ACTIO: Docência em Ciências
ISSN: 2525-8923

http://periodicos.utfpr.edu.br/actio

Demonstração com tecnologia: um estudo sobre o número de diagonais de um prisma

Elisangela Pavanelo
elisangela.pavanelo@gmail.com
orcid.org/0000-0003-2926-5793
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Guaratinguetá, SP, Brasil

Ana Carla de Paula Leite Almeida
anacarla.pl.almeida@gmail.com
orcid.org/0000-0003-2078-2727
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Guaratinguetá, SP, Brasil

RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação sobre a maneira pela qual o professor pode compreender uma atividade relativa ao número de diagonais de um prisma, através do uso de tecnologia digital. Inicialmente, apresentam-se considerações teóricas em relação à ideia de demonstração a partir de um trabalho com tecnologias digitais. Entendemos, nesse trabalho, a demonstração em matemática conforme discutido em Mod (2016) e Bicudo, I. (2002), os quais destacam que a riqueza de uma demonstração pode não residir somente na prova da tese nele contida, mas na Matemática que é desenvolvida pelas tentativas de demonstração, além de observar que o caminho para se chegar até ela é tão importante quanto o resultado final. O uso do computador pode levar a descoberta de novas maneiras, tanto para professores e alunos, quanto para os matemáticos, de se desenvolver uma demonstração matemática, mas isso não exime a presença da criatividade e intuição. Trata-se de um trabalho de caráter qualitativo, desenvolvido a partir de um estudo de caso com professores de Matemática, utilizando-se a fenomenologia como metodologia de análise. Propõe-se a análise a partir das transcrições obtidas durante encontros com professores de Matemática de uma escola estadual de Aparecida – SP. Procura-se destacar a contribuição que o software GeoGebra oferece ao processo de demonstração em geometria. A utilização do computador possibilitou a representação de um objeto geométrico, utilizado na avaliação de ideias e hipóteses, as quais permitiram a criação de um contexto abstrato e simbólico. Foi identificado que, no caso discutido, não ocorreu a transposição das hipóteses vistas, ou percebidas, para o mundo simbólico matemático.

PALAVRAS-CHAVE: Demonstração. Geometria. Tecnologia Digital. Educação Matemática.

INTRODUÇÃO

De acordo com Bicudo, “demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas” (BICUDO I., 2002, p. 80). Apesar dessa concepção, concordamos com Mod (2016, p. 90) quando ele salienta que “a riqueza da demonstração de um teorema não reside somente na prova da tese nele contida, mas na matemática que é desenvolvida pelas tentativas de demonstração”. É com esses pressupostos que o presente trabalho é desenvolvido, entendendo a necessidade do rigor na argumentação matemática para se validar uma proposição ou propriedade, além de se considerar que a verificação da verdade não é o único objetivo de uma demonstração. Consideramos que o caminho trilhado, as conjecturas e as tentativas realizadas para tal, são uma experiência rica para quem o faz. E é nesse contexto que entendemos o trabalho com tecnologias digitais como um aliado ao longo do processo. Desse modo, procuramos compreender como se dá a argumentação de um professor de Matemática em relação à propriedade que trata do número de diagonais de um prisma. Para tanto, consideramos o uso do software GeoGebra ao longo de uma pesquisa qualitativa pensada na perspectiva de um estudo de caso.

Inicialmente são apresentadas ideias a respeito de demonstrações matemáticas e demonstrações que fazem uso de recursos tecnológicos. Na sequência, consideramos a temática do trabalho com tecnologias nas aulas de matemática, além de uma breve discussão sobre o software GeoGebra. A seguir, a atividade central deste trabalho, a descrição da propriedade que trata das diagonais do prisma, é apresentada. Na análise dos dados foram considerados os seguintes aspectos: a construção de um polígono com o software, a tentativa de construção de um prisma e a identificação dos elementos do prisma. A interpretação à luz da interrogação que orienta o presente trabalho, sugere a existência de estruturas mais gerais, aqui compreendidas como “visualização do objeto geométrico”, que foi caracterizado como uma categoria de análise.

SOBRE DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA

Santos (2015) salienta o quanto é crucial que o professor desenvolva com os alunos atividades que contribuam para a indagação e a reflexão a respeito das suas respostas, levando o aluno a questionar se os resultados encontrados na resposta de determinados problemas são plausíveis em relação ao que foi perguntado. Dessa forma, o aluno tem a oportunidade de realizar seus trabalhos com maior autonomia e confiança. Compreendendo o que lhe foi proposto, sugere-se o desenvolvimento do seu conhecimento matemático e seu raciocínio dedutivo. Entretanto, por que as demonstrações são pouco utilizadas como recursos didáticos? Como ela é compreendida pelo professor que leciona Matemática?

Sobre provas e argumentações matemáticas, Santos nos diz:

> Que o uso desses elementos matemáticos contribui para uma compreensão melhor desta área de conhecimento, incentivando e despertando o interesse e o raciocínio dedutivo dos alunos, dando-lhes condições para a evolução de seus desenvolvimentos cognitivos bem como atribuindo

> sentido e coesão às fórmulas matemáticas, fazendo-os perceber o verdadeiro sentido de sua existência e aplicação (SANTOS, 2015, p. 22).

Quando pensamos em demonstração, imaginamos intuitivamente a busca de uma verdade. Na Matemática, ela é compreendida como a validação de ideias matemáticas.

Para Fossa (2009), o matemático tem pelo menos dois motivos para demonstrar teoremas, as demonstrações asseguram a verdade dos teoremas e, a Matemática é um tipo de conhecimento, lembrando que, para se conhecer uma coisa o fato de acreditar nela não é o suficiente. Fossa (2009) destaca que, para ele, conhecer é saber o porquê, e o porquê de um teorema é a sua demonstração.

Na Matemática, diferente de outras Ciências cujos resultados geralmente são estabelecidos e aceitos por meio da observação, experimentação ou análise de dados, os resultados precisam ser demonstrados, indo além da observação. Assim, a demonstração matemática é a responsável por garantir a veracidade de tais resultados (FILHO, 2012).

Loureiro e Bastos (2002) referem-se à demonstração como sendo um tipo de prova matemática, na qual são seguidas regras bem definidas e aceitas em determinado grupo. Desse modo, a demonstração é comparada com a prova matemática, buscando verdades capazes de sustentar o que se pretende demonstrar.

