

## **ESTUDANDO VOLUMES: POSSIBILIDADES NO ENSINO DE GEOMETRIA COM O GEOGEBRA**

**Raissa Samara Sampaio**

Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, e-mail: raissa.samara@yahoo.com.br

**Rosa Monteiro Paulo**

Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, e-mail: rosamonteiropaulo@gmail.com

**Vanessa de Oliveira**

Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, e-mail: vanessadeoliveira31@yahoo.com

### **RESUMO**

Este artigo apresenta recortes de um trabalho desenvolvido com o *software* GeoGebra para ensinar geometria. O interesse pelo tema “ensino de geometria com tecnologias” surgiu na graduação quando, para o Trabalho de Conclusão de Curso em Matemática, Discutiram-se as potencialidades do *software* GeoGebra para a aprendizagem geométrica, mais especificamente para o desenvolvimento da visualização. Esse interesse se ampliou e impulsionou as autoras a novas investigações no mestrado com o objetivo é discutir o modo pelo qual, com as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), pode-se desenvolver, com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, a visualização. A postura assumida na pesquisa é fenomenológica, o que implica considerar as possibilidades de produção de conhecimento pelo aluno. Para o trabalho com os alunos foram elaboradas tarefas que permitissem analisar a expressão do raciocínio quanto à manipulação do *software*. A pesquisa possibilitou compreender que a exploração propiciada pelo *software* permite aos alunos levantar hipóteses, fazer conjecturas, testar caminhos e concluir ideias. Ou seja, os alunos se envolvem com o fazer matemática colocando-se em uma postura crítica que os leva a investigar as construções e respectivas propriedades das figuras.

**Palavras-chave:** Volume; Educação Matemática; *Software*; Ensino Fundamental.

### **ABSTRACT**

This paper presents clippings from a paper developed with GeoGebra software to teach geometry. The interest in the theme of "teaching geometry with technologies" arose in the graduation when, for the final paper in Mathematics, we discussed the potentialities of the software GeoGebra for the geometric learning, more specifically for the development of the visualization. This interest was broadened and stimulated us to new investigations in the master program where the objective is to discuss how, with the Digital Technologies of Information and Communication (DTIC), can develop, with the students of the 6th year of Elementary Education, the visualization. The posture assumed in the research is phenomenological, which implies considering the possibilities of knowledge production by the student. For the work with the students we elaborated some tasks that allowed to analyze the expression of their reasoning when there is manipulation of the software. From what the research shows, it is understood that the exploration provided by the software allows students to hypothesize, make conjectures, test paths and conclude ideas. That is, students get involved in doing math by putting themselves in a critical posture that leads them to investigate constructs exploring properties of figures.

**Keywords:** Volume; Mathematical Education; Software; Middle School.

## INTRODUÇÃO

Não se pode negar que as tecnologias ocupam um espaço de destaque no cotidiano das pessoas, permeando relações de trabalho e atividades pessoais. A discussão sobre tecnologias em sala de aula urge, sobretudo com um olhar crítico sobre seus usos nas práticas educacionais. Assumir o uso de determinado recurso tecnológico sem critérios pode inferir em diferenças nas práticas didático-pedagógicas. Porém, não se pode garantir alterações significativas nos modos de ensinar e aprender. É necessário conhecer as potencialidades das tecnologias e discutir como esta pode proporcionar vantagens para os docentes e discentes.

O avanço da presença de tecnologias na educação tem sido discutido pelas políticas educacionais. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) já destacavam sua importância, afirmando que elas poderiam ampliar o desenvolvimento de habilidades como a escrita, leitura, visão, audição, criação e proporcionar um ambiente de aprendizagem em que se desenvolvam “novas formas de comunicar e conhecer” (BRASIL, 1998, p. 34).

Mas a pergunta central é “como?” Isto é, embora se tenha clareza das mudanças, o modo pelo qual elas poderão contribuir para uma forma de ensino diferenciada é uma incógnita. Se, por exemplo, simplesmente se transferir o que é feito com lápis e papel ou na lousa para o computador, nada além da forma de apresentação do conteúdo estará sendo alterado. Para que as tecnologias transformem o ambiente de ensino é preciso ter clareza de suas potencialidades e das possibilidades de aprendizagem.

As tecnologias no ambiente escolar, apoiado pelas políticas educacionais, no ensino de geometria, favorecem a introdução da demonstração e do raciocínio dedutivo no desenvolvimento de situações-problemas. O enfoque é o pensamento geométrico que, segundo os PCN, “desenvolve-se inicialmente pela visualização: as crianças conhecem o espaço como algo que existe ao redor delas” (BRASIL, 1998, p. 39).

Nas diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais para a educação básica, lê-se que na formação do estudante é preciso relacionar o conhecimento e o trabalho, e assim “garantir condições para que o aluno construa instrumentos que o capacitem para um processo de educação permanente” (BRASIL, 1997, p. 28). O texto menciona a importância do uso de computadores como meio de aprendizagem.

Porém, a qualificação do professor/a para trabalhar com estas máquinas está relacionada com às atividades escolares de ensino e aprendizagem, à estrutura curricular e à política educacional do país. O documento menciona a importância da formação continuada do docente

para que ele tenha condições de lidar com os recursos televisivos e de multimídia. “O desempenho dos alunos remete-nos diretamente à necessidade de se considerarem aspectos relativos à formação do professor” (BRASIL, 1997, p. 24).

