Synergismus Scyentifica UTFPR

XIII ERMAC

Mini Curso

Equações de Evolução Não-Lineares: O Problema de Valor Inicial, Resolução e Aplicações

Alysson Tobias Ribeiro Cunha

Campus Jatai - UFG - Goiás

Eduardo Arbieto Alarcon

IME - UFG - Goiás

João Lopes Cardoso Filho

Instituto Federal Goianio - Campus Urutaí - Goiás

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Pato Branco, setembro de 2009

Sumário

Introdução

Finalmente, esta monografia esta dividida em três capítulos, ...

O autor agradece a comissão da organização do XIII ERMAC pela aceitação e a boa disposição para fazer todo o processo de esclarecimento sobre o encaminhamento do material e a logística sobre a produção do material impresso.

Capítulo 1

Modelagem de uma Equação de Evolução de Frentes de Onda em Reações Químicas

1.1 Introdução

Em reações químicas tais como a mistura de ácidos iodato-arsênico, encontra-se frentes exotérmicas de reações auto-catalíticas convertendo o fluido não reagido de densidade um, num fluido reagido de menor densidade.

Trabalhos experimentais têm demonstrado a existência de frentes com curvatura constante, movendo-se a velocidade constante. A curvatura destas frentes é devido a presença de um estado convectivo do fluido, próximo a frente de reação. O movimento convectivo é devido a instabilidade hidrodinâmica do sistema.

A instabilidade pode aparecer pela diferença de densidades entre os fluidos reagidos e não reagidos, (modelo de Rayleigh-Taylor) ou por efeitos térmicos, (modelo de Rayleigh-Bernard). Como já foi mostrado em Wilder, et al [7], efeitos térmicos são de uma menor importância que a diferença de densidade entre o fluido reagido e não reagido, como resultado disto, devemos somente considerar os casos limites de difusitividade térmica infinita e zero.

Recentes experimentos mostram estados de convecção assimétrico, próximos a frente de reação do ácido iodato-arsênico em tubos verticais longos.

1.2 As Equações do Movimento

As equações governando estes sistemas autocatalísticos envolvendo propagação reação-difusão têm sido derivadas previamente em Edwards, et al [5].

Como estamos considerando a frente como uma fonte de calor (devido à natureza exotérmica da reação), a conservação da energia causa variações descontínuas do gradiente de temperatura na frente de onda, enquanto a temperatura tem variação contínua. Outra consideração é quantificar como a densidade dos fluidos mudam com a temperatura. Dado que a variação da densidade no fluido é pequena causada pela expansão térmica, podemos considerar uma variação de primeira ordem entre as densidades. Escreveremos como

$$\rho(T) = \rho_1[1 - \alpha(T - T_1)] \tag{1.1}$$

onde $\rho(T)$ é a densidade na temperatura T, ρ_1 é a densidade na temperatura referência T_1 e α é o clássico coeficiente de dilatação térmica, sobre pressão constante. (Existe uma equação correspondente para cada fluido).

A diferença relativa entre a densidade destes dois fluidos na frente é um dos parâmetros chaves neste estudo e é definido por:

$$\delta = \frac{\rho^a - \rho^b}{\rho^b} \tag{1.2}$$

onde ρ^a é a densidade do fluido acima da frente (não reagido) e ρ^b é a densidade do fluido abaixo da frente (reagido) também chamaremos δ_0 o valor de δ onde a difusibilidade térmica assumida é zero e δ_1 o valor de δ onde a difusibilidade térmica assumida é infinita.