Uma verdade matemática, segundo Batistela, Barbariz e Lazari (2016), significa manifestar uma afirmação verdadeira para alguma proposição. Essas afirmações são expostas na forma de demonstração e, são criadas através de investigação e uso do método axiomático dedutivo.

De acordo com Bicudo, “demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas” (BICUDO, I., 2002, p. 80). Porém, ainda segundo o autor, existem algumas proposições que não são possíveis de serem demonstradas e, para essas são estabelecidas algumas “arquiteturas das teorias matemáticas: que as consideram como sendo conceitos primitivos (axiomas) e conceitos derivados (teoremas)” (BICUDO, I., 2002, p. 80).

> Um axioma ou postulado é uma sentença matemática que não é uma definição e não precisa ser demonstrada. Bem diferente do que ocorre com os teoremas – que precisam de demonstração –, os axiomas ou postulados não precisam ser demonstrados e são apresentados realmente como decretos. Entretanto, como as noções primitivas, esses “decretos” não surgem de opiniões pessoais isoladas, são frutos da experiência, da observação e, também, de certo “consenso coletivo” (FILHO, 2012, p.164).

Todavia, alguns pesquisadores fazem distinção entre a demonstração formal, demonstração aceitável e o ensino de demonstração.

O formalismo se faz necessário para que as evidências intuitivas e fatos sustentados somente pelo julgamento humano sejam eliminados. As evidências oriundas de fontes não ligadas ao formalismo poderiam ser vistas como "fontes potenciais de erros graves" (HANNA, 1990 apud LOUREIRO; BASTOS, 2002, p. 107).

> Demonstração formal: a demonstração como conceito teórico da lógica formal (ou meta-lógica), que pode ser encarado como o ideal do qual a prática matemática apenas se aproxima.

> Demonstração aceitável: a demonstração como conceito normativo que define o que é aceitável para os matemáticos profissionais.
>
> O ensino da demonstração: a demonstração como uma atividade matemática escolar que serve para esclarecer ideias que vale a pena tornar conhecidas dos alunos (THURSTON, 1994, p. 171 apud LOUREIRO e BASTOS, 2002, p. 109).

Nagafuchi e Batista (2008) pontuam que, muitas vezes, as palavras "prova" e "demonstração" são tomadas como sinônimos. Entretanto, alguns dicionários retratam esses termos como sendo distintos. Para Abbagnano (2007):

> DEMONSTRAÇÃO[...] do ponto de vista lógico evidenciou-se o caráter de dedução formal a partir de premissas (Descartes, Leibniz), o que distingue a D. (cujo tipo ou ideal continua sendo a D. matemática) de outros gêneros de prova. Na Lógica contemporânea, o termo D. não é muito usado: em geral designa uma sequência de enunciados tais que cada um deles é um enunciado primitivo ou então é diretamente derivável de um ou mais enunciados que o precedem na sequência[...] (ABBAGNANO, 2007, p. 239).
>
> PROVA (gr. TEKüiptOV; lat. Probatio; in. Proofjr. Preuve, aí. Beweis: it. Prova). Procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui P. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são P. tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto, esse termo é mais extenso que demonstração (v.): as demonstrações são P., mas nem todas as P. são demonstrações. (ABBAGNANO, 2007, p. 805).

Dessa maneira, a ideia de demonstração vai ao encontro do significado utilizado por Filho (2012), por se tratar de uma dedução formal a partir de premissas, permitindo argumentações lógico-dedutivas. A prova pode ser entendida como "uma espécie de demonstração, usada para demonstrar que um fato ou afirmação são verdadeiros, e ainda pode incluir o significado de demonstração matemática" (NAGAFUCHI; BATISTA, 2008).

Balacheff (2000 apud MOD, 2016) defende a ideia de que os verbos: explicar, provar e demonstrar são considerados sinônimos em várias abordagens, mas isso pode se tornar um obstáculo, pois sem a correta distinção é possível que não haja uma compreensão do que está sendo feito.

A explicação garante a validade de determinada proposição segundo o entendimento de quem a produz, podendo ser aceita, discutida ou rejeitada, sendo baseada em conhecimentos próprios e sem regras; uma prova não tem um papel definitivo, pode ser aceita ou rejeitada por determinada comunidade, podendo ser alterada com o avanço dos saberes e, ao provar, percebe-se certa formalidade; a demonstração é vista como uma sequência de enunciados que são organizados com um conjunto definido de regras (BALACHEFF, 2000 apud MOD, 2016).

Bicudo, diz que "demonstrar uma proposição (exprimindo uma propriedade de um conceito) significa argumentar pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas" (BICUDO I., 2002, p. 80). O autor ainda entende a demonstração como um sistema formal, contendo uma linguagem com expressões e símbolos apropriados, axiomas e regras de inferência (hipóteses e conclusões).

Villiers (2002 apud MOD, 2016) evidencia em seu trabalho a função de uma demonstração, dizendo que ela "não tem como único resultado verificar a conjectura que se está tentando provar. Mais do que isso, uma demonstração pode conduzir os matemáticos por caminhos que possibilitarão a criação de novos conceitos e teorias" (VILLIERS, 2002 apud MOD, 2016, p. 41).

Mod (2016, p. 90) salienta que "a riqueza da demonstração de um teorema não reside somente na prova da tese nele contida, mas na Matemática que é desenvolvida pelas tentativas de demonstração". Logo, conclui-se que mesmo que a demonstração seja um conjunto de enunciados de maneira organizada que seguem as regras adequadas, como defendido por Bicudo, I. (2002), o caminho para se chegar até ela é tão importante quanto o resultado final. O trabalho com tecnologias auxiliam neste processo, conduzindo para que a demonstração atinja sua função.

A DEMONSTRAÇÃO COM TECNOLOGIAS DIGITAIS

Ferreira (2019) apresenta resultados a respeito da constituição e produção do conhecimento matemático do sujeito, o matemático, quando ele está junto ao computador. Em alguns momentos, os matemáticos sujeitos de sua pesquisa, destacam que pelo computador é possível validar uma conjectura matemática,

> Porém, os matemáticos, sujeitos de nossa pesquisa, afirmam que, embora o computador auxilie na demonstração, o que é feito por ele ainda não pode ser considerado uma demonstração. Então, segundo alguns sujeitos argumentam, o que no computador se pode investigar, "faz ver" ou "dá convicção", mas não prova (FERREIRA, 2019, p. 162).