Todavia, as falhas de formação também podem estar na qualidade da formação inicial e nos investimentos educativos e profissionais dos mestres. Não seria somente a quantidade de cursos e técnicas, mas também a qualidade e as condições de trabalho que estão sendo ofertadas. Por outro lado, as vivências propostas de situações comunicativas e intervenções demandam a atuação de todos os agentes educativos para criar significados entre os novos conteúdos e os saberes e conhecimentos previamente adquiridos nas histórias pessoais e educativas.

Por mais que o professor, os companheiros de classe e os materiais didáticos possam, e devam, contribuir para que a aprendizagem se realize, nada pode substituir a atuação do próprio aluno na tarefa de construir significados sobre os conteúdos da aprendizagem. É ele quem modifica, enriquece e, portanto, constrói novos e mais potentes instrumentos de ação e interpretação (BRASIL, 1997, p. 37).

Em 2017, foi criada a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que define quais conteúdos são essenciais para as modalidades da Educação Básica e Educação Superior, constituída por aprendizagens de competências para a vida e o trabalho – conhecimentos, habilidades, valores e atitudes. Esta política pública orienta a formação do professor e a aquisição de materiais didáticos. No artigo VII e 17, lê-se,

VII. Criar e disponibilizar materiais de orientação para os professores, bem como manter processos permanentes de desenvolvimento docente, que possibilitem contínuo aperfeiçoamento da gestão do ensino e aprendizagem, em consonância com a proposta pedagógica da instituição ou rede de ensino (p. 52); art. 17. Na perspectiva de valorização do professor e da sua formação inicial e continuada, as normas, os currículos dos cursos e programas a eles destinados devem adequar-se à BNCC, nos termos do §8 do Art. 61 da LDB, devendo ser implementados no prazo de dois anos, contados da publicação da BNCC, de acordo com Art. 11 da Lei nº 13.415/2017. §1º A adequação dos cursos e programas destinados à formação continuada de professores pode ter início a partir da publicação da BNCC (BRASIL, 2017, p. 57).

O documento menciona a amplitude dos recursos didáticos das tecnologias digitais de comunicação e informação para apoiar a mediação dos conteúdos dos atores do processo ensino e aprendizagem. Há advertências para fazer uso de linguagens, códigos e tecnologias com olhar crítico e reflexivo, compreendendo os significados e as consequências sociais e culturais dos avanços computacionais. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e

comunicação [...] nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva” (BRASIL, 2017, p. 51).

Santos (2006) aponta as TDIC como geradora de situações atrativas aos alunos e que os auxiliam na compreensão de conteúdos matemáticos. Estas propiciam a oportunidade de gerar situações que despertem o interesse do aluno e possibilitem a investigação de temas propostos. A discussão acerca das TDIC está na relevância do uso desses recursos para o desenvolvimento de tarefas que envolvam a visualização. Costa (2000) valoriza aspectos visuais para o ensino de geometria através de manipulações, em que o aluno é posto a levantar, conjecturar, testar e validar hipóteses. A tecnologia mostra-se aliada ao ensino de matemática, permitindo a exploração e investigação de conceitos e formas, e amplia as possibilidades de trabalho com a visualização, especialmente com os aplicativos de *software* de geometria dinâmica.

Neste artigo centram-se as discussões no ensino da geometria, particularmente o desenvolvimento da visualização propiciado pelas tecnologias com um *software* de geometria dinâmica – o GeoGebra. O objetivo é discutir esse uso, com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola de São José dos Campos/SP. Foram organizadas atividades com conteúdo de geometria espacial trabalhados no sentido de explorar habilidades de visualização. Para a construção da proposta de visualização e as potencialidades de trabalho com resolução de problemas, escolheu-se o *software* GeoGebra por entender que ele nos permite explorar figuras tridimensionais que permeiam o trabalho com volume de sólidos geométricos.

A opção metodológica foi qualitativa de abordagem fenomenológica, para compreender situações matemáticas investigadas com o *software* GeoGebra. A fenomenologia, mais do que um método de pesquisa, é uma postura do pesquisador que perpassa desde a seleção/elaboração das tarefas até a própria dinâmica da proposta didática que visa a aprendizagem do aluno.

## **2 TECNOLOGIAS E VISUALIZAÇÃO NA PRODUÇÃO DE CONHECIMENTO MATEMÁTICO**

A tecnologia é um agente transformador da/na sociedade atual, como já apontavam os PCN no final da década de 1990. Os estudos na área de Educação Matemática reforçam a ideia de que as tecnologias possibilitam transformações no modo pelo qual o conhecimento é

produzido, e por estar “cada vez mais em nosso cotidiano” (BORBA, 2002, p.138). Não se pode ignorá-las.

Os modos de aprender e ensinar matemática estão ganhando novos contornos, que não limitam as formas de usar as potencialidades do cérebro, mas abrem possibilidades de novos olhares aos objetos matemáticos, perspectivas a serem consideradas, dimensões ainda não exploradas e inovações no uso das tecnologias. Há também os aspectos técnicos e pedagógicos das TDIC que precisam passar por revisões constantes, reflexões e ações durante os processos de produção de conhecimento. O *software* de matemática, por exemplo, é TDIC de grande discussão em Educação Matemática, pois, corroborando com Costa (2000), possibilitam a investigação, aguçam a curiosidade dos alunos, abrem oportunidades de domínio, iniciativa e aumento da autoestima. Além disso, possuem interfaces interativas que podem ser selecionadas de acordo com os objetivos a serem atingidos por meio de diferentes exercícios de aprendizagem.

