

Visualizando formas geométricas em arbustos

RESUMO

José Carlos Pinto Leivas
leivasjc@yahoo.com.br
[0000-0001-6876-1461](https://doi.org/10.1000-0001-6876-1461)
Universidade Franciscana, Santa Maria,
Rio Grande do Sul, Brasil.

Neste artigo, apresenta-se uma pesquisa qualitativa, a qual teve o objetivo de analisar como dois grupos distintos visualizavam formas geométricas constantes em registros figurais de arbustos encontrados no ambiente urbano de uma cidade da região metropolitana da capital gaúcha. Constam, desta análise, duas das seis imagens investigadas, as quais se aproximam de um parabolóide e de um toro. O primeiro grupo teve 29 participantes de uma oficina ministrada pelo autor em um evento internacional realizado na Colômbia, com estudantes e/ou professores de várias nacionalidades e níveis de formação. O segundo grupo, com 14 participantes, todos brasileiros e membros de um grupo de estudos e pesquisas liderado pelo autor. Os resultados mostraram limitações dos participantes em visualizarem formas geométricas, especialmente, as espaciais. Grande parte deles identificou mais objetos geométricos planos do que propriamente as duas formas geométricas espaciais e, poucos, identificaram o parabolóide e o toro.

PALAVRAS-CHAVE: Parabolóide. Toro. Percepção visual. Ambiente urbano.

INTRODUÇÃO

Este artigo consta de uma versão ampliada do trabalho apresentado no VIII SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Analisa-se resultados de pesquisas do autor a respeito de formação de pensamento geométrico, particularmente envolvendo habilidades como criatividade e imaginação, além de percepção visual.

Desde Euclides, a geometria desperta para as necessidades do homem no seu dia-a-dia, como as medições de terras, avançando para outros campos, tais como a geometria analítica, com Descartes, e mesmo a criação de geometrias não euclidianas. Estas últimas vieram a contribuir para o bom viver dos indivíduos, ou seja, nas navegações aéreas, por exemplo, tem-se a elíptica, na qual as retas não mais apresentam o mesmo significado do estabelecido por Euclides. Nessa geometria, uma reta é visualizada em sua representação figural por circunferências sobre a superfície de uma esfera.

A ruptura no pensar exclusivamente euclidiano levou à visualização de triângulos cuja soma das medidas dos ângulos internos é maior do que 180° (geometria elíptica ou esférica) ou menor do que isso (geometria hiperbólica). Também, na primeira, percebe-se a existência de triângulos com três ângulos internos retos e a noção de biângulo. Enganam-se aqueles que imaginam a existência apenas dessas geometrias, pois muitas outras foram surgindo com o avançar dos tempos: topológica, fractal, do táxi, finitas etc.

Piaget e Inhelder (1993), no que diz respeito à intuição das formas em geometria, indicam que, por volta de 3,6 a 4 anos de idade, ocorre o início da abstração das formas. Para eles, “[...] curiosamente, as primeiras formas reconhecidas não são euclidianas, mas topológicas [...]” (p. 36). Ao disponibilizar, para a criança, objetos em forma circular ou quadrada, torna-se importante sua exploração tátil, por exemplo, ao contornar o objeto, o que lhe permite identificar diferenças entre ambos. Somente após iniciar a abstração das formas, deixando de tocar o objeto, é que o indivíduo consegue partir para as relações euclidianas. Afirmam os autores a importância de “[...] saber em que consiste a abstração das formas e por que as formas topológicas são psicologicamente mais simples do que as formas euclidianas” (p. 37).

De forma similar, poder-se-ia trazer ao mundo real ou concreto o conceito de distância, ou seja, como o deslocamento é realizado em cidades urbanizadas em quadras (‘quadrados’) bem definidas. Nesse sentido, não se faz presente a concepção dos alunos (em vários níveis de escolaridade, inclusive superior ou, até mesmo, entre professores de matemática) de que o caminho mais curto entre dois pontos é representado por um segmento de linha reta (‘a diagonal deste quadrado’). Na geometria do táxi, por exemplo, a distância entre dois pontos opostos em uma quadra é dada pela soma de duas distâncias (a dos dois catetos que, juntamente com a diagonal, formam um triângulo retângulo). Entende-se que essa é uma situação bem mais condizente com os dias de hoje do que a velha medição de terras com a invasão do Nilo, como consta nos livros de história.

Perceber geometria no mundo, isto é, como a geometria formal pode ser visualizada em construções, ornamentações, natureza, é uma boa maneira de analisar se seu ensino não fica somente no uso de fórmulas e na reprodução de teoremas e definições. A partir dessas considerações preliminares, justifica-se o

presente artigo, que tem a finalidade de associar formas geométricas a arbustos ornamentais observados pelo autor do artigo em ambiente urbano (LEIVAS, 2021).

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Um estudo sobre criatividade em educação matemática é apresentado por Meissner (2015), o qual indica processos mentais na busca de promover pensamento criativo, ou seja, alude à necessidade de envolver, na sala de aula, problemas desafiadores e suas respectivas naturezas. Para o autor, as atividades propostas e desenvolvidas devem integrar, de modo natural, ideias espontâneas dos indivíduos, as quais podem ser inconscientes e intuitivas no que diz respeito ao conhecimento (conhecido ou a conhecer).

A respeito do ensinar matemática, Kandemir e Gür (2007) indicam que, na Turquia, similarmente ao que ocorre no Brasil, professores do Ensino Médio preferem ensinar a resolução de problemas por meio de abordagens algorítmicas a utilizar métodos de ensino novos. Afirmam eles acreditarem que “praticar exemplos dessa maneira é a melhor preparação para o ingresso na universidade” (p. 111). Antes de realizarem um curso com um grupo de professores em um projeto de pesquisa a respeito da visão dos discentes sobre **treinamento de criatividade**, os autores apresentaram vinte e duas técnicas diferentes de criatividade. Destaca-se, aqui, algumas delas: a) *Brainstorming*; b) Pausa criativa; c) Intercâmbio criativo; d) Imaginação.