No estudo apresentado por Batistela, Barbariz e Lazari (2016) discute-se a relação de proximidade existente entre o computador e a Matemática, ressaltando que "a Matemática utiliza-se do computador e a Computação utiliza-se da Matemática", dessa maneira, os autores falam de uma colaboração mútua entre eles onde a Matemática contribui nos aperfeiçoamentos da computação e, os computadores auxiliam no processo de ensino e aprendizagem da matemática, além da resolução de problemas.

> O computador pode servir ao matemático na verificação de passagens em demonstrações matemáticas. Ele é capaz de oferecer ferramentas de cálculos, resoluções, simulações, explorações e esboços, por exemplo. Ele, o computador, é importante para o trabalho do matemático se tomado como ferramenta que pode ser utilizada nesse processo de demonstração, no entanto, para ser utilizado precisa ser programado pelo próprio homem para fazer operações localizadas nas partes da argumentação da demonstração (BATISTELA; BARBARIZ; LAZARI, 2016, p. 207)

Lourenço (2002, p. 104) elucida que em algumas situações o uso de figuras e construções "podem ser ilusórias e não conduzir o raciocínio para deduções corretas". Porém, o autor lembra que quando bem conduzidas, as construções, figuras e esboços de gráficos mostram resultados corretos e são capazes de sugerir caminhos que permitem o desenvolvimento de raciocínio lógico. Com isso germina-se o processo de demonstração, incentivando o levantamento de hipóteses e teses.

> Construções dinâmicas, que hoje se fazem nos computadores, se tornam de tal forma claras e sugestivas, que permitem testes de hipóteses e simulações que, em alguns casos, ultrapassam a imaginação mais fértil.

> Construções inteligentes mostram, muitas vezes, resultados surpreendentes e incentivam a busca de resultados, a pesquisa e a elaboração de "teorias" que comprovem ou desmintam os fatos observados (LOURENÇO, 2002, p.104).

A utilização de programas computacionais que envolvem conteúdos matemáticos, como o GeoGebra, permite interatividade e dinamismo, o que pode ser um estímulo para investigações a partir de observações e percepções. Lourenço (2002) defende a ideia de que os programas computacionais permitem a realização de construções geométricas capazes de induzir uma demonstração formal para proposições Matemáticas, principalmente aquelas de nível elementar. Para o autor, "uma construção que pode ser alterada em sua aparência, conservando as propriedades Matemáticas da figura, quando bem direcionada, pode sugerir caminhos para trabalho teórico tendente à demonstração formal" (LOURENÇO, 2002, p.105). Dessa forma pode-se concluir que, através de construções dinâmicas, os estudantes, professores e os matemáticos podem chegar a resultados, desenvolver e elaborar novas demonstrações de acordo com sua percepção que, sem a utilização dessas construções, seriam de difícil compreensão e realização.

> Além de servir, de maneira clara, para a exploração de resultados e para o incentivo de investigações, os softwares educacionais podem sugerir caminhos para a realização de demonstrações desconhecidas, propondo artifícios que, muitas vezes, em demonstrações formais são necessários e de difícil compreensão (LOURENÇO, 2002, p. 106).

Ainda segundo Lourenço (2002, p. 107) "a demonstração de uma proposição adquire grande credibilidade quando é apoiada em fatores visuais". Ele justifica essa afirmação argumentando que o uso de imagens é "capaz de convencer até mesmo observadores que não têm grande habilidade em Matemática e pouca familiaridade com artifícios e sutilezas de demonstrações formais". Assim, acredita-se que por meio da observação e manipulação de imagens ou modelos, o processo cognitivo se torna mais interessante, incentivando novas investigações.

As provas no sentido usual e baseadas somente no formalismo causam repulsa por grande parte dos discentes, isso é sustentado pela dificuldade no entendimento do formalismo, que acaba não convencendo os estudantes. Como consequência os estudantes memorizam a sequência de palavras, traços e argumentos necessários para sua justificativa sem que isso tenha um significado para eles (LOURENÇO, 2002). Com isso, acredita-se que a partir de diferentes métodos de ensino, como o uso de tecnologias, o aluno seja incentivado a investigar possibilidades, desenvolvendo sua criatividade e autonomia diante de situações diversas.

"O computador abre novas formas de se fazer matemática, contudo no que tange à tarefa de demonstrar, ele pode estar presente nessa atividade, no entanto isso não exime a presença da criatividade e intuição do matemático" (BATISTELA; BARBARIZ; LAZARI, 2016, p. 214). Portanto, mesmo que um trabalho com tecnologias esteja presente, professor e o aluno, ainda assim, farão uso da criatividade e da intuição para resolução do problema proposto.

Batistela; Barbariz e Lazari (2016) evidenciam o caráter que o computador tem no processo demonstrativo, servindo ao matemático quando é realizado uma verificação de passagens nas demonstrações matemáticas. Ainda segundo os autores, embora o computador seja importante, se tomado como uma ferramenta no processo de demonstração, ele precisa de uma programação feita pelo homem para realizar operações sobre a argumentação da demonstração.

O trabalho com computadores e outras tecnologias auxiliam, então, no processo dedutivo e em demonstrações. Mas para que isso ocorra é necessário que haja a interferência do homem para que a demonstração seja concluída ou retomada sobre outras perspectivas caso o resultado esperado não seja alcançado.

Assim, os autores argumentam que:

> [...] o computador, dada sua funcionalidade é uma máquina que permite ao matemático, frente a um problema, testar suas hipóteses iniciais obtendo resultados lógicos/numéricos que constituem novas evidências. Esses resultados podem satisfazer ou não o objetivo do matemático. No caso de satisfazerem, a tarefa demonstrativa avança. Em caso negativo, a partir dos resultados obtidos, o matemático reelabora suas conjecturas e a dinâmica de criação e verificação de hipóteses se reinicia na procura de vias de demonstração. Assim, computador e matemático, juntos, constituem um sistema que produz resultados que seriam inviáveis de se obter se não houvesse essa parceria (BATISTELA; BARBARIZ; LAZARI, 2016, p. 207).

Portanto, os autores concluem que o fazer matemática se caracteriza por um processo que não é matemático, que envolve julgamentos do que é interessante, do que é útil. Enfatizam ainda que a intuição colabora no processo dedutivo, quando o foco é a demonstração matemática. A intuição, nesse caso, é posta em comparação “[...] como uma capacidade de ajustar coisas aos padrões que estão dados, a partir do reconhecimento de semelhança entre aspectos de problemas e/ou ideias[...]” (BATISTELA; BARBARIZ; LAZARI, 2016, p. 214) e, consequentemente as tecnologias que permitem esse dinamismo a partir do arrastar do mouse, ou do toque dos dedos, de cores diferentes e da visualização, corroboram no processo de demonstração e entendimento do que foi proposto.