Se na adição destas hipóteses assumirmos infinita a difusibilidade térmica, o sistema de equações é segundo Wilder, et al [7]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla)V = \frac{1}{\rho_1}\nabla P_r + \nu\nabla^2 V \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot V = 0 \tag{1.4}$$

$$c = \widehat{n} \cdot \widehat{z}\frac{\partial H}{\partial t} - \widehat{n} \cdot V|_{z=H} \tag{1.5}$$

Com condições de salto através da região entre o fluido reagido e não reagido dado por:

$$[\widehat{n} \cdot V]^{+}_{-} = 0$$

$$[\widehat{n} \times V]^{+}_{-} = 0$$

$$[P_r]_-^+ - [n_i n_j T_{ij}^V]_-^+ = \delta_1 \rho_1 g H$$

$$[\epsilon_{ijk} n_j n_l T_{kl}^V]_-^+ = 0$$

e tensor de stress viscoso

$$T_{ij}^V = -\nu \rho_1 \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right).$$

onde:

P_r é a pressão reduzida dada por $P_r = P + \rho_1 g z$;

ν é a viscosidade cinemática;

c a velocidade da frente normal com respeito ao fluido não reagido;

H é a posição vertical da frente como função de (x, y, z);

$\widehat{n}$ é um vetor unitário normal na frente, apontado no fluido não reagido;

ϵ_{ijk} é o tensor totalmente anti-simétrico definido tal que $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$, $\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$ e $\epsilon_{ijk} = 0$ fora isso. A notação $[\xi]_-^+$ indica a diferença de valores entre a quantidade ξ nos lados reagidos e não reagidos da frente.

A seguir definimos as coordenadas adimensionais x^* e t^* tal que $x = \nu c_0^{-1} x^*$ e $t = \nu c_0^{-2} t^*$, onde c_0 é a velocidade da frente na ausência de condução de calor (obtida experimentalmente) e variáveis dependentes adimensionais por

$$p(x^*, t^*) = (\rho_1 c_0^2)^{-1} P_r(x, t)$$

$$k(x^*, t^*) = \nu c_0^{-1} K(x, t)$$

$$v(x^*, t^*) = c_0^{-1} V(x, t)$$

$$h(x^*, t^*) = \nu^{-1} c_0 H(x, t)$$

onde K é a curvatura dimensionada da frente. Podemos escrever as equações (1.3), (1.4) e (1.5) em forma adimensional, com equações movimento

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = -\nabla p + \nabla^2 v \tag{1.6}$$

$$\nabla \cdot v = 0 \tag{1.7}$$

$$\widehat{n} \cdot \widehat{z} \frac{\partial h}{\partial t} = \widehat{n} \cdot v_- + 1 + \mathcal{D}_C k \tag{1.8}$$

Com condições de salto

$$[\widehat{n} \cdot v]_-^+ = 0$$

$$[\widehat{n} \times v]_{-}^{+} = 0$$

$$[p]_{-}^{+} = \delta_1 G h - [n_i n_j T_{ij}^{v}]_{-}^{+}$$

$$[\epsilon_{ijk} n_i n_j T_{kl}^{v}]_{-}^{+} = 0$$

e tensor de stress viscoso

$$T_{ij}^{v} = -\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i},$$

onde temos usado a velocidade eikonal $c = c_0 + D_C K$ e temos abandonado o asterisco para as variáveis adimensionais. A velocidade eikonal relata a velocidade da frente normal para a velocidade de uma frente plana, na ausência de condução de calor (c_0), a curvatura da frente (k) e a difusibilidade química da espécie reagente (D_C).

Os parâmetros adimensionais que aparecem nestas equações são

$$G = g\nu c_0^{-3}$$

e

$$\mathcal{D}_C = \frac{D_C}{\nu},$$

onde D_C é a difusibilidade química. O vetor unitário normal na frente apontando no fluido não reagido é dado por

$$\hat{n} = \pm \frac{\hat{z} - \nabla h}{(1 + |\nabla h|^2)^{\frac{1}{2}}},$$

onde o sinal " + " é usado no fluido não reagido, que está acima da frente (propagação ascendente).