Essas características devem ser consideradas no momento da escolha do *software*, junto às vantagens de sua utilização em termos de organização da informação, de oportunidade de colaboração, sociabilidade e potencial investigativo. Destaca-se a integração entre o uso do *software* e os recursos de cada escola, os currículos, o professor, o planejamento e as aulas.

O objetivo do texto proposto foi seguir estas recomendações com os alunos participantes da pesquisa. A busca do *software* foi fundamentada nas possibilidades de explorar os conceitos de volume de sólidos geométricos a partir da visualização. Considerando a relevância da investigação e a possibilidade de movimentação de um sólido geométrico construído, optou-se pelo software GeoGebra. Este permite relacionar aspectos da álgebra com os de geometria. Possui constantes atualizações por parte dos criadores. Atualmente, ele traz a janela de visualização tridimensional (3D).

Trata-se de um aplicativo de matemática disponível para uso desde 2013, gratuito, que combina conceitos de geometria e de álgebra, em linguagem Java, o que torna viável a instalação em escolas da rede pública de ensino. O uso pode acontecer em todos os níveis de ensino. Esta multiplataforma educacional permite interfaces amigáveis e está traduzida em 55 idiomas. Corroborando com Costa (2000) e Paulo (2006), a construção do conhecimento matemático passa por conjecturas, hipóteses e recursos relevantes com a visualização de possibilidades para o ensino de álgebra e geometria.

Revigorando estas ideias, Flores (2003) reconhece que a habilidade de visualização é complexa, pois envolve características que ultrapassam a capacidade visual do usuário. Mas

especificamente, se respaldam nas experiências individuais e coletivas dos alunos para a construção geométrica. Tal aspecto provoca a necessidade de outros possíveis modos de olhar para a geometria. De acordo com a autora,

Há um modo de olhar que talvez já não seja compatível com as novas formas de imagens que se mostram a nós. Das telas do cinema que exibem as imagens gráficas, ao computador com suas imagens virtuais, a exigência para os olhos é de total movimento. Parece-me, então, que somos solicitados a construir uma nova maneira de conceber o espaço, ou seja, um outro modo de olhar o espaço e os objetos dispostos no espaço, que já não seja mais aquele para o qual fomos educados desde três, quatro, cinco séculos atrás, e que se constitui no modo predominante e único de olhar (FLORES, 2003, p.48).

Costa (2000) salienta que o aplicativo combina linguagens, permite a representação e a interpretação de definições e conceitos de uma situação problema, e ao mesmo tempo organiza em movimento, as figuras planas e espaciais. Contém técnicas que auxiliam na medição, construção, articulação e transformação de objetos. Está aberto para a “interdisciplinaridade com as ciências e as artes; paradigma da modelização matemática; predadora de aplicações assombrosas e relações interessantes. Métodos mais empíricos facilitam o aprendizado, diz o matemático espanhol Claudi Alsina em entrevista para o jornal de Aragón.

Sí, es una actitud diferente para construir una clase del siglo XXI, que no es sólo la emisión y recepción de mensajes escritos, sino que debe ser mucho más complejo. Aquí en Aragón hay un buen ejemplo con el programa Matemática Vital, que no es simplemente dar una clase, sino ofrecer elementos múltiples con laboratorio, revistas, conferencias, etcétera. Eso es lo que hace camino hacia la clase del siglo XXI. Esta educación espacial, además, debe darse en cualquier nivel, y especialmente en las asignaturas que inciden en estas cuestiones, no solamente matemáticas, sino también plástica, o física. Es tener un laboratorio donde experimentar, o hacer plástica tridimensional, no sólo pintura (ALSINA, 2007).

Os PCN do ensino fundamental afirmam que o trabalho realizado pela “exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato [...] permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento” (1998, p. 39). Estas práticas fortalecem a ideia do ensino de geometria através da exploração e da análise. Costa (2000), em concordância, destaca a importância do “fazer” matemática, pois quando o sujeito faz, a descoberta “com os próprios olhos e mãos, são mais convincentes e surpreendentes” (COSTA, 2000, p. 157).

Considerando a importância dos aspectos da visualização de construção e raciocínio, exploração, investigação e análise, para e no ensino de geometria e álgebra, é possível desenvolver a lógica matemática. Os autores Paulo (2006), Santos (2009), Flores, Wagner e Burato (2012) e Valente (2014) apresentam discussões de natureza qualitativa e exploratória

das propriedades matemáticas das figuras. É fundamental fazer as conexões entre intervenções didáticas e as potencialidades do software, com movimentos dinâmicos, os quais permitem trabalhar com os significados matemáticos de conceitos geométricos espaciais.

Paulo (2006), ao tratar da visualização, interroga o sentido que as figuras têm para a produção do conhecimento matemático e afirma que “as figuras são um apelo visual relevante para a atribuição de significados às situações geométricas” (PAULO, 2006, p. 4). Em outras palavras, a figura deve ser o objeto que vai desencadear o pensar. Isso porque, quando o aluno visualiza um gráfico para realizar uma investigação, por exemplo, ele necessita explorar aspectos figurais possibilitados pela visualização. Para ser capaz de “ver”, entender os enunciados e analisar os dados, ele solicita a ajuda do professor para aprofundar conceitos e aplicações dos conhecimentos de um conteúdo. Assim, o “ver” “não é apenas o ato de visão atribuído ao órgão sensorial “olho”. O “ver” está relacionado à capacidade de o sujeito refletir sobre a situação. Ou, como diz Santos (2009), “analisar o que se percebe como parte do mundo real e memorizar aspectos que caracterizem os objetos vistos” (SANTOS, 2009, p.21).