Assim, o uso de computadores proporciona que novas formas de se fazer matemática sejam consideradas,

> contudo no que tange à tarefa de demonstrar, ele pode estar presente nessa atividade, no entanto isso não exime a presença da criatividade e intuição do matemático. O computador fomenta o processo demonstrativo, que envolve uma dinâmica de iniciar e do reiniciar, num jogo de conjecturar e avançar” (BATISTELA; BARBARIZ; LAZARI, 2016, p. 214).

Acredita-se que as possibilidades experimentais dessas mídias podem ser exploradas, podendo-se chegar a elaboração de conjecturas bem como a sua verificação. Desse modo, é possível estabelecer uma importante discussão acerca das possibilidades de inclusão de softwares no contexto educacional em seus diferentes níveis (BORBA, 2012, p. 351).

Nesse contexto, acreditamos que os softwares educacionais possuem um papel importante no ensino de matemática por proporcionar visualização e dinamismo onde uma nova relação entre os atores do processo educacional é estipulada. Professores, alunos, mídia e conteúdos matemáticos trabalham em conjunto na construção do saber, de tal forma que o professor age mutuamente com seu aluno, pensando e aprendendo juntos.

Os computadores possibilitam representar e testar ideias ou hipóteses, que levam à criação de um mundo abstrato e simbólico, ao mesmo tempo em que introduzem diferentes formas de atuação e de interação entre as pessoas. Essas novas relações, além de envolverem a racionalidade técnico-operatória e lógico-formal, ampliam a compreensão sobre aspectos sócio afetivos e tornam evidentes fatores pedagógicos, psicológicos, sociológicos e epistemológicos (ALMEIDA, 2000).

SOBRE A METODOLOGIA DA PESQUISA

O objetivo do presente trabalho é compreender a argumentação de um professor de Matemática, a partir do trabalho com o software GeoGebra, em relação à propriedade que trata do número de diagonais de um prisma. A abordagem metodológica para o desenvolvimento deste trabalho foi o estudo de caso.

O estudo de caso é utilizado quando trabalhamos com uma situação específica, ou seja, trata a situação como se fosse única. Assim o pesquisador procura buscar o essencial e o indispensável do ente que está sendo observado e analisado, conforme descrito nas palavras de Ponte (2006),

> É uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspectos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenômeno de interesse (PONTE, 2006. p.2)

O trabalho com os professores envolveu sete encontros, cada um deles contando com 1h30min de duração. Durante os encontros, foi apresentado o software GeoGebra e um conjunto de atividades que poderiam ser exploradas, uma vez que esses professores não haviam tido nenhum contato com o software anteriormente. Os dois encontros finais tiveram como foco a discussão sobre a atividade do número de diagonais de um prisma.

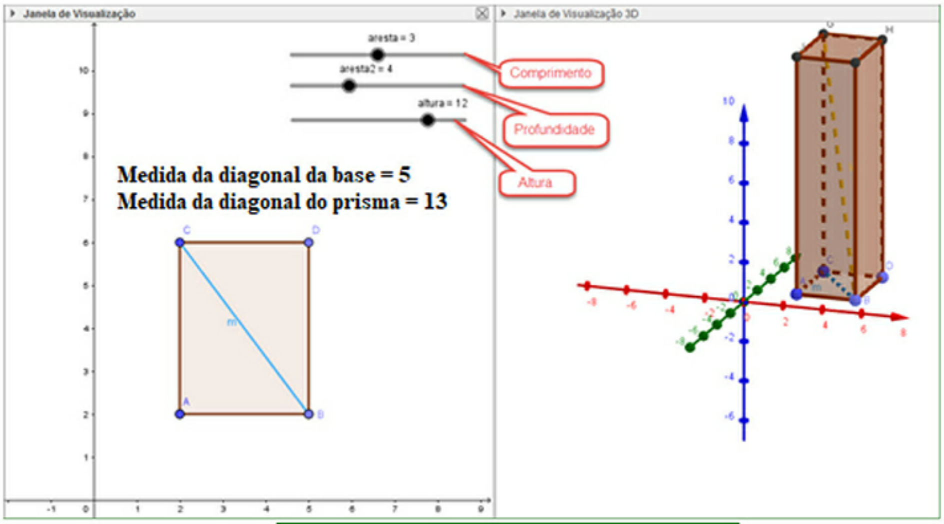
No sexto encontro, a janela de visualização 3D foi apresentada e explorada pelos professores. Nesse momento eles afirmaram que nunca haviam trabalhado com nada parecido antes. Foram então construídos sólidos geométricos como prismas e pirâmides, bem como sua planificação, atividade esta que foi fundamental para o encontro posterior, servindo como base para o sétimo e último encontro.

A escolha da atividade sobre o número de diagonais do prisma foi motivada pela discussão apresentada em um dos artigos do livro "Ser Professor com Tecnologias Digitais: Sentidos e Significados", organizado por Paulo, Firme e Batista, 2018. No artigo "Prismas: Construindo e Explorando formas no espaço", as autoras Pavanelo e Mascarine propõem uma exploração da seguinte Situação de Aprendizagem, do Caderno do Professor[1], 2º Ano do Ensino Médio, Volume 2:

> Uma caixa de lápis tem o formato de um de um paralelepípedo reto-retângulo com 3 cm de comprimento, 4 cm de profundidade e 12 cm de altura. Desenhe uma caixa com essas dimensões e, em seguida, calcule a medida do maior lápis que você pode guardar nessa caixa sem que a ponta fique para fora da borda. (São Paulo, 2016, p.63)

No desenvolvimento desta atividade, adaptou-se a construção de um prisma de base quadrada para um paralelepípedo reto-retângulo, como na Figura 1 a seguir. Com o comando “controle deslizante”, foi possível ajustar a figura para os dados propostos pelo problema no que se refere ao comprimento, largura e altura.

Figura 1 - Visualização do polígono e do prisma no software Geogebra



Fonte: Pavanelo e Mascarine (2018).