Julgou-se importante destacar essas técnicas pelos motivos a seguir.

- *Brainstorming* por estimular o debate entre os componentes de um grupo a respeito de um dado tema/problema, a exemplo do que ocorre com a primeira etapa da resolução de problemas oriunda de Polya (2006). Na sequência, também pela tentativa de recorrer à criatividade para a resolução de problemas.
- Pausa criativa por estar diretamente ligada à psicologia e, por já ter sido destacada por Poincaré no que diz respeito à criação matemática. Assim, possibilita ao professor e ao grupo um sentimento colaborativo.
- Intercâmbio criativo por abordar o intercâmbio de ideias criativas entre indivíduos ou grupos.
- Imaginação por considerar o planejamento para a resolução de um problema.

Tais aspectos são destacados, aqui, em razão de virem ao encontro dos interesses de pesquisa do autor deste artigo quanto à imaginação, intuição, visualização e criatividade.

Ao tratar sobre ciência e lógica sob o olhar de alguns educadores matemáticos em distintas épocas, Poincaré (1969) resgata concepções sobre o intuicionismo. Para ele, não são as mentes que mudaram, e sim as ideias intuitivas. O pensador questiona: “Qual é a causa dessa evolução?”. Para ele, “A intuição não pode nos dar rigor, nem mesmo certeza, isso tem sido cada vez mais reconhecido” (p. 207, tradução livre). O autor cita muitas situações que ocorreram ao longo da história, como foi o caso de que toda função contínua tem derivada e que, posteriormente,

percebeu-se não ocorrer como nos pontos cuspidais, como pode ser visualizado em Leivas (2021).

Nos seus Fundamentos da Geometria, Hilbert (2003) reitera a seguinte ideia:

A Matemática evolui, em certo sentido, para a conversão num tribunal arbitral, um tribunal de última instância que decidirá questões de princípios – e em bases concretas tais, que o acordo universal é alcançável e todas as asserções podem ser verificadas.

Também as asserções da recente doutrina denominada <<intuicionismo>>, ainda que modestas, podem, na minha opinião, obter o seu certificado de justificação somente por via deste tribunal. (HILBERT, 2003, p. 254).

Entende-se que tal tribunal consiste em disponibilizar para a comunidade científica os ‘achados’ em uma pesquisa, como as que se está realizando de visualizar intuitivamente e criativamente formas geométricas encontradas em ambientes urbanos e certificá-las por meio de Geometria Dinâmica de modo a confrontá-las com os conceitos formais (LEIVAS, 2014, LEIVAS, 2021).

Para Fischbein (1987), a intuição pode ser definida como:

[...] uma ideia que possui as duas propriedades fundamentais de uma realidade concreta, dada objetivamente; imediatez, isto é, evidência intrínseca e certeza, não certeza formal convencional, mas praticamente significativa, certeza imanente (p. 21).

De acordo com Davis e Hersh (1995), a intuição tem os seguintes significados: 1) é o oposto de rigoroso, embora não seja, como tal, muito precisa; 2) é visual; 3) é plausível ou convincente na ausência de demonstrações; 4) significa incompleto, na medida em que se complementa pela lógica da demonstração; 5) apoia-se em um modelo físico ou em exemplos importantes, ou seja, quase heurístico; 6) significa unificado ou integrado em oposição a detalhado ou analítico.

Contribuindo com o sentido visual da intuição, o autor do presente artigo considera a habilidade de visualização importante para o desenvolvimento de pensamento geométrico e acredita que a mesma não é nata, mas pode ser desenvolvida no transcurso de toda a formação do indivíduo. Para Leivas (2009, p. 111) “visualização é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos”. Para a construção desse conceito, o autor o associa à imaginação e à criatividade.

Julga-se oportuno estabelecer conexões entre as habilidades supracitadas, especialmente no que diz respeito à representação do espaço, ou seja, buscar conexões da intuição geométrica (o que o indivíduo percebe no ambiente ao seu redor) e para onde a imaginação o conduz no âmbito formal, no caso, a formas geométricas. De acordo com Piaget e Inhelder (1993, p. 467), “Ora, é certo que a intuição espacial recorre em parte aos sentidos e à **imaginação** [...]” (grifo do autor). Por exemplo, o que é um ponto ou uma reta na geometria plana ou na esférica ou mesmo na do táxi, senão apelar para a intuição e para a imaginação. É necessário que a criatividade seja evocada ao professor para abordar essas temáticas geométricas, a fim de que o indivíduo possa imaginar, por exemplo, uma circunferência representada por um quadrado quando a métrica utilizada é a do táxi (uma bola quadrada) (LEIVAS, 2014).

Hadamard (2009, p.114) faz o seguinte questionamento: “A imagística¹ pode ser educada?” ao discorrer sobre a obra de Ticheber. Para além da linguagem verbal, indica a importância de imagens visuais no pensamento, obviamente aliadas a imagens auditivas e musicais. Também, de acordo com o autor, a imagística visual “está sempre à minha disposição e posso moldar e dirigir à vontade”. Em seguida, complementa Hadamard (2009), “Quando leio qualquer livro, arrumo instintivamente os fatos ou os argumentos de acordo com um modelo visual e tenho tantas possibilidades de pensar em termos desse modelo como tenho de pensar com palavras” (p. 114).