Porém, requisita-se cuidado com a “memorização” dos aspectos vistos. Tal qual destacam Flores, Wagner e Burato (2012), acerca do sentido da visualização em matemática, apenas montar a imagem mentalmente não é suficiente para a compreensão. O processo depende da “habilidade demonstrada pelo aluno em lidar com aspectos visuais para alcançar o entendimento matemático” (FLORES, WAGNER, BURATO, 2012, p. 34).

Considerada a importância da complementação pedagógica, a visualização propicia maneiras diferentes de expressar a linguagem matemática. Nisto está a relevância de utilizar um *software* geométrico como um aplicativo otimizado para o desenvolvimento das habilidades demandadas para a concepção de critérios, lógicas e preceitos da visualização. Compreender o que é percebido no ensino de geometria, explorando as potencialidades do *software* geométrico, também promove a interação do aluno com o meio e as tecnologias (VALENTE, 2014).

A escolha do *software* é importante uma vez que condiciona as possibilidades de exploração das tarefas construídas com e pelos sujeitos. Há de se considerar quais potencialidades cada *software* possui e indagar sobre o quão favorável este será para o desenvolvimento da tarefa proposta e das habilidades pretendidas. Entendemos que o GeoGebra possibilita essa interação, já que oferece a oportunidade de exploração do objeto.

O aluno, em um movimento investigativo, pode lançar conjecturas abrindo-se ao diálogo com o que na tela do computador se mostra como resultado das hipóteses construídas. Mediante a dinamicidade favorecida pelo *software*, analisa-se o obtido, construindo argumentos e

validando ou refutando as conjecturas iniciais e finais. Isso promove relações e movimentos diversos entre as pessoas e os computadores, entre alunos, professor, objeto e *software*, multiplicando as possibilidades de diálogo e de produção de conhecimento.

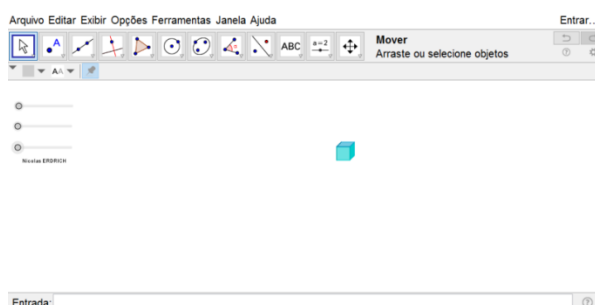
### 3 O DESENVOLVER E O ANALISAR O GEOGEBRA

Para o trabalho sobre volume de sólidos desenvolvido com os alunos do 6º ano do ensino fundamental, foram realizados sete encontros com duração de uma hora cada. Para este texto foram selecionadas três tarefas, as quais foram transformadas em propostas para a presente discussão. Procurando preservar a identidade dos participantes, utilizou-se um conjunto de pseudônimos.

Para iniciar o desenvolvimento das tarefas, apresentou-se para os alunos o *software* Geogebra, com as ferramentas disponíveis e os modos de utilização. Neste primeiro encontro, após a apresentação do *software*, os alunos puderam explorar livremente suas potencialidades. Em seguida foi proposta uma tarefa sobre planificações. Para realizá-la os alunos tiveram contato com as duas janelas do *software*: a janela de visualização 2D e a janela 3D.

A tarefa que efetivamente envolvia a ideia de volume só foi desenvolvida no terceiro encontro, quando os alunos já estavam familiarizados com o *software*. Utilizando uma atividade<sup>1</sup> proposta pela comunidade GeoGebra o aluno se deparou com uma tela que contém um cubo de aresta 1u (assumindo u como unidade de medida) e três controles deslizantes (ver figura 1).

Figura 1 – Cubo e controles deslizantes no GeoGebra.



Fonte: elaborado pelos autores.

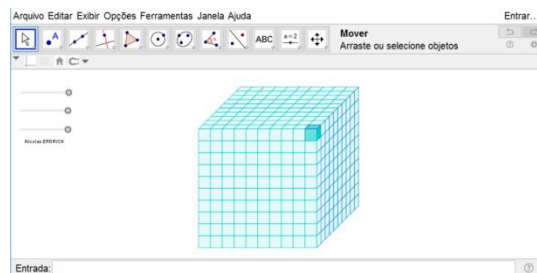
---

<sup>1</sup> Esta atividade foi proposta na comunidade de materiais do GeoGebra, intitulada “Volume d’un pavê”, feita em 14 de janeiro de 2014 por Nicolas ERDRICH. Disponível em: <<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/69361>>. Acesso em 27 nov. 2015.



Nesta tarefa o aluno, através dos controles deslizantes, controlava a quantidade de cubinhos contidos na altura, no comprimento e na profundidade do cubo (função dos três controles deslizantes). O máximo permitido pelos controles deslizante era formar um cubo de aresta 10u, assim como mostra a figura 2.