De acordo com as autoras, o Caderno do Professor sugere diferentes explorações para esta atividade, como por exemplo, investigar a mesma situação para um porta-lápis nos seguintes formatos:

> a) Prisma regular triangular com aresta de base 12 cm e altura de 16 cm.
>
> b) Prisma regular hexagonal com aresta de base 6 cm e altura de 8 cm. (São Paulo, 2016, p. 63).

A partir da construção do prisma de base hexagonal, sugere-se a discussão da seguinte questão: por que o prisma hexagonal possui diagonais com medidas diferentes? Podemos explorar essa pergunta, partindo do plano, isto é, da diagonal da base do prisma. Por definição, a diagonal de um polígono é um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos desse polígono. Podemos então pensar a ideia sobre diagonal a partir de diferentes polígonos, a partir do triângulo, levando à compreensão da seguinte generalização: em um polígono com n vértices, podemos ter (n – 3) diagonais por vértice. Como em um polígono há n vértices, então o número total de diagonais é dado por n.(n-3), expressão que nos dá o resultado duplicado, logo, a dividimos por dois.

Figura 2 - Número de diagonais de um polígono regular

$$n$$

$$\Downarrow$$

$$n\,(n-3)$$

$$\Downarrow$$

$$d = \frac{n\,(n-3)}{2}$$

Fonte: Pavanelo e Mascarine (2018).

Segundo Pavanelo e Mascarine (2018), é possível explorar esse tema ainda mais, estendendo a ideia para os prismas, com a pergunta: como calculamos o número de diagonais de um prisma?

A proposta do sétimo encontro do nosso curso era a de que o professor conjecturasse, a partir de um trabalho com o GeoGebra, sobre ideias que envolvem a demonstração de uma importante propriedade que relaciona o número de diagonais do prisma e do polígono da sua base.

Propriedade: Sejam as diagonais de um prisma, $\mathrm{D_p}$, e o número de diagonais de sua base $\mathrm{D_b}$, temos então que $\mathrm{D_p} = 2 \times \mathrm{D_b}$.

A ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Os dados produzidos foram organizados e analisados a partir de uma metodologia fenomenológica. É importante salientar que não se trata de uma abordagem fenomenológica de pesquisa. Entretanto, pelas características dos dados coletados e da questão norteadora, a utilização desse modelo de análise possibilita ao pesquisador explicitar o que compreendeu acerca do seu objeto de estudo.

Encontramos nos procedimentos da fenomenologia uma maneira de organizar os dados coletados na pesquisa, em que o pesquisador busca por uma compreensão dos sentidos atribuídos pelos sujeitos acerca do fenômeno investigado (BICUDO, 2011).

De acordo com Machado (1994), a análise do fenômeno se coloca diante de nós, por meio da leitura cuidadosa das transcrições dos vídeos e envolve dois grandes momentos: o da Análise Ideográfica e o da Análise Nomotética.

Desse modo, nos questionamos: como se dá a argumentação de um professor de Matemática, a partir de um trabalho com o GeoGebra, em relação à propriedade que trata do número de diagonais de um prisma?

Destaca-se a seguir trechos da fala de uma das professoras que nos foram mais expressivas e contribuíram para o desenvolvimento dessa pesquisa. Optamos por trazer um quadro síntese que mostra parte das análises realizadas. Na primeira coluna foi colocado o código que identifica o sujeito e a parte de qual fala se trata; por exemplo: P_1 – professor 1, Fala_2 – segunda fala destacada – na segunda coluna trazemos o trecho de fala do professor P_1. Na coluna 3, a asserção articulada, que é como o pesquisador compreende a fala do sujeito, tendo em vista o fenômeno estudado. E na última coluna apresentamos as convergências.

Quadro 1 – Análise Ideográfica das transcrições

Código	Excerto da fala do sujeito	Asserção Articulada - reescrita do pesquisador	Ideias nucleares
P_1_Fala_1:	Bom... para mostrar, primeiro vamos fazer um polígono, unindo dois pontos e vamos colocar um *x*, que é o número do vértice (pausa) e pôr o primeiro controle deslizante. Controle deslizante x, colocar de 3 a 5	A professora usa o controle deslizante para justificar a construção de um polígono de n lados	Construção de um polígono

Código	Excerto da fala do sujeito	Asserção Articulada - reescrita do pesquisador	Ideias nucleares
	(pausa) x... é, ixi, apaga, criar de novo, controle deslizante, agora vai ser v, letra v de vértice e vai de 3 a 5, incremento de quanto ele vai pular né? Um. E agora tem que mostrar, vou fazer um polígono a partir desses 2 pontos e a quantidade de vértices vai variar conforme aquele controle deslizante que é o v.		
P_1_Fala_2	Então... por aqui... eu acho que dá pra gente tentar ver a diagonal da base, porque se é um prisma qualquer. Então vamos por aqui, que tenha... 4, 4 vértices, então a diagonal, ele não pode ser esse lado e nem esse lado aqui ó. Do ponto A que nem até o B e nem até o ponto D, porque pra ele ser diagonal, o ponto ele tem que tá do outro lado, é... deixa eu ver, ele vai ter que ser, vai ter que tá oposto, não adjacente, ele não vai ser adjacente com nenhuma dessas retas, então por exemplo, eu teria (pausa), um segmento, uma diagonal aqui e uma outra diagonal aqui... Só que eu conto ela uma vez e essa aqui uma vez, porque tanto faz se eu vou, se eu tô subindo ou se eu tô descendo, aqui também, eu posso tá subindo ou posso tá descendo, então tá bom. A base aqui, ele tem 2, tem 2 aqui... Então agora vou tentar fazer no prisma.	A partir do polígono de 4 lados a professora investiga, a quantidade de diagonais e determina que são duas.	
P_1_Fala_3	Então no prisma eu vou precisar de uma altura pra... pra ele. Então eu vou colocar uma altura também. Vou colocar uma altura, mas essa altura, ela pode, é o que vai tá formando o meu prisma, porque ele tá aqui em baixo, no plano, daí ele vai	A partir do polígono construído investiga uma forma de estabelecer uma altura para obter um prisma.	Busca obter um prisma