Portanto, explorar a imaginação visual parece ser um bom indicativo para apreciar a geometria envolvida ao redor do indivíduo, uma vez que os processos mentais são aflorados (intuição, criatividade) para a formalização, pela linguagem geométrica, de conceitos geométricos como os de algumas superfícies, aliados com os recursos de *softwares* de Geometria Dinâmica.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O presente artigo tem por base o trabalho apresentado durante o VIII SIPEM. De acordo com Moreira (2011), a metodologia da pesquisa em ciências tem como um de seus paradigmas ser “[...] derivada da área humanística com ênfase em informações holísticas e qualitativas e em abordagens interpretativas” (p.74). Por tratar-se de analisar como indivíduos interpretam imagens, fotografadas pelo pesquisador, de alguns arbustos localizados em ambiente urbano, conectando-as a formas geométricas espaciais, entende-se tratar-se de uma abordagem qualitativa interpretativa. Além disso, afirma o autor que “o interesse dessa pesquisa está em uma interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações em uma realidade” (Idem, p. 76).

Partindo dessas considerações sobre a pesquisa qualitativa, o pesquisador apresentou imagens de arbustos que ornamentam calçadas e canteiros em uma cidade urbanizada. Ao olhar do mesmo, tais imagens se configuravam como representações de formas geométricas como paráboloide, elipsoide, cone, toro, etc.

No que diz respeito à coleta de dados, estes,

[...] devem ser coletados e registrados com o necessário rigor e seguindo todos os procedimentos da pesquisa de campo. Devem ser trabalhados, mediante análise rigorosa, e apresentados em relatórios qualificados (SEVERINO, 2016, p. 128).

Nessa direção, para um rigor na aproximação da imagem visualizada com a geométrica, foi utilizado o GeoGebra, de modo que, ao inserir a imagem no *software*, foi possível encontrar tal ligação. O efeito dessa utilização pode permitir a futuros professores que, junto a seus estudantes, desenvolvam habilidades visuais, ou seja, um pensar geometricamente.

Ao oferecer um minicurso em um evento internacional em fevereiro de 2021, o pesquisador apresentou um *Google Forms* com imagens fotografadas pelo mesmo, associando-as a formas geométricas e os participantes deveriam justificar suas escolhas e, assim, tornar possível a análise das respostas, que foram enquadradas em duas categorias: figuras planas e figuras espaciais. Ao todo, vinte

e nove participantes responderam o questionário, os quais serão denominados por PC₁, PC₂,..., PC₂₉. Dentre os participantes, havia estudantes de graduação, especialização, mestrado, doutorado e professores em atuação de dezoito instituições de diversas nacionalidades.

Em um segundo momento, o mesmo questionário foi aplicado ao grupo de estudos liderado pelo autor do artigo. Participaram quatorze indivíduos, desde estudantes de graduação a doutores de diversas instituições e estados brasileiros. Os participantes desse segundo grupo foram designados por PB₁, PB₂, ..., PB₁₄.

Destacamos o fato que, para a análise do respondente, foi solicitado um codinome, uma vez que se pedia alguns dados pessoais, tais como formação, instituição etc.

Para o questionário, foram selecionadas seis imagens aleatoriamente coletadas pelo pesquisador durante suas caminhadas matinais, durante o período de pandemia da COVID-19, na região metropolitana da capital do RS. Escolheu-se, para o presente artigo, duas delas. Salienta-se que: “[...] imagem, com ou sem acompanhamento de som, oferecem um registro restrito, mas poderoso das ações temporais e dos acontecimentos reais – concretos, materiais” (LOIZOS, 2015, p. 137). O autor ainda reforça o fato que a pesquisa social “[...] pode empregar, como dados primários, informação visual [...]”. Como havia interesse na visualização de formas geométricas específicas, descartou-se imagens sonoras. Portanto, as habilidades discutidas na fundamentação teórica são bem postas, pois o objetivo da pesquisa foi analisar como indivíduos visualizam formas geométricas encontradas em arbustos em ambiente urbano e as associam a formas geométricas espaciais.

Cada questão apresentava uma figura e, abaixo dela, o enunciado. O participante deveria escolher e indicar se visualizava alguma forma geométrica sobre as fotos de arbustos apresentados (sim ou não), bem como justificar e nomear a figura geométrica percebida. Destaca-se o fato de que o minicurso foi aplicado em um país de língua espanhola e, portanto, o enunciado foi apresentado na língua do país.

“Abajo de la imagen, indica si percibes alguna forma geométrica. En caso afirmativo, identifica el nombre de la forma. Si posible, justifica brevemente tu respuesta”.

Figura 1 – Fotos de duas das imagens



Fonte: Arquivo do pesquisador (2021).

A escolha pelas duas figuras não tem um critério específico. O mesmo formulário foi apresentado ao segundo grupo, alterando apenas para a língua portuguesa. Na sequência, procede-se a análise das respostas obtidas.

ANÁLISE DOS DADOS

Inicialmente, esclarecemos as escolhas de imagens fotografadas amadoristicamente pelo pesquisador. Entende-se que a geometria analítica, em geral, dá ênfase à linguagem algébrica, em que os objetos são identificados por leis matemáticas, o que se mantém na linha do cálculo em cursos de formação de professores. Raramente, são explorados os aspectos geométricos correlatos a tais leis, como ocorre ao abordar o conceito de derivada. Apenas em casos específicos, percebe-se o estudo começando pela inclinação de uma reta tangente a uma curva e chegando ao conceito por meio de uma interpretação visual/geométrica. Tal abordagem, no entender deste autor, seria mais significativa do que aplicação de regras de derivação. De modo similar, o conceito de integral definida raramente é obtido pelo aspecto visual do comprimento de arco de uma curva. Também, o de matrizes poderia explorar os aspectos visuais de simetrias.