No caso de difusibilidade térmica zero, é facilmente visto que a única diferença nas equações é que δ_1 é substituído por

$$\delta_0 = \delta_1 + \alpha \Delta T,$$

onde α é o coeficiente de expansão térmica de fluido, e ΔT é o salto de temperatura através da interface [5]. Como esta é a única mudança necessária para considerar os dois casos, no restante deste trabalho nós devemos usar o símbolo δ sem o subscrito para significar que ele pode ser δ_1 ou δ_2, dependendo de qual caso está sendo considerado

1.3 Resultados para a estabilidade linear de frentes horizontais planas

Neste trabalho devemos restringir ao caso de sistema lateralmente ilimitado, isso irá permitir o estudo da instabilidade da frente sem a influência das bordas. A análise da estabilidade linear deste sistema tem sido considerada previamente, e pode ser encontrada em detalhes em [5].

As equações (1.6), (1.7) e (1.8) foram derivadas para uma coordenada fixa construída em uma propagação ascendente de frente horizontal. A localização da frente não-pertubada é fixada em $z = h = 0$. O fluido não reagido está no domínio $z > 0$ (para propagação ascendente da frente), enquanto o fluido reagido está descrito por $z < 0$. Nesta construção, as equações (1.6), (1.7) e (1.8) produzem velocidade do fluido adimensional constante e perfil de temperatura para a frente plana não distribuída (com k=0)

$$v^{(0)} = -\widehat{z}. \tag{1.9}$$

Executando o modelo da análise da estabilidade linear, introduzimos uma pequena pertubação dependente do tempo para o estado constante na forma

$$h = h^{(1)} \tag{1.10}$$

$$v = v^{(0)} + v^{(1)} \tag{1.11}$$

$$p = p^{(0)} + p^{(1)} \tag{1.12}$$

Com expressões similares para $\widehat{n}$ e k. Substituindo estas expressões nas equações (1.6), (1.7), (1.8) e retendo os termos lineares nas pertubações, produzimos um sistema linear de equações diferenciais parciais e condições de salto. Como estas equações representam um conjunto de equações diferenciais homogêneas e lineares podemos introduzir uma pertubação número onda q e taxa de crescimento σ, e favorecer as pertubações $h^{(1)}, \quad v^{(1)} \quad e \ p^{(1)}$ com dependência exponencial $e^{iqx+\sigma t}$. Como detalhado na referência [5], o problema pode ser reescrito somente em termos da componente vertical da velocidade perturbada $w^{(1)}$. Isto leva para uma equação diferencial ordinária linear a qual está resolvida para dar a solução mostrada abaixo

$$w^{(1)} = e^{iqx+\sigma t} \times \begin{cases} Ae^{-qz} + Be^{k_- z} & , z \geq 0 \\ Ce^{qz} + De^{k_+ z} & , z < 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

com

$$k_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \sigma + q^2}. \tag{1.14}$$

Se assumirmos a forma para a posição da frente ser

$$h^{(1)} = Ee^{iqx+\sigma t} \tag{1.15}$$

e usar isto adiante nas condições de salto na componente vertical da pertubação de velocidade, o problema reduz a um sistema algébrico linear descrevendo o início da condução de calor. A solução deste sistema leva a uma condição de auto-valor na taxa de crescimento σ e número onda q da pertubação na forma abaixo, veja [5]

$$\delta qG[q + 2\sigma(q - s)] - 4s(\sigma + \mathcal{D}_C q^2)(q^2 - \sigma^2) = 0 \tag{1.16}$$

onde

$$s = \left(\frac{1}{4} + \sigma + q^2\right)^{1/2}.$$

Se examinarmos a região perto do início da condução de calor ($q = q_c$) encontramos que

$$q_c = \left(\frac{\delta G}{4\mathcal{D}_C}\right)^{1/3} \tag{1.17}$$

$$\sigma = \frac{\delta G}{4q} - \mathcal{D}_C q^2, \quad (q \sim q_c). \tag{1.18}$$

Se examinarmos o comportamento de σ quando ($q \to 0$) temos que, veja em [5].

$$\sigma = \left(\frac{1}{2}\delta G q\right)^{1/2}, \qquad (q \to 0) \tag{1.19}$$

Notemos que (1.17), (1.18) e (1.19) implicam que para qualquer valor de δ maior que zero a frente plana é estável se as pertubações são adotadas com comprimento de ondas maior que um dado

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{q_c}.$$

1.4 Determinação das escalas a serem usadas nas expansões assintóticas

Como tem sido visto em trabalhos prévios a instabilidade da frente é devido à diferença da densidade relativa entre o fluido reagido e o não reagido, $\delta_1(\delta_0)$, ser diferente de zero. Devido a importância deste parâmetro e sua insignificância, iremos olhar para soluções do problema que podem ser escritas como expansões de termos deste pequeno parâmetro.