Código	Excerto da fala do sujeito	Asserção Articulada - reescrita do pesquisador	Ideias nucleares
	conseguir subir até um ponto. Vamos colocar esse ponto uma altura, por exemplo aqui ó, daqui pra cima. Então vamos colocar um segmento, segmento não, um ponto de interseção, por exemplo, onde eles vão cruzar, essa com essa, é um ponto aqui. E agora, tem que fazer o, o *3D* lá né? Agora que complica, agora eu não sei, eu vou ter que ter um ponto que... pra ele variar aqui, pra eu formar meu polígono, por exemplo, eu tenho um ponto x(a), y(a) que é um x e y, porque... Ele vai ver que tá igual o negócio da base e num... numa mesma altura, então aqui, quando eu variar aqui ó, eu tenho esse ponto aqui ó. Então, vou fazer o prisma, que eu pego um ponto aqui embaixo e esse ponto da altura, não deu... eu viajei. Eu pego a minha base e levo nessa altura, é isso.		
P_1_Fala_4	Eu tenho, a diagonal que eu tinha feito desse lado aqui ó, e aparece aqui ó, essas 2 diagonais. Essa aqui é minha diagonal da base, agora, vamos ver quantas diagonais tem no... tem no prisma. Eu não sei explicar, mas eu posso fazer assim ó, um monte de ligaçãozinha do vértice ó. Então esse vértice D aqui ó, deixa eu virar, ó, eu tenho um, uma diagonal partindo desse ponto aqui ó, mas se eu pegar esse ponto lá, se eu pegar esse ponto e tentar ligar aqui ó, eu não vou ter a diagonal do prisma, eu vou ter o do lado do prisma, então ó, desse ponto aqui ó eu vou ter uma diagonal. Só que esse outro	A partir do polígono da base a professora identifica a diagonal da face, a aresta, do prisma e conclui que de cada vértice parte uma diagonal do prisma. Identifica que o número de diagonais do prisma é o dobro do número de diagonais da base, para o polígono de 4 lados.	Estabelece relação entre as diagonais do prisma e do polígono de 4 lados.

Código	Excerto da fala do sujeito	Asserção Articulada - reescrita do pesquisador	Ideias nucleares
	ponto que também tá aqui embaixo, eu também tenho que fazer aqui em cima. Então também vai ser um ponto, vai ser uma diagonal daqui do C até G, daí do E até o J, daí do A até o I, do I até o A aqui ó, então ó... aqui na minha base eu tenho 2, que é aquelas 2 que eu descobri aqui. E aqui eu vou ter um que parte daqui, um que parte de cada um dos vértices que são 4. Então eu mostrei, que o número de diagonais daqui, quer dizer, o número de diagonais do meu, do meu prisma, ele vai ser, é, o dobro daqui, porque se aqui eu tenho 2, aqui eu vou ter 4.		
P_1_Fala_5	Então nesse caso aqui, quando eu tenho por exemplo 5 vértices, eu tenho 2 diagonais, eu tenho até aquela formulinha que a diagonal é o, é n que multiplica n-3, ah, eu não lembro. Ah... eu sei que, eu sei que tenho que fazer isso, pra gente ver aqui, de um ponto até o outro, mas ele não pode, não pode ser coladinho, então pra gente fazer aqui um, fazer aqui um prisma, vou continuar com aquele pontinho que eu tinha.	Inicia uma investigação para o número de diagonais do prisma cuja base é um polígono de 5 lados.	Busca uma generalização para um polígono qualquer.
P_1_Fala_6 P_1_Fala_7	Então **vou pegar o segmento pra ver a diagonal**, então ó, do A eu não consigo até o G, porque aqui não formou uma diagonal, ele formou só, ele forma aqui assim, um ângulo de 90°, ele não é uma diagonal. A diagonal ele vai ser com o H, com o H que tá do outro lado e vou ter outra diagonal de A até esse ponto I, deixa eu ver se tem mais	Percebe que para ter uma diagonal do prisma não se pode unir vértices que estão no mesmo plano.	Identifica o que é uma diagonal do prisma.

Código	Excerto da fala do sujeito	Asserção Articulada - reescrita do pesquisador	Ideias nucleares
	alguma. Então ó, (pausa), da diagonal aqui ó, **eu vou ter desses 2 porque ele não vai fazer diagonal**, ele não vai fazer diagonal com, com esse aqui ó, **porque ele tá no mesmo, no mesmo plano, então ele não é do prisma, ele é desse sólido,** dessa figura do lado e é a mesma coisa com o G e é a mesma coisa quando eu olho esse J. Ele tá no mesmo plano, então ele não tem a diagonal ali.		
P_1_Fala_8	Só que, por exemplo, aqui eu tenho essa quantidade de diagonais, de diagonal, supondo ele, esse A, só que eu tenho que considerar o B que também vai ter 2, o C, calma aí, o B tem 2 que ele pega do E até B e do D até B. Do ponto C eu vou ter do C até o A, que eu já tinha, do C até o E que eu não tinha e do D, ele já tá partindo 2 aqui ó. Então aqui eu vou ter 1, 2, 3, 4, 2, 4, 6, identificar aqui com outra cor, ó (pausa). Tenho 1, opa, ó, 1, 2, 3, 4, e 5 e aqui ó, no outro prisma, eu vou ter 2 diagonais subindo.	A professora conta a quantidade de diagonais do prisma a partir dos vértices da base e conclui que de cada vértice devem partir duas diagonais.	Identifica o número de diagonais de um vértice.
P_1_Fala_9	Então se eu tenho 5 vértices e cada um vai subir 2, então vai ficar 2 × 5, que é 10. E aqui ó, a diagonal também é. Então toda vez que eu tiver a diagonal da **minha base, ele vai tá ligado com o do meu prisma. O do meu prisma sempre vai ser o... eu pego do ponto e tenho que ver quantas diagonais ele vai ligar e a mesma coisa na base**, é assim que demonstra.	Conclui que se temos na base um polígono de 5 lados ele terá de cada vértice duas diagonais, independente se consideramos os vértices da base ou do plano paralelo (prisma)	Relaciona o número de diagonais do prisma e do polígono.

Fonte: Autoria própria (2018).

O quadro acima expõe as falas de uma das professoras que participaram da pesquisa. Destacamos, em seguida, as ideias nucleares, buscando convergências que evidenciem como se desenvolve a argumentação de um professor de Matemática. Os seguintes aspectos foram identificados: a construção de um polígono com o software, a tentativa de obter um prisma e a identificação dos elementos do prisma. A interpretação à luz da interrogação que orienta o trabalho indicou uma estrutura mais geral como, por exemplo, "visualização do objeto geométrico". Esta estrutura foi selecionada como uma das categorias de análise.