Por tais argumentos, explorar imagens como as constantes da Figura 1 pode ser motivador, uma vez que tal abordagem permite a visualização de superfícies aproximadas ao parabolóide e ao toro. Além disso, tais imagens são ricas em elementos tanto de geometria espacial quanto de plana, podendo suas construções em *software* dinâmico fomentar outros tantos conceitos que podem ser motivadores para o estudante e para o professor em formação.

Como havia uma ampla possibilidade de respostas/justificativas, elegemos duas categorias a *posteriori*: figuras planas e figuras espaciais.

a) A primeira imagem

Inicialmente, dos vinte e nove respondentes do primeiro grupo, apenas um indicou não visualizar forma geométrica na figura, enquanto todos os do segundo grupo responderam ter visualizado alguma, embora as visualizações, em ambos os grupos, nem sempre tenham sido bem caracterizadas do ponto de vista conceitual geométrico. O participante PC₂₆ fez o seguinte registro: “no veo figuras geométricas”² (não vejo figuras geométricas). A incidência em figuras planas visualizadas superou as espaciais (Quadro 1).

Quadro 1 – Figuras visualizadas pelo primeiro grupo

| Figuras planas | Figuras espaciais |
|---|--------------------------|
| Oval (8) | Esfera, esferoide (5) |
| Forma circular, círculo (5) | Intento de elipsoide (1) |
| Retângulo, quadrilátero, paralelogramo (14) | Prisma (1) |
| Elipse (7) | -- |

Fonte: Dados da pesquisa (2021)³.

Os dados do Quadro 1 indicam que houve trinta e quatro visualizações de figuras geométricas planas em relação a sete espaciais. Percebe-se, aqui, a importância da imagística citada por Hadamard (2009), no sentido de que é

necessária uma conexão entre a imagem e a linguagem, seja ela verbal ou escrita. No ensino, essa conexão é fundamental, a fim de desenvolver o conhecimento geométrico para registrar com palavras ao observar um modelo visual. Ao que tudo indica, os participantes não atentaram que se tratava de representações de objetos espaciais.

Algumas justificativas merecem um olhar mais apurado, uma vez que no intuicionismo, segundo Poincaré (1969), não são as mentes que mudaram e sim as ideias intuitivas. Veja o citado por PC₂₆ de não visualizar nenhuma forma geométrica na imagem fornecida para análise.

Embora tenha sido dito que eram as imagens dos arbustos, alguns dos participantes visualizaram formas ao redor deles, tais como:

PC₂₉: “Retângulo, onde se encontra a sombra da árvore, oval, a copa da árvore, ao fundo se identificam alguns retângulos que são os edifícios”.

PC₂₄: “A base da árvore tem forma de quadrilátero”.

PC₂₀: “Uma esfera porque se vê como um círculo no plano da foto”. A justificativa apresentada indica que seu autor tem a percepção de representação do espaço, ou seja, ele percebe o ambiente e sua imaginação o leva ao formalismo, conectando o objeto com sua representação no plano com base nos pressupostos de Piaget e Inhelder (1993).

PC₁₈: “um retângulo no solo e uma circunferência na árvore”. Percebe-se que o indivíduo analisou o todo na imagem fornecida e não somente a árvore. Entretanto, não fica explícito o que ele indica visualizar como uma circunferência. Veja que o retângulo está no plano do chão, então, de fato, é uma figura plana, da mesma forma que uma circunferência. Porém, a circunferência que diz visualizar na árvore não parece ter significado.

PC₁₇: “Elipse a forma da árvore, reta a linha branca do piso, retângulo o caminho de folhas no piso ao redor da árvore”. O indivíduo também analisa o todo ao perceber a linha limite entre a calçada e a rua. Confunde a forma da árvore ao afirmar ser elipse, pois ela é um objeto espacial. Talvez o que queira dizer como retângulo sendo o caminho de folhas no piso seja o espaço retangular deixado sem piso. A afirmação de que as folhas da árvore no chão formam uma elipse também é indicada por PC₁₆.

A justificativa a seguir é interessante, na medida em que sinaliza objetos planos e espaciais.

#PC₁₀: “Identifico formas 3D e formas 2D: segmento, quadrilátero, prisma, oval”. Não explicita o que visualiza como prisma.

Pode-se observar, nesses registros, aspectos que devem levar-se em conta ao ensinar matemática (KANDEMIR; GÜR, 2007), ou seja, não explorar abordagens algorítmicas, mas métodos de ensino novos, atuais, por exemplo, imaginação e criatividade como o *Brainstorming*, proporcionando aos estudantes uma riqueza de possibilidades de abordagens visuais.

No que segue, faz-se a análise das respostas obtidas no segundo grupo para a mesma fotografia, sintetizando-as no Quadro 2.

Quadro 2 – Figuras visualizadas pelo segundo grupo

| Figuras planas | Figuras espaciais |
|--------------------------|---------------------------|
| Metade de uma elipse (2) | Cone e tronco de cone (3) |
| Parábola (3) | Paraboloide (2) |
| Quadrilátero (1) | Paraboloide elíptico (1) |
| --- | Semiesferas (1) |
| --- | Metade da esfera (1) |
| --- | Semi-elipsoide (1) |

Fonte: Dados da pesquisa (2021)³.

Percebe-se, dos Quadros 1 e 2, que a diversificação em figuras planas do segundo grupo é bem menor do que a do primeiro grupo, enquanto que a das espaciais é maior, inclusive com formas geométricas mais elaboradas, nem sempre exploradas em cursos de geometria no ensino superior. Algumas justificativas merecem um olhar diferenciado, como as que seguem.

#PB₁: “Metade de uma elipse, pois é como se tivesse recortado o arbusto ao meio. Ou uma parábola, considerando somente o extremo”. Nota-se que este indivíduo não imaginou ou visualizou mentalmente conforme Leivas (2009) indica para a última habilidade. Por sua vez, percebe, ao considerar somente o extremo, que está se referindo à fronteira do objeto.