Também precisaremos determinar as escalas necessárias para variáveis de espaço e tempo. Para isso, consideremos o seguinte: devemos de novo assumir que as soluções são da forma dada pelas equações (1.10), e as pertubações estamos na tentativa de encontrar. Assim, a análise linear descrita acima pode ser usada para encontrar as escalas apropriadas em termos do parâmetro δ.

Se examinarmos as equações (1.17), (1.18) e notar que devido a insignificância de $\mathcal{D}_C$ podemos escrever $\mathcal{D}_C = \mathcal{O}(\delta)$, é claro que $q = \mathcal{O}(1)$ e $\sigma = \mathcal{O}(\delta)$.

Usando os resultados da análise linear, resolvendo para os coeficientes, e usando as escalas acima para q e σ é encontrado que

$$v^{(1)} = \mathcal{O}(\delta^2)$$

e

$$p^{(1)} = \mathcal{O}(\delta^2).$$

As escalas para q e σ sugerem $t = \mathcal{O}(\delta)$ e $x = \mathcal{O}(1)$. Se examinarmos as equações (1.13), veremos que as escalas de q, k_+ e k_- são todas $\mathcal{O}(1)$ assim, a escala apropriada para z deve ser $z = \mathcal{O}(1)$. Devemos notar que esta coordenada z não é o z da construção anterior, mas o z definido por $\widetilde{z} = z + H(x,t)$. Para uma análise não-linear, não devemos restringir a pequena pertubação $h^{(1)}(x,t)$, e sim devemos usar $\widetilde{z} = z + F(x,t)$ (onde $\widetilde{z}$ é a posição vertical construída em laboratório) para fazer esta diferença mais óbvia. Notemos que nesta notação, $z = 0$ corresponde a localização da frente verticalmente. Então as escalas são encontradas para a análise linear na variável z, a qual mede o deslocamento vertical para frente de propagação.

Assim, pela análise linear nós chegamos nas seguintes variáveis características de espaço e tempo.

$$\eta = x \tag{1.20}$$

$$\xi = z \tag{1.21}$$

$$\tau = \delta t \tag{1.22}$$

Não é possível obter a escala de F pela análise linear. Porém, se usarmos as escalas acima na equação (1.8), é óbvio que todos os termos devem estar na mesma ordem de δ, então devemos ter $F = \mathcal{O}(\delta)$.

1.5 Derivação da equação de evolução

Fazendo a análise assintótica, veja Bona, et al [4] e Kevorkian, et al [6], devemos usar as escalas descritas acima para espaço e tempo, bem como aquelas para outras variáveis e parâmetros envolvidos, e assumir expansões assintóticas para variáveis na forma

$$v_x = \delta^2[u_0(\eta,\xi,\tau) + \delta u_1(\eta,\xi,\tau) + ...]$$

$$v_z = -1 + \delta^2[w_0(\eta,\xi,\tau) + \delta w_1(\eta,\xi,\tau) + ...]$$

$$p = p^{(0)} + \delta^2[p_0(\eta,\xi,\tau) + \delta p_1(\eta,\xi,\tau) + ...]$$

$$F = \delta[f_0(\eta,\tau) + \delta f_1(\eta,\tau) + ...]$$

onde $p^{(0)}$ é a solução para a frente plana encontrada pela análise da estabilidade linear, a qual era exatamente uma constante. Se estas formas forem usadas na equações (1.6), (1.7), (1.8) e os termos de baixa ordem são examinados, o sistema reduz a

$$-\frac{\partial u_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_0}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} \tag{1.23}$$

$$-\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi} \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = 0 \tag{1.25}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \Delta_C \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta}\right)^2 + w_0(\eta, 0, \tau), \tag{1.26}$$

com condições de salto

$$[u_0]_-^+ = 0$$

$$[w_0]_-^+ = 0$$

$$\left[\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial w_0}{\partial \eta}\right]_-^+ = 0$$

$$[p_0]_-^+ = -G f_0$$

onde temos usado $\mathcal{D}_C = \delta \Delta_C$.