A discussão sobre a visualização do objeto geométrico, segundo a perspectiva da professora, passa pela visualização do objetivo matemático, tanto o polígono como o prisma. Para Freudenthal (1973, apud SAMPAIO, 2018) a geometria tem seu significado no movimento da exploração da relação desta com o espaço experimentado. Ou seja, há necessidade de a geometria que se explora nas situações escolares estar próxima da experiência do mundo vivido. Adicionalmente, destaca-se a importância da oportunidade de pensar geometricamente, fazer conjecturas, levantar hipóteses e fazer analogias de forma a permitir a existência de um diálogo (SAMPAIO, 2018).

A visualização presente nas discussões da professora não consiste apenas no fato de ver o objeto, ou de olhar para ele num ato de contemplação, ou como ato de formar imagens mentais. Trata-se da percepção[2] do sujeito. (Sampaio, 2018). A professora constrói o polígono, identifica seus elementos e cria mecanismos para visualizar um polígono de n lados. A partir dele, constrói um prisma, e identifica os elementos que percebe serem importantes para alcançar o objetivo final – identificar o número de diagonais.

Destacamos também que a professora: estabelece relação entre as diagonais do prisma e do polígono de 4 lados, busca uma generalização para um polígono qualquer, identifica o que é uma diagonal do prisma, identifica o número de diagonais de um vértice e estabelece a relação entre o número de diagonais do prisma e do polígono. Tais aspectos indicam que a professora elabora "relações visuais entre os objetivos geométricos". A professora compara o número de diagonais do polígono de 4 lados e o número de diagonais de um prisma de base quadrada e, nessa comparação, conclui qual será o número de diagonais de um prisma com uma base qualquer. Para a análise dessa categoria, destacamos a seguinte fala da professora:

> Então se eu tenho 5 vértices e cada um vai subir 2, então vai ficar 2 × 5, que é 10. E aqui ó, a diagonal também é. Então toda vez que eu tiver a diagonal da minha base, ele vai tá ligado com o do meu prisma. O do meu prisma sempre vai ser o... eu pego do ponto e tenho que ver quantas diagonais ele vai ligar e a mesma coisa na base, é assim que demonstra (Professora, P_1_Fala_9).

Aqui ela faz uma tentativa de generalização de um polígono de 4 para o de 5 vértices. Contando o número de diagonais resultantes do prisma, encerra: "é assim que demonstra". Entendemos que o computador possibilita tanto a representação de um objeto geométrico, quanto o teste de ideias ou hipóteses, levando à criação de um mundo abstrato e simbólico. Entretanto, nesse caso, não ocorreu a transposição das hipóteses vistas, ou percebidas, para o mundo simbólico matemático.

Esse fato pode ter ocorrido, talvez por dificuldade na utilização das funcionalidades do software, ou o número reduzido de encontros para a discussão dessa propriedade. Com um pouco mais de tempo para discutir e analisar o caminho que estava traçando, a professora poderia se aproximar mais da elaboração de uma simbologia matemática, ou testar algumas de suas hipóteses em relação ao número de diagonais do prisma.

Frank (2019) discute em seu trabalho o arrastar no processo de geração de conjecturas em um ambiente de geometria dinâmica. Ela conclui que as evidências teóricas desenvolvidas durante o processo de geração de conjecturas no ato de arrastar num ambiente de geometria dinâmica não são suficientes para provar a conjectura e que isso revela implicações educacionais. A autora aponta que a geometria euclidiana é uma teoria apoiada em evidências. Mas, os dados do seu trabalho sugerem a insuficiência de evidências teóricas em relação ao que é necessário para provar a conjectura. Do ponto de vista educacional, promover o desenvolvimento de conjecturas para provar propriedades já é em si um ponto positivo e importante.

CONCLUSÃO

Conforme descrito ao longo do trabalho, a riqueza de uma demonstração pode não residir somente na prova da tese nele contida, mas também no conhecimento desenvolvido nas tentativas que se faz na busca da demonstração. Foram citados autores que defendem que o caminho para se chegar até a demonstração é tão importante quanto o resultado final. O trabalho com tecnologia pode ajudar nesse processo, conduzindo para que a demonstração atinja sua função na construção do conhecimento.

Entendemos que construções, figuras e esboços de gráficos podem mostrar resultados corretos e são capazes de sugerir caminhos que permitem o desenvolvimento do raciocínio lógico e, com isso, germinar o processo de demonstração, pois podem incentivar o levantamento de hipóteses e teses.

Acreditamos que o trabalho com computadores pode auxiliar o processo dedutivo, e em demonstrações. Mas, para que isso ocorra, é necessário que haja a interferência do homem para que a demonstração seja concluída ou retomada sobre outras perspectivas caso o resultado esperado não seja alcançado. Portanto, como aponta Batistela; Barbariz e Lazari (2016), o computador pode estar presente na atividade de demonstrar, mas isso não exime a presença da criatividade e intuição do matemático que sempre conjectura e avança em relação aos resultados obtidos.

No trabalho apresentado percebemos esse fato, quanto discutirmos a propriedade sobre o número de diagonais de um prisma. Havia a expectativa de que o professor conjecturasse, a partir de um trabalho com o GeoGebra, sobre ideias que envolvem a demonstração dessa propriedade. E, ao nos questionarmos sobre como se dá a argumentação de um professor de matemática em relação a essa propriedade, a análise dos dados nos levou a uma categoria geral: visualização do objeto geométrico.

A atividade proposta nos mostrou que o computador possibilita a representação de um objeto geométrico para se testar ideias ou hipóteses, as quais levam à criação de um mundo abstrato e simbólico. Mas identificamos que, no caso discutido, não ocorreu a transposição das hipóteses vistas, ou percebidas, para o mundo simbólico matemático.

Entendemos que o professor, ao comunicar suas ideias sobre a possiblidade de demonstração da propriedade apresentada, compartilha sua experiência a respeito dessa nova tecnologia, lançando-se num exercício de comunicar para o outro suas ideias. De acordo com Garnica (2001) quando nos comunicamos com o outro, sempre fica um sentido, tal como fagulhas de compreensão com as quais se reconstroem cada um ao seu modo, as experiências vividas.

A partir das referências pesquisadas, percebemos que o tema da demonstração é pouco debatido, tanto por professores como por formadores e as pesquisas no Brasil não são muito comuns (PIETROPAOLO, 2005). Existe, por exemplo, a necessidade de um debate mais intenso sobre como a demonstração, ou a argumentação matemática, é trabalhada nos cursos de Licenciatura em Matemática e de como isso reflete na postura do futuro professor diante dela. Esse é um desafio a ser explorado por pesquisas e práticas futuras.