#PB₆: “A forma é similar a um tronco de cone, mas arredondado no que seria a base superior”. Aqui, ocorre certa confusão realizada pelo indivíduo, uma vez que as geratrizes de uma superfície cônica são linhas retas e a base uma circunferência, mas nenhum dos dois elementos é citado, uma vez que afirma: ‘arredondado’.

#PB₈: “2d – me leva a pensar na parábola/ 3d- paraboloide”. Este indivíduo usa sua intuição e imaginação citando as duas possibilidades. Explora a representação do objeto (no plano) para indicar parábolas, porém, visualizando o objeto no espaço. Assinala corretamente assemelhar-se ao paraboloide, como se verá adiante no presente artigo, com o uso do GeoGebra.

#PB₉: “Assumindo ser uma forma espacial, considero que a forma se parece com um semi-elipsoide, pois parece a metade da forma representada na questão anterior”. Este participante evocou a primeira questão da investigação que constava da imagem de uma árvore similar ao elipsoide, o qual não é analisado neste artigo.

#PB₁₁: “Metade de uma elipse rotacionada em volta de seu eixo, parte superior da árvore”. Ainda que a escrita não tenha sido precisa, nem qual seria a curva a rotacionar, este indivíduo trouxe um elemento importante, a saber, a obtenção de superfícies por meio de rotação de curvas planas.

As respostas/justificativas deste segundo grupo remetem ao que Kandemir e Gür (2007) apontaram sobre diferentes formas de criatividade em treinamento para professores, isto é, a imaginação que fica fluente na presente pesquisa quando os indivíduos necessitam observar uma fotografia e imaginar uma ligação com representações geométricas de objetos no espaço.

Ao detalhar os registros dos participantes da pesquisa mediante a observação de imagens fotografadas, vai-se ao encontro do indicado por Moreira (2011) para as ciências quanto a abordagens e análises de informações holísticas e qualitativas, no caso, sobre elementos visuais geométricos. Assim, ao estabelecer comparativos percentuais entre os dois grupos, encontra-se que, no primeiro, aparece, aproximadamente, 121% (cabe ressaltar que cada indivíduo poderia indicar mais do que uma figura) de visualizações de figuras planas em comparativo a 43% do segundo grupo. No que diz respeito a visualizações de objetos espaciais, tem-se 25% no primeiro e 64% no segundo grupo. Isso ilustra uma considerável discrepância entre os dois grupos. Provavelmente, tal diferença ocorra em virtude de que, no primeiro grupo, participaram indivíduos diversificados em termos de instituições, embora tenham optado por realizar a oficina que abordaria geometria. Enquanto isso, no segundo grupo, todos participam de um grupo específico sobre ensino e pesquisas em Geometria. Quanto à formação acadêmica de ambos, não há discrepância.

Vejamos, na sequência, como explorar um *software* de Geometria Dinâmica para aproximar a imagem fornecida com sua representação formal (para o pesquisador, assemelha-se a um parabolóide). Considera-se a imagem inicial e, posteriormente, retira-se elementos ao redor da árvore, deixando somente a mesma, como indicado na Figura 2.

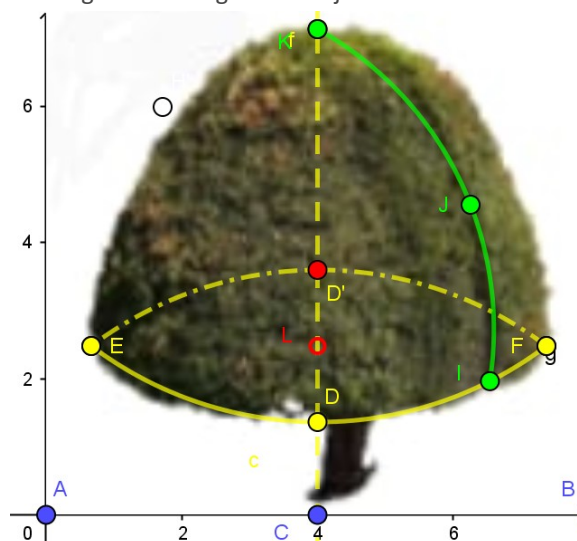
Figura 2 – Imagens do objeto analisado



Fonte: Arquivo do pesquisador (2021).

A imagem da direita é levada ao GeoGebra, como ilustrado na Figura 3.

Figura 3 – Imagens do objeto no GeoGebra.



Fonte: Autoria própria (2021)⁴.

A imagem é levada ao GeoGebra pela ferramenta ‘inserir imagem ... arquivo’. Pode-se ajustar de modo que fique articulada nos pontos A e B sobre o eixo horizontal. Obtém-se o ponto médio de AB, (C) e, por este, uma perpendicular ao eixo horizontal que encontra a imagem em D na parte inferior e em K na parte superior, como se fosse pelo interior do objeto espacial. Explora-se uma reta paralela ao eixo horizontal que encontra o ponto mais à esquerda da imagem (E) e o mais à direita (F). Traça-se um arco por E, D, F e, em seguida, sua reflexão em relação a tal reta. Também, obtém-se o simétrico do ponto D (D’) em relação à mesma reta. Com isso, tem-se uma representação da circunferência (aproximada) de centro L, que é o limite inferior da superfície da figura espacial ali representada.

Ainda da Figura 2 (esquerda), pode-se observar certa falha na superfície, a qual, no GeoGebra, foi demarcada na cor verde, ou seja, pode-se imaginar, explorando a intuição do geômetra, que ali está a parte frontal de uma parábola com vértice K e concavidade para o interior da superfície. Intui-se a superfície da imagem como sendo obtida pela rotação dessa parábola (geratriz), em torno do eixo e apoiando-se na circunferência (diretriz). Esse tipo de elaboração pode auxiliar o professor no desenvolvimento de atividades/conteúdos de uma geometria nem sempre trivial, especialmente aqueles envolvidos em geometria analítica em que as equações, em geral, são definidas *a priori*, pouco proporcionando o desenvolvimento de pensamento geométrico.