Verifiquemos a equação (1.26), pela equação (1.8) temos que $\widehat{n}\widehat{z}\dfrac{\partial h}{\partial t} = \widehat{n}v_{-} + 1 + \mathcal{D}_C k$ que será tomada por $\widehat{n}\widehat{z}\dfrac{\partial F}{\partial t} = \widehat{n}v_{-} + 1 + \mathcal{D}_C k$. Lembrando que $\hat{n} = \pm\dfrac{\hat{z} - \nabla h}{(1+|\nabla h|^2)^{\frac{1}{2}}}$, temos

$$\widehat{n} = \frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} . \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, 0, 1\right); \qquad \widehat{z} = (0,0,1)$$

$$\widehat{v} = (\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 +, ..., 0, -1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + ...)$$

$$F = \delta f_0 + \delta^2 f_1 + ...$$

com

$$\eta = x; \qquad \xi = z; \qquad e\tau = \delta t.$$

Daí

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \tau} . \frac{\partial \tau}{\partial t} = \delta \frac{\partial F}{\partial t}$$

ou seja,

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \delta\left(\delta\frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^2 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + ...\right),$$

que é equivalente a

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \delta^2\frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^3 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + ...$$

Por outro lado,

$$\widehat{n}\widehat{z} = \frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

logo,

$$\begin{aligned}
\widehat{n}\widehat{v} &= \frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} . \left(-\frac{\partial F}{\partial x}, 0, 1\right)(\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 +, ..., 0, -1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + ...) \\
&= \frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} . \left[-\frac{\partial F}{\partial x}(\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + ...) + (-1) + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + ...\right].
\end{aligned}$$

Assim

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} . \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\left[-\frac{\partial F}{\partial x}\left(\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \cdots\right) + (-1) + \delta^2 w_0 + \right.$$

$$\left. \delta^3 w_1 + \cdots\right](1 + D_c k),$$

então

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \left(-\frac{\partial F}{\partial x}\right)(\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + ...) - 1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + ... + (1 + D_c k)\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\delta^2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^3 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \cdots &= -\delta\left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \delta^2 \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \cdots\right)(\delta^2 u_0 + \delta^3 u_1 + \cdots) - 1 + \delta^2 w_0 + \\ \delta^3 w_1 + \ldots \\ &\cdots + (1 + D_c k)\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Pela referência [5] temos que

$$k = \frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

então

$$\begin{aligned}\delta^2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \delta^3 \frac{\partial f_1}{\partial \tau} + \cdots &= -\delta^3\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \delta \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + ...\right)(u_0 + \delta u_1 + \cdots) - 1 + \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \cdots \\ &\cdots + \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + \frac{D_c . \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} . \left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Agora

$$\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + ...$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 = \left(\delta \frac{\partial f_0}{\partial \eta} + \delta^2 \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + ...\right)^2 = \delta^2 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta}\right)^2 + \delta^3 \frac{\partial f_0}{\partial \eta}\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + ...$$

$$\left[1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + \delta^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta}\right)^2 + \delta^3 \frac{1}{2}\frac{\partial f_0}{\partial \eta}\frac{\partial f_1}{\partial \eta} + ...$$

$$\frac{1}{1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2} = 1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + ...$$

$$\frac{D_c \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{1 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2} = D_c . \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + ...\right] = D_c . \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - D_c . \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + ...\right].$$