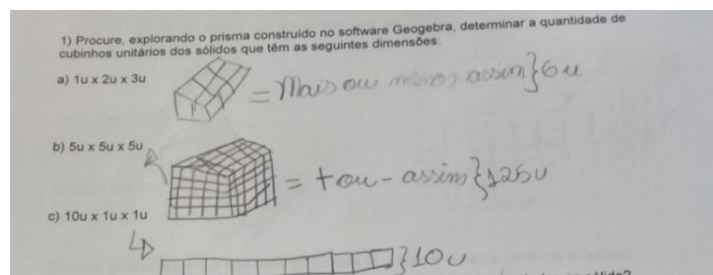
Figura 2 – Cubo de aresta 10u



Fonte: elaborado pelos autores.

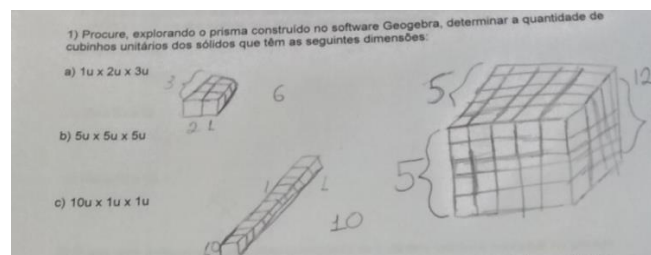
Após a construção e manuseio do *software*, os alunos avaliaram o que fizeram e levantaram questões. Nesta atividade, houve uma tentativa de desenhar o volume conforme visualizado no *software* (ver figuras 3 e 4).

Figura 3 – Resposta 1 da Alice.



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 4 – Resposta 1 do Luiz.



Fonte: elaborado pelos autores.

Apesar da tarefa escrita não pedir o desenho da figura, já que a visualização se dava pela manipulação do objeto no *software*, Alice e Luiz desenharam o objeto mostrado na tela do computador segundo o entendimento do exercício. O motivo do desenho indica que o aluno procura retratar o que foi visto na tela o que, de certo modo, faz parte de sua resposta ou serve

para justificá-la. Há mesmo uma auto-avaliação de seus desenhos, pois Alice indicou o “mais ou menos assim” em texto e depois com o auxílio dos sinais matemáticos de soma e subtração. Ou seja, o aluno mostra utilizar a figura como recurso para responder o que lhe foi solicitado, assim como discute Paulo (2006).

Reitera-se, tanto pelo que foi respondido pelos alunos, quanto pela vivência dos autores em sala de aula, que a visualização é relevante para os alunos, os quais sentem a necessidade de “ver” o que estão calculando e fazendo. Assim, a figura se torna um “suporte” para o aluno. Ou seja, ao estarem manipulando no *software* a figura, a resposta é motivada, ela é vista ou é dada por meio da imagem que vai se alterando e permitindo ao aluno entender, e mesmo contar ou organizar uma estratégia, qual seria a quantidade de cubinhos existentes em cada variação unitária (PAULO, 2006).

Entende-se que o *software* foi usado para investigação, assim como propõe os documentos governamentais (BRASIL, 1998). Ou seja, há uma intenção de ensino e aprendizagem por meio do GeoGebra, com discussões que levem à compreensões de conteúdos. Considera-se que a proposta é distinta da aula planejada somente com o apoio da lousa e giz. As práticas com materiais distintos, em especial as que permitem a visualização, alcançam mais diretamente os objetivos definidos. O *software* é utilizado para investigar ou explorar situações que levam o aluno a pensar sobre o objeto feito, a se sentir sujeito de sua aprendizagem.

A dinamicidade do software também é destacada na fala do aluno Marcos, quando questionado acerca do volume do cubo de aresta 10u.

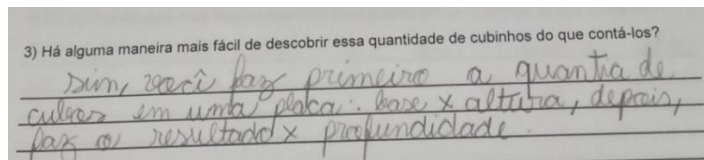
Professora, mas é óbvio que é mil! Olha só: Aqui a gente tem 10 [Marcos mostrava a fileira da altura do cubo], aqui a gente tem outro 10 [Marcos mostrava a fileira do comprimento com variando a quantidade com o controle deslizante], então aqui a gente tem 100 [Marcos deixou a profundidade em zero e ficou apenas com o quadrado da frente]. Então aqui tem: 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000!!! [Neste momento Marcos mostrava as fileiras que iam se formando na profundidade através da movimentação do controle deslizante]. (DEPOIMENTO 1, 2016).

A fala de Marcos revela o modo pelo qual o uso do *software*, em especial o movimento proporcionado pelos controles deslizantes, lhe permitiu conjecturar, e ao mesmo tempo, testar e validar as hipóteses. Costa (2000) indica a importância de tais habilidades para o ensino de geometria.

Avançando na investigação, foi questionado se haveria um modo de saber a quantidade de cubos que haveria no total (no cubo maior) sem usar a contagem. Os alunos foram levados a pensar sobre a quantidade de cubos que formaram o sólido, utilizando a manipulação

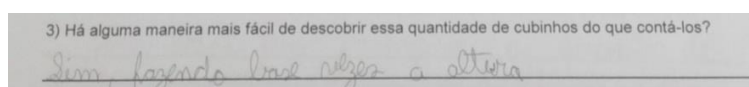
permitida pelos controles deslizantes para chegar às ideias matemáticas e elaborar conclusões. Destacam-se, por exemplo, duas respostas abaixo (ver figuras 5 e 6).