Demonstration using technology: a study on the number of diagonals of a prism

ABSTRACT

This work presents an investigation about how the teacher can understand an activity related to the number of diagonals of a prism, thought the usage of digital technology. Initially, theoretical considerations related to the idea of demonstration based on work with digital technologies are presented. In this work, we will understand the demonstration in mathematics as discussed in Mod (2016) and Bicudo, I. (2002), where they highlight that the richness of a demonstration may not only reside in the proof of the thesis contained therein, but in Mathematics which is developed by the demonstration attempts, underlining that the path in the development of an idea is as important as the final result. We understand that the use of the computer promote the discovery of new ways, both for teachers and students, as for mathematicians, to develop a mathematical demonstration, while requiring the existence of creativity and intuition. The analysis is conducted as a qualitative research, developed according to a case study with mathematics teachers, and using phenomenology as a methodology of data analysis. The analysis of the transcriptions generated during the meetings with the mathematics teachers of a state school in Aparecida city is proposed. The contribution that GeoGebra software makes to the process of this geometry demonstration is highlighted. The computer was the assistive technology that enabled the representation of a geometric object, supporting the evaluation of ideas and hypotheses that lead to the creation of an abstract and symbolic world. It was identified that, in the present case, there was no transposition of the hypotheses seen, or perceived, to the symbolic mathematical world.

KEYWORDS: Demonstration. Geometry. Digital Technology. Mathematics Education.

NOTAS

1 Por meio do programa São Paulo Faz Escola, no ano de 2008, os educadores que atuavam nas unidades da rede estadual de ensino receberam o Caderno do Professor. Esse material tinha como objetivo auxiliar os docentes no preparo das aulas e direcioná-los quanto ao desenvolvimento de atividades com os alunos dentro das disciplinas de Matemática, Língua Portuguesa, História, Filosofia, Química, Física, Biologia, Sociologia, Inglês, Geografia e Educação Física. O material pedagógico foi desenvolvido por especialistas da Educação com a proposta de unificar o ensino oferecido nas mais de cinco mil escolas da rede estadual. O conteúdo corresponde às bases estipuladas no Currículo Oficial do Estado de São Paulo daquela época.

2 Ou seja, não são representações do visto que se expõe, mas expressões do percebido, modos de dizer do que se mostra ao sujeito a partir de seu olhar intencionado, voltado para o percebido (Sampaio, 2018).

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. 5 ed. São Paulo, Martins Fontes, 2007. 1026 p.

ALMEIDA, M.E. **Informática e formação de professores**. Secretaria de Educação à Distância. Brasília: Ministério da Educação, Seed, v.1 e 2, 2000.

BATISTELA, R. de F.; BARBARIZ, T. A. M.; LAZARI, H. Um estudo sobre demonstração matemática por/com computador. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, Ed. Filosofia da Educ. Matemática, p. 204-215, 2016.

BICUDO, I. Demonstração em matemática. **Bolema**, Rio Claro - SP, v. 15, n. 18, set. 2002. p. 79-90, 2002.

BICUDO, M.A.V. A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **RBECT,** v.15, n.2, mai/ago. 2012.

BORBA, Marcelo C. Educação matemática a distância online: balanço e perspectivas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, n. 11, p. 349-358, 2012.

FERREIRA, M. J. A. **A constituição e a produção do conhecimento matemático ao ser-com o computador**. 2019. 207 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

FILHO, D.C. de M. **Um convite à Matemática**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 455 p.

FOSSA, J.A. **Introdução ás técnicas de demonstração na Matemática**. 2 ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FRANK, A. B. Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. **ZDM Mathematics Education**. Springer, 2019.

GARNICA, V. M. É necessário ser preciso? É preciso ser exato?: Um estudo sobre argumentação matemática ou Uma investigação sobre a possibilidade de investigação. In: CURY, H. N. (org) **Formação de Professores de Matemática:** uma visão multifacetada. EDIPUCRS: Porto Alegre. 2001.

LOUREIRO, C.; BASTOS, R. Demonstração – uma questão polémica. Ensino e Aprendizagem da Geometria. **Covilhã: Secção de Educação Matemática e Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SPCE)**, p. 105-128, 2002.

LOURENÇO, M. L. A demonstração com informática aplicada à educação. **Bolema**. Rio Claro, v. 15, n.18, p. 100-111, 2002.

MACHADO, O. V. M. Pesquisa Qualitativa: Modalidade Fenômeno Situado. In: BICUDO, M. A. V.; ESPOSITO, V. H. C. (Org.) **A pesquisa qualitativa em educação:** um enfoque fenomenológico. Piracicaba: Editora Unimep, p. 35-46, 1994.

MOD, L.F.A. **O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomantanus:** um estudo de suas demonstrações mediado pelo Geogebra. 2016. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2016.

NAGAFUCHI, T.; BATISTA, I. de L. O que é demonstração? Aspectos filosóficos. In: **Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós Graduação em Educação Matemática**, 12, 2008. Rio Claro: UNESP, 2008.

PAVANELO, E.; MASCARINE, V. Prismas: Construindo e Explorando formas no espaço. In: PAULO, R. M.; FIRME; I.; BATISTA, C. **Ser Professor com Tecnologias Digitais:** Sentidos e Significados. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, 25, 105-132, 2006.

SAMPAIO, S. R. **Geometria e visualização:** ensinando volume com o software geogebra. 2018. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP, Rio Claro, 2018.

SANTOS, M.C. **Investigando provas e demonstrações matemáticas por alunos do ensino médio:** realidades e necessidades. 2015. 145 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

Recebido: 02 dez. 2019
Aprovado: 29 abr. 2020
DOI: 10.3895/actio.v5n2.11355
Como citar:
PAVANELO, E.; ALMEIDA, A. C. de P. L. Demonstração com tecnologia: um estudo sobre o número de diagonais de um prisma. **ACTIO**, Curitiba, v. 5, n. 2, p. 1-21, mai./ago. 2020. Disponível em: <https://periodicos.utfpr.edu.br/actio>. Acesso em: XXX
Correspondência:
Elisangela Pavanelo
Rua Corifeu de Azevedo Marques, n. 3202 Ap. 103C. Jardim das Indústrias, São José dos Campos, SP, Brasil.