Entende-se que, com tal estudo, é possível chegar ao conceito do que seja um parabolóide (de revolução), conforme definido por Lehmann (1970) como “Superfície de revolução é a superfície gerada pela rotação de uma curva plana dada, em torno de uma reta fixa no plano da referida curva” (p. 363).

Essa realização ou modelação no GeoGebra não é exata matematicamente, porém, as construções podem se tornar úteis para o estudo das superfícies quádricas, o que poderia vir a incentivar para a geometria analítica explorar as curvas que podem gerar a superfície (geratrizes – IJK). O eixo de revolução da superfície é a reta, no caso, paralela ao eixo vertical passando pelos pontos K e L. Poder-se-ia, além disso, explorar as secções planas paralelas à circunferência da base (os paralelos).

b) A segunda imagem

Escolheu-se, para este artigo, uma segunda imagem, a qual o pesquisador associou à superfície do toro. Essa superfície pode ser observada, por exemplo, em uma câmara de ar de bicicletas, automóveis etc. A superfície é muito pouco explorada em disciplinas de curso superior, ainda que existam seus protótipos reais. No clássico livro de Geometria Analítica de Lehmann (1970), ela aparece em exercício proposto da seguinte forma:

Deduzir a equação da superfície de revolução gerada pela rotação da circunferência $x^2+y^2-2by+b^2-a^2=0$ e $z=0$ em torno do eixo x. Construir a superfície para $a=2$ e $b=3$. Quando $b>a$, a superfície é denominada i, toro ou anel de âncora (LEHMANN, 1970, p. 367).

Na abordagem dada pela geometria diferencial, de forma similar, Valladares (1978) aborda a superfície em forma paramétrica do seguinte modo:

$$f(u,v)=((a+r\cos u)\cos v, (a+r\cos u)\sin v, r\sin u)$$

Os números a e r são reais, $a > r > 0$, sendo a superfície obtida pela rotação da circunferência $g(u) = (r \cos u + a, 0, r \sin u)$ de centro $(a, 0, 0)$ e eixo OZ .

Inicialmente, do grupo 1, 10,3% responderam não visualizar forma geométrica. Novamente, como na imagem anterior, as respostas conduziram a estabelecer duas categorias: figuras geométricas planas e figuras geométricas espaciais. No Quadro 3, sintetizam-se essas duas categorias.

Quadro 3 – Síntese das figuras visualizadas pelo primeiro grupo

| Figuras planas | Figuras espaciais |
|--|-------------------|
| Circunferência e círculo (6) | Toro, toroide (7) |
| elipses (2) | rosquinha (4) |
| Setor circular (2) | |
| Anéis de circunferência, anel, aro (3) | |
| reta (1) | |
| --- | |

Fonte: Dados da pesquisa (2021)³.

Percebe-se que houve certa redução na variação de elementos geométricos apontados, sendo ainda relevante a visualização de imagens planas. Nota-se que a associação da imagem espacial associada ao elemento geométrico toro foi bem acentuada, o que chamou a atenção do pesquisador, uma vez ela não costuma ser tão utilizada. Interessante que associaram a imagem com uma ‘rosquinha’. Por exemplo:

#PC₄: “Parece uma rosquinha, porém não me recordo o nome geométrico”. Constata-se que o indivíduo, certamente, já havia tido contato com tal objeto geométrico, entretanto, não guardou seu nome.

#PC₅: “Um toro, rosquinha ... a grama forma um anel”. Percebe-se que o participante vai ao encontro do indicado por Meissner (2015) ao elaborar seu processo mental a fim de buscar a natureza da imagem visualizada. Integra, assim, naturalmente, sua intuição à criatividade, ao fornecer as três possibilidades de visualizar a imagem em situações reais.

#PC₁₁: “Reta, a linha branca do piso”. Aqui, relaciona-se ao dito por Hadamard (2009) de que o participante, ante um modelo visual, tem muitas formas de pensar em um modelo que lhe seja apresentado, no caso, um arbusto. Procura, assim, descrever sua percepção intuitiva focada na linha reta no piso que cerca o arbusto. Talvez não tenha, em outra ocasião, ter-lhe sido apresentado o toro, enquanto que a reta é mais usual.

#PC₂₃: “Os arbustos parecem elipses, uma inscrita dentro da outra”. A imagem visual que o participante elabora do arbusto não se fortalece nem pela sua imaginação (ser um objeto espacial), nem pela criatividade, como poderia expressar como outros elaboraram indicando assemelhar-se a uma rosquinha, por exemplo.

À continuação, traz-se as respostas e justificativas apresentadas pelo segundo grupo investigado.

Quadro 4 – Síntese das figuras visualizadas pelo segundo grupo

| Figuras planas | Figuras espaciais |
|--|--------------------------|
| Circunferência (4) | Espacial (1) |
| Coroa circular (3) | Toro (6) |
| Anéis de circunferência, anel, aro (3) | Esfera vazada (1) |
| Reta (1) | Rosquinha (1) |
| | Parte de um cilindro (1) |

Fonte: Dados da pesquisa (2021)³.

Analisando as justificativas deste grupo, verifica-se haver uma variação menor de elementos geométricos em relação ao apresentado pelo primeiro grupo, quer quanto às figuras planas, quer quanto às espaciais. Além disso, as respostas ficaram aproximadas, à exceção de um indivíduo que expressou ter visualizado uma reta, um que manifestou ser parte de um cilindro e um que identificou uma esfera vazada. Também, as justificativas foram mais detalhadas, como pode ser visto nas apresentadas a seguir.