Figura 5 – Resposta 3 da Alice.



Fonte: elaborado pelos autores.

Figura 6 – Resposta 3 do Marcos



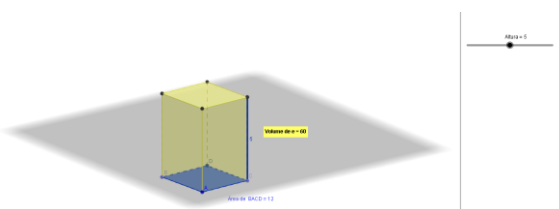
Fonte: elaborado pelos autores.

Nota-se que os alunos tendem a uma resposta que se direciona para a fórmula de volume do prisma: determinar o produto da área da base pela altura. Embora estando no 6º ano do ensino fundamental, os alunos ainda não têm conhecimentos suficientes para escrever a sentença matemática. A ideia é explícita, com base no investigado via *software*, e o importante não é a máquina, mas sim a relação do aluno com ela, como retrata Valente (2014).

### 3.1 A SEGUNDA TAREFA

Na segunda tarefa proposta, os alunos tiveram contato com a construção de prismas de base retangular. A intenção era investigar a relação entre as medidas das arestas do prisma e o seu volume, e posteriormente, construir os sólidos. Na figura 7 está um exemplo da do prisma feito pelos autores no software.

Figura 7 – Sólido construído pela pesquisadora.



Fonte: elaborado pelos autores.

A partir da exploração e construção da experiência assistida pelo software, os alunos foram estimulados a pensar sobre os valores encontrados, e se havia alguma relação entre os mesmos. Os questionamentos propostos os fizeram lançar-se na busca por relações entre as medidas da construção feita por eles no *software*. A seguir, vê-se na figura 8 a tabela preenchida por um aluno a começar das observações feitas com e no GeoGebra 3D.

Figura 8 – Tabela Luiz.

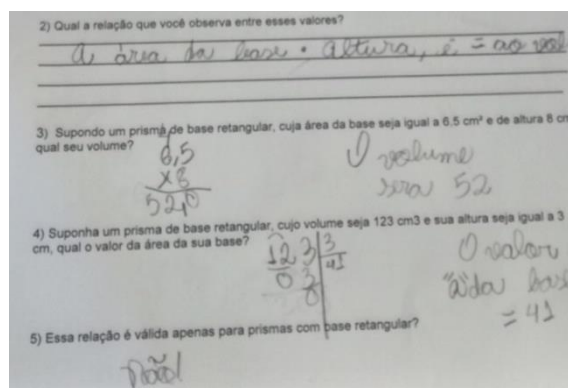
1) Anote na tabela a seguir cinco valores do volume do prisma encontrando com suas respectivas áreas da base e alturas.

Área da Base	Altura	Volume
10,67	5,6	93,352
35,6	6,34	225,86
17,11	4,54	72,74
6,1	2,01	2,31
18,72	7	131,41

Fonte: elaborado pelos autores.

O valor da área da base e do volume foi dado pelo *software* mediante a variação da altura. A partir da tabela, foi solicitado aos alunos que registrassem na folha da atividade suas observações sobre as possíveis relações entre os valores encontrados para a altura, o volume e a área da base.

Figura 9 – Relações feitas por Alice.



Fonte: elaborado pelos autores.

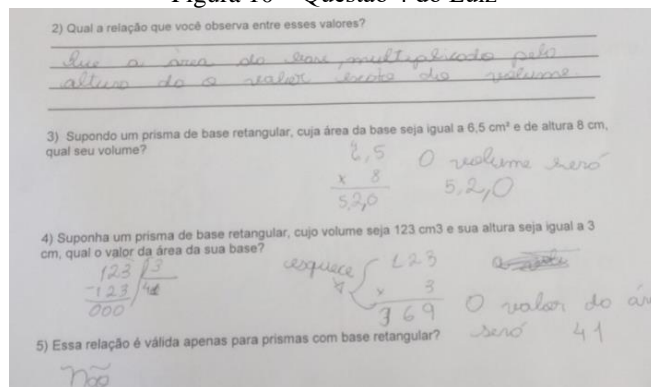
Visando compreender o sentido que a aluna estava dando ao se referir à “área da base” (item 2 da figura 9) questionou-se: Alice, na resposta da primeira pergunta você escreveu “a área da base multiplicada pela altura, é igual ao volume”. Poder-se-ia dizer que a área da base x altura é igual à área do retângulo? Alice respondeu: “Não, professora! É toda a base! Inteira. [Fazendo gestos com a mão indicando o polígono da base], e depois vezes a altura”. Isso mostra

que o sentido da possibilidade de variação do polígono da base havia sido compreendido, e que a aluna entendeu sua utilização na relação de volume.

Os alunos estabeleceram uma associação a partir dos valores encontrados com a investigação, percebendo a relação matemática entre o volume, a altura e área da base de um prisma de base retangular.

No item 3 do exercício proposto, o aluno deveria utilizar a relação deduzida, inserindo os valores na expressão ( $v=bxh$ ). Nos itens 4 e 5 instigou-se o aluno a ultrapassar a relação estabelecida, ou seja, buscar significado no enunciado do item 2. É importante que o aluno compreenda o que está envolvido na determinação do volume de um sólido, uma vez que “o aluno terá contato com uma dimensão da medida que não é obtida por uma comparação direta, e sim pelo produto de medidas lineares” (BRASIL, 1998, p. 129). Essa compreensão está explicitada na resposta do aluno Luiz ao item 4.

