 35, p. 158-178, 2021b. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/zpcnfZTGbHWvbJq8vKm4MBj. Acesso em: 04 nov. 2022.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Integral antes de derivada? Derivada antes de integral? Limite, no final? Uma proposta para organizar um curso de Cálculo Integral. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 19, n. 3, p. 353-373, 2017. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/33318. Acesso em: 04 nov. 2022.

TREVISAN; A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, n. 1, p. 209-227, 2018. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/5702. Acesso em: 04 nov. 2022.

TREVISAN, A. L.; VOLPATO, M. A. Discussões matemáticas em aulas de Cálculo e as ações do professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, v.15, n. 37, p.1-21, 2022. Disponível em:

https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/13425. Acesso em: 04 nov. 2022.

WHITE, N.; MESA, V. Describing cognitive orientation of Calculus I tasks across different types of coursework. **ZDM Mathematics Education**, v. 46, n. 675–690, 2014. Disponível em: https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-014-0588-9. Acesso em: 04 nov. 2022.

ZARPELON, E.; RESENDE, L. M.; REIS, E. Análise do desempenho de alunos ingressantes de Engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. **Interfaces da Educação**, v. 8, n.22, 303-335, 2017. Disponível em: https://periodicosonline.uems.br/index.php/interfaces/article/view/1416. Acesso em: 04 nov. 2022.

Recebido: 27 jun. 2022.
Aprovado: 16 nov. 2022.
DOI: 10.3895/rbect.v15n3.15667
Como citar: TREVISAN, A. L. Raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral: Uma análise a partir de tarefas exploratórias. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, Edição Especial, p. 1-23, dez. 2022. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/15667>. Acesso em: XXX.
Correspondência: André Luis Trevisan - andrelt@utfpr.edu.br