#PB₂: “Visualizo uma coroa, por exemplo, uma coroa de flores. Mas, geometricamente, posso dizer que poderia ser uma circunferência ou uma coroa circular”. O participante, talvez por tratar-se de arbusto, associa a imagem a uma coroa de flores, que não teria o significado geométrico na situação da investigação. Em seguida, evoca a geometria e indica poder ser uma circunferência (na realidade, não fica explícita essa visualização) ou uma coroa circular, já que não são figuras geométricas planas, mas espaciais.

#PB₅: “Os arbustos do contorno do canteiro formam parte de um cilindro, visto como um corte paralelo à base”. Ao que tudo indica, este indivíduo não percebe a linha curva que forma a imagem e, para ser um cilindro, as linhas deveriam ser retas ou segmentos de retas (geratrizes).

#PB₈: “2d – circunferência/3d- toro”. O participante deixa clara sua percepção visual ao interpretar a representação podendo ser bi ou tridimensional.

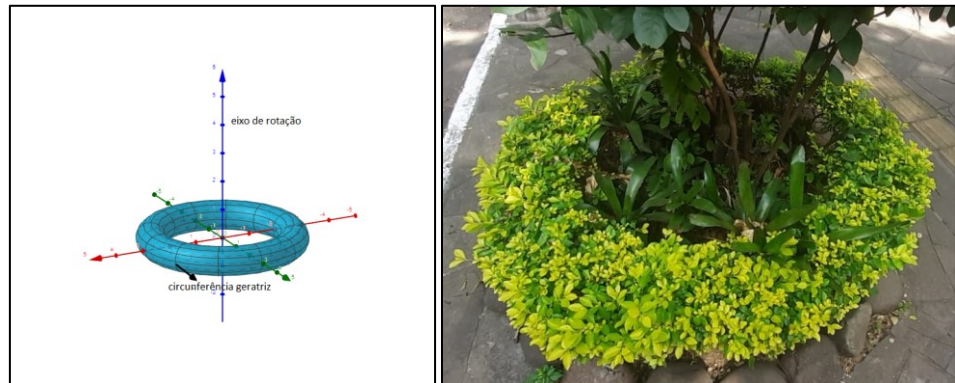
#PB₉: “As folhas verdes claras, tomadas como figura espacial, me parecem um toro, pois formam algo parecido com uma ‘câmara de ar’ “. Interessante o registro do indivíduo, pois explora sua imaginação e criatividade ao estabelecer conexão da imagem com algo bem concreto que, em geral, é o protótipo que ilustra a superfície do toro sempre que esta superfície é evocada em textos. Sua justificativa vai ao encontro do que o autor do artigo caracteriza a respeito da visualização como construto mental.

#PB₁₂: “A plantação de pingos de ouro tem o formato que lembra um toro”.

#PB₁₄: “Circunferência no interior e exterior da roda”. Embora não cite tratar-se de similaridade ao toro, percebe a existência de duas circunferências. Vê-se que o indivíduo não afirma representar um toro, mas uma similaridade com tal superfície.

A fim de aproximar a imagem capturada da forma geométrica do toro de revolução, considera-se sua representação no GeoGebra, o que é feito a partir da equação dessa superfície. Digita-se na janela de entrada o seguinte comando: Superfície $((R + r \cos(v)) \cos(u), (R + r \cos(v)) \sin(u), r \sin(v), u, 0, 2\pi, v, 0, 2\pi)$ (Figura 4).

Figura 4 – Toro obtido no GeoGebra por meio de sua equação e a representação em foto.



Fonte: Dados da pesquisa (2021)⁴.

Observa-se, na Figura 4 (esquerda), uma circunferência num plano paralelo ao XOZ, o eixo OZ, além de uma circunferência no plano XOY. Fazendo-se rotacionar a primeira em torno do eixo OZ, apoiando-se na circunferência no plano, tem-se a superfície do toro de revolução. Com isso, ocorre a aproximação da imagem fotografada do arbusto (direita) com a superfície geométrica.

As duas imagens, colocadas lado a lado, reforçam os aspectos intuitivos visuais do pesquisador ao caracterizar visualização como um processo de formar imagens mentais a fim de comunicar determinados conceitos, no caso, de um toro formado por arbustos observados no entorno de uma árvore em uma calçada. Além disso, o significado de intuição elaborado por Davis e Hersh (1995), de que é o oposto de rigoroso, muito embora não seja, como tal, muito preciso, encontra-se aqui registrado. Também, é plausível ou convincente, na ausência de demonstrações, o que o visual apresentado no GeoGebra ameniza. Por fim, apoia-se em um modelo físico ou em exemplos importantes, ou seja, quase heurístico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo, aborda-se visualização geométrica a partir de representações em fotografias de alguns arbustos ornamentados em calçadas e jardins urbanos. Nas observações visuais, evoca-se intuição e imaginação, além de criatividade. A pesquisa investigou dois grupos distintos, um constituído de participantes de uma oficina em um evento fora do Brasil, com 29 participantes, e outro com membros brasileiros de um grupo de estudos e pesquisas em geometria. A investigação teve como objetivo analisar como os respondentes visualizam formas geométricas encontradas em arbustos em ambiente urbano e as associam a formas geométricas espaciais. Ambos os grupos responderam a um *Google Forms*.