Figura 10 – Questão 4 do Luiz



Fonte: elaborada pelos autores.

Nota-se, inicialmente, que Luiz busca determinar o produto, sem se ater ao que é solicitado na questão. Porém, ao perceber o que é requerido lança-se por outro caminho. Isso fica evidenciado pela palavra “esquece” que aparece escrito ao lado da operação multiplicação. Essa análise do valor encontrado e do que é solicitado no problema é importante na aprendizagem matemática e o uso do *software* para investigação permite a percepção do equívoco, o estilo para resolver a questão, e leva o aluno a analisar o encontrado, assim como destacado por Valente (2014).

Entende-se, ao observar a efetividade das ideias e experiências vividas, que o uso do *software* deve estar aliado à exploração dos mecanismos de raciocinar e aprender. É necessário inserir o aluno no seu contexto sociocultural, o qual contribui para desenvolver ideias e trocar informações, e interpretar o que acontece. Ao trazer esta bagagem para a escola, o mecanismo da reflexão o torna mais consciente de seus saberes e conhecimentos. Ou seja, a abertura pode

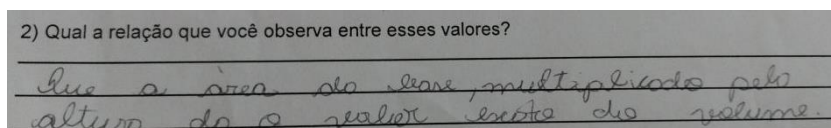
orientar diferentes caminhos a serem percorridos, estimulando o aluno a compreender o feito, assimilar conceitos e conteúdos matemáticos com o auxílio do *software* (VALENTE, 2014).

### 3.2 A TERCEIR TAREFA

Por fim, trabalhou-se um exercício cujo objetivo foi generalizar a fórmula de área de um prisma cuja base é um polígono de  $(n)$  lados. Os alunos construíram um sólido com medidas variadas, com base no uso dos controles deslizantes. Esse modo de construção permitiu ver que, ao se alterar o número de lados do polígono da base e a altura do prisma, o volume e a área da base se modificavam.

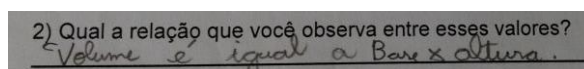
Procurando “fazer ver” o que acontecia, os alunos foram instigados com questões acerca do que percebiam sobre os valores exibidos no *software*. Para organizar as descobertas, os alunos foram orientados a registrar em uma tabela os valores obtidos para a área da base, a altura e o volume do sólido – dados exibidos pelo *software* a partir da manipulação do controle deslizante. Após a exploração de algumas situações pelos alunos, lhes foi interrogado: “Qual a relação que você observa entre esses valores? ”. Foram selecionadas duas repostas que exemplificam os resultados da discussão (ver figuras 11 e 12).

Figura 11 – Resposta de Livia



Fonte: elaborada pelos autores.

Figura 12 – Resposta de Marcos



Fonte: elaborada pelos autores.

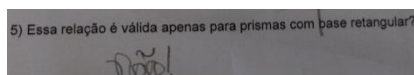
De modo geral, as repostas dos alunos se dividiram em respostas como a de Livia ou a de Marcos. Visando compreender o sentido do que Marcos dizia ao escrever “base x altura”, lhe foi questionado sobre sua frase: “Marcos, em sua resposta você escreveu “Volume é igual a base x altura”. Esse modo de escrever “base x altura” é igual ao que se faz para determinar a área do retângulo? Marcos respondeu: “Não, professora! É toda a base! [Fazendo também gestos com a mão com a intenção de mostrar o espaço ocupado pelo polígono da base], e depois vezes a altura”.

No diálogo com Marcos, a imagem do sólido serve de base para a investigação levando-o a recorrer a ela para “mostrar” à professora o que havia pensado ao escrever “base x altura”. (PAULO, 2006). O aluno, apesar de não estar de frente para a imagem na tela do computador, estava “vendo-a”. Ou seja, ele toma-a como referência para responder o questionamento que lhe foi feito.

Em seguida à exploração dos conteúdos com o *software*, foram retomadas as tarefas convencionais do livro didático, no qual se pede a medida do volume de um determinado sólido geométrico. A maioria dos alunos respondeu de forma convencional, usando as operações de multiplicação e divisão. No entanto, a resposta de Lívia chama a atenção. Ela inicia um raciocínio que abandona. No diálogo com a aluna vê-se que, motivada pela leitura da questão 3, ela tende a usar o mesmo raciocínio. Porém, diz que ao pensar em como o *software* lhe dava a resposta relativa ao volume e analisando seus registros na tabela, notou o engano e percebeu que a solução não poderia ser aquela. O trabalho feito com o auxílio do *software* possibilitou-lhe analisar o feito e traçar outro caminho para a solução do problema.

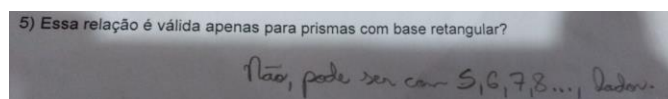
Visando uma generalização do que havia sido explorado no *software*, foi perguntado aos alunos acerca das relações que “descobriram” para o conceito de volume. Separamos as respostas dadas em dois grupos que exemplificamos pelas figuras 13 e 14.

Figura 13 – Resposta 5 Alice



Fonte: elaborada pelos autores.