Para este artigo, foram analisadas as respostas e justificativas de duas dentre as seis imagens fornecidas que se assemelham a um parabolóide e a um toro. Ao analisar as respostas fornecidas, estas foram classificadas em duas categorias:

figuras planas e figuras espaciais. Embora fossem apresentadas representações de arbustos, logo objetos espaciais do mundo real, todas elas, na realidade, consistiam em elementos espaciais. No entanto, observou-se que houve uma enorme designação de figuras geométricas planas, o que, no entender do pesquisador, caracteriza uma forte tendência no ensino desses elementos geométricos em prol dos espaciais e, até mesmo, de outras geometrias, como apontam pesquisas prévias do autor.

Visualizar a geometria envolvida ao redor dos indivíduos, seja pela intuição, pela imaginação ou pela criatividade, parece ser algo relevante para a aquisição de formação de pensamento geométrico ao longo da escolaridade. Isso parece ser importante para o enfrentamento/formação de várias áreas do conhecimento, como a Engenharia, a Arquitetura etc.

Um olhar atento para pesquisas envolvendo visualização, em particular, indica certa timidez em publicações internacionais. No entanto, julga-se que há uma variedade de possibilidades de articular tais habilidades aqui analisadas, as quais podem ser trabalhadas, em especial, na formação do professor de matemática ou mesmo na formação de pedagogos que irão dar início à formação geométrica dos indivíduos. Ao chegarem, por exemplo, aos cursos de cálculo, poderá ocorrer um melhor aproveitamento nessa disciplina se os estudantes conseguirem interpretar visualmente problemas como o de derivação ou de integração não simplesmente pela aplicação de fórmulas.

SAMPLE PAPER TO BE USED ATO FORMAT THE ARTICLES TO BE SUBMITTED TO RBECT

ABSTRACT

In this article, a qualitative research is presented, which aimed to analyze how two distinct groups visualized geometric shapes in figural records of shrubs found in the urban environment of a city in the metropolitan region of the capital of Rio Grande do Sul. This analysis consists of two of the six images investigated, which are close to a paraboloid and a torus. The first group had 29 participants from a workshop given by the author at an international event held in Colombia with participants of various nationalities and levels of training. The second group, with 14 members, all Brazilians and members of a study and research group led by the author. The results showed limitations of participants in visualizing geometric shapes, especially spatial ones. Most of them identified more flat geometric objects than the two spatial geometric shapes, and few identified the paraboloid and the torus.

KEYWORDS: Paraboloid. Toru. Visual perception. Urban environment.

NOTAS

1. O dicionário Dicio, disponível em <https://www.dicio.com.br/imagistica/>, define imagística como sendo faculdade ou poder de imaginação, de invenção ou de fantasia.
2. Daqui para a frente, as citações serão apresentadas traduzidas pelo autor para o português.
3. Organizado pelo autor.
4. Construído no Geogebra.

REFERÊNCIAS

- DAVIS, P. HERSH. **A experiência matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.
- FISCHBEIN, Efraim. **Intuition in science and mathematics**: an educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.
- HADAMARD, Jacques. **Psicologia da invenção na matemática**. Trad. Estela dos Santos Abreu. Rio de Janeiro: Contraponto Editora Ltda., 2009.
- HILBERT, D. **Fundamentos da geometria**. Lisboa: Gradiva, 2003.
- KANDEMIR, M.A.; GÜR. H. **Creativity Training in Problem Solving**: A Model of Creativity in Mathematics Teacher Education. *New Horizons in Education*, vol.55, No.3, Dec. 2007.
- LEHMANN, C. H. **Geometria Analítica**. Paraná: Globo, 1970.
- LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, Intuição e Visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de Licenciatura de Matemática. 2009. Tese (Doutorado em Educação) Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009. Disponível em: <http://www.ppge.ufpr.br>. Acesso em: 10 jan. 2021.
- LEIVAS, J.C.P. Elipse, parábola e hipérbole em uma geometria que não é euclidiana. **REVEMAT**, v. 9 n. 2, 2014. DOI <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n2p189>. Acesso em: 30 fev. 2021.
- LEIVAS, J.C.P. Um olhar geométrico para o verde dos ciprestes e dos pingos de ouro Uberlândia, MG. **Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**: 1. Ed. Uberlândia: SBEM, 2021, p. 892-905. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/index.php/anais/sipem>. Acesso em: 20 jun.2022.

LOIZOS, P. Video, filme e fotografias como documento de pesquisa. *In*: BAUER, M.W.; GASKELL, G. **Pesquisa Qualitativa com texto, imagem e som: um manual prático**. 13a. ed. Petrópolis: Vozes, 2. Reimpressão, 2015, p. 137-155.

MEISSNER, H. Creativity in Mathematics Education. *In*: Cho, S. (eds) **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**. Springer, Cham. 2015 Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_64. Acesso em: 21 ago. 2021.

MOREIRA, M.A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

PIAGET, Jean; INHELDER, Bärbel. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

POINCARÉ, H. INTUITION and LOGIC in Mathematics. Classics in mathematics education. **The Mathematics Teacher**, Vol. 62, No. 3, p. 205-212, march 1969. Published by: National Council of Teachers of Mathematics Stable URL: Disponível em <http://www.jstor.org/stable/27958100>. Acesso em: 08 abr.2022.

POLYA, G. **A arte de resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho científico**. 24. ed. Revista e atualizada. São Paulo: Cortez, 2016.

VALLADARES, Renato. **Introdução à Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: U.F.F, 1978.

Recebido: 22 jun. 2022.

Aprovado: 14 nov. 2022.

DOI: 10.3895/rbect.v15n3.15641

Como citar: LEIVAS, J. C. P. Visualizando formas geométricas em arbustos. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponta Grossa, Edição Especial, p. 1-18, dez. 2022. Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/15641>>. Acesso em: XXX.

Correspondência: José Carlos Pinto Leivas - leivasjc@yahoo.com.br

Direito autoral: Este artigo está licenciado sob os termos da Licença Creative Commons-Atribuição 4.0 Internacional.