Figura 14 – Resposta 5 de Marcos



Fonte: elaborada pelos autores.

Percebe-se que as respostas de Alice e Marcos são exclamativas e explicativas. Nega-se com segurança. Esse realce pode ser interpretado como uma estranheza relativamente à pergunta, já que anteriormente ambos haviam comparado os valores e percebido que a relação era entre área da base e altura, independente do polígono da base.

Outros alunos responderam como Marcos. Eles querem indicar que o polígono da base pode ter um número variado de lados. A resposta de Marcos aponta para os valores que o *software* possibilita visualizar. Ou seja, os valores permitidos pela investigação, com o uso do controle deslizante, variam entre 3 e 8 para o número de lados do polígono. Pode-se entender

que o uso das reticências indica que o aluno compreendeu que o número de lados vai além do que é visto na tela do computador, e também que poderá haver um número imprevisto de lados.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O espaço que as tecnologias conquistaram na sociedade estabeleceu diferentes formas de relações entre pessoas, objetos e o planeta, as quais que não podem ser desconsideradas principalmente em ambientes escolares. A sala de aula, considerando suas particularidades, está invadida por outros modos possíveis de aprender e ensinar, modos que permeiam e indicam a necessidade de renovação das relações entre aluno e professor, aluno e aluno, sala de aula e sociedade.

A presença de tecnologias, com múltiplas possibilidades de uso, em conjunto com a investigação matemática possibilita que o aluno seja ativo no processo de produção de conhecimento. A utilização do *software* GeoGebra para o trabalho com volume de sólidos geométricos favorece a compreensão por meio da visualização. O aluno é conduzido para avaliar, analisar e efetuar exercícios que lhes são propostos, conhecendo as propriedades do objeto matemático e do computador.

Houve nas três tarefas, segundo manifestações dos alunos, o movimento do pensar que os levou a buscar caminhos próprios para aprender, e compreender os conteúdos propostos. O uso do *software* de geometria dinâmica, como o GeoGebra, promoveu um ambiente de aprendizagem no qual todos os atores interagiram para executar, refletir, clarificar e alcançar níveis mais complexos de compreensão.

Somente a adoção do *software* matemático, ou de qualquer TDIC, não cria ambientes de aprendizagem por si só. Cabe ao professor criar estas condições para os diferentes tipos de alunos e suas capacidades de envolvimento com as discussões, os exercícios, as visões e suas capacidades de produzir conhecimento. O importante é compreender o que está sendo realizado, falar sobre o que fizeram, como foi o caso dos alunos que responderam as questões apresentadas. São produtos das mentes deles, que reuniram suas experiências, seus raciocínios e consciência de suas capacidades para explorar, desafiar e estimular a aprendizagem. O computador é uma ferramenta importante deste processo de trabalhar a capacidade crítica dos indivíduos e o desenvolvimento de habilidades.

## REFERÊNCIAS



ALSINA, Claudi. **CLAUDI ALSINA**: "La mayoría de los ciudadanos vive en dos dimensiones". El periódico de Aragón. Disponível em: <[https://www.elperiodicodearagon.com/noticias/idear/claudi-alsina-la-mayoria-ciudadanos-vive-dos-dimensiones\\_296207.html](https://www.elperiodicodearagon.com/noticias/idear/claudi-alsina-la-mayoria-ciudadanos-vive-dos-dimensiones_296207.html)>. Acesso em: 23 jan. 2018.

BORBA, M. C. **Coletivos seres-humanos-com-mídias e a produção de Matemática**. In: I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2002, Curitiba. I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática, 2001. v. 1. p. 135-146.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: <<https://cptstatic.s3.amazonaws.com/pdf/cpt/pcn/volume-01-introducao-aos-pcns.pdf>>. Acesso em: 23 nov. 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN. Matemática)**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Portaria n. 1.570, publicada no D.O.U. de 21/12/2017, seção 1, pág. 146. 2017. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=78631-pcp015-17-pdf&category\\_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=78631-pcp015-17-pdf&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192)>. Acesso em: 27 out. 2018.

COSTA, Conceição. **Visualização, veículo para a educação em geometria**. Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 157-184, Fundão, Portugal, 2000.

DEPOIMENTOS concedidos aos autores. 2016.

FLORES, C. R. **Olhar, Saber, Representar: Ensaio sobre a representação em perspectiva**. 2003. 189 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências da Educação, Universidade Estadual de Santa Catarina, Florianópolis, 2003. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/85164>>. Acesso em: 4 abr. 2018.

FLORES, C. R e WAGNER, D. R e BURATTO, I. C. F. (2012). Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 14, n. 1, p. 31-45.

PAULO, R. M. **O Significado Epistemológico dos Diagramas na Construção do Conhecimento Matemático e no Ensino de Matemática**. 2006. 192 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SANTOS, S. C. **A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial**. 2006, 144 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SANTOS, C. O. (2009). **A importância da visualização no ensino da geometria plana e espacial**. 2009. 49 f. Monografia (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Unidade Universitária de Jussara, Universidade Estadual de Goiás, Jussara.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR Curitiba - Paraná – Brasil - ISSN impresso 1516-280X e ISSN eletrônico 2179-6122 - n.18, p. 90-108, 2018.

VALENTE, J. A. A comunicação e a educação baseada no uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação. **Revista UNIFESO – Humanas e Sociais**, v. 1, n. 1, p. 141-166, 2014.