Assim,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \delta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \delta^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial \eta^2} + ...$$

$$\frac{D_c \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{1+\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2} = D_c \delta \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + ... = \delta^2 \Delta_c \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + ...$$

com

$$\Delta_c = \frac{D_c}{\delta} \quad e \quad D_c = \mathcal{O}(\delta).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \delta^2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau} + \cdots &= \delta^3 \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \eta} - \delta \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + \cdots\right)(u_0 + \delta u_1 + \cdots) - 1 + \\ &+ \delta^2 w_0 + \delta^3 w_1 + \cdots + 1 + \delta^2 \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta}\right)^2 + \cdots + \delta^2 \Delta_c \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \cdots \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta}\right)^2 + \Delta_c \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + w_0.$$

A equação (1.26) representa uma equação não-linear para a propagação da frente a qual esta incluída o fluxo do fluido somente através do último termo no lado direito o qual é a velocidade vertical do fluido na frente. As equações (1.23), (1.24) e (1.25) podem agora ser resolvidas para encontrar $w_0(\eta, 0, \tau)$ para ser usada em (1.26).

Fazendo assim, pensamos que no final das contas deve ser explorado a dinâmica da frente pelo método de diferença finita para analisar a equação (1.26). Como ele é impossível para resolver um problema o qual tem uma extensão regional infinita, devemos travar a dimensão do espaço lateral em algum valor finito de η. Devemos impor condições de borda periódica no fim do domínio, ou seja

$$\begin{aligned} f_0(-\pi, \tau) &= f_0(\pi, \tau) \\ \frac{\partial f_0}{\partial \eta}(-\pi, \tau) &= \frac{\partial f_0(\pi, \tau)}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Com isto em mente devemos agora considerar o problema posto na equações (1.23), (1.24) e (1.25) com condições de salto.

Para se obter as equações ((1.23) a (1.26)) foram necessárias escalas de variáveis apropriadas, poderíamos continuar o trabalho nestas variáveis, porém a forma das equações são simplificadas se retornar-mos as variáveis originais, isto é, substituiremos η por x, ξ por z, τ por δt, w_0 por $\frac{W_0}{\delta^2}$, u_0 por $\frac{U_0}{\delta^2}$, f por $\frac{F_0}{\delta}$ e $\Delta_C = \frac{\mathcal{D}_{\mathcal{C}}}{\delta}$.

Então voltando (1.26) em termos originais temos

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau} = \Delta_C \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta}\right)^2 + w_0(\eta, 0, \tau),$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta t}\left(\frac{\partial F_0}{\delta}\right) = \frac{\mathcal{D}_C}{\delta}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F_0}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_0}{\delta}\right)\right)^2 + \frac{W_0(x,0,\delta t)}{\delta^2},$$

$$\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial F_0}{\partial t} = \mathcal{D}_C \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{W_0(x,0,\delta t)}{\delta^2},$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \mathcal{D}_C \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}\right)^2 + W_0(x,0,\delta t). \tag{1.27}$$

Se após transformarmos as equações ((1.23) - (1.25)) uma vez escrita a velocidade do fluido em termos da função corrente

$$U_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad e \; W_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

e tomarmos a transformada de Fourier (com respeito a coordenada lateral x) da equação para a função corrente resultando pela consideração ((1.23) - (1.25)), é visivel que a função corrente cumpre

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)^2 \widehat{\phi}_k + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\widehat{\phi}_k = 0, \tag{1.28}$$

com condições de salto

$$[\widehat{\phi}_k]_-^+ = 0,$$

$$\left[\frac{\partial \widehat{\phi}_k}{\partial z}\right]_-^+ = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^2 \widehat{\phi}_k}{\partial z^2}\right]_-^+ = 0,$$

$$\left[\frac{\partial^3 \widehat{\phi}_k}{\partial z^3}\right]_-^+ = -ik\delta G \widehat{F}_k,$$

onde $\widehat{\phi}_k$ e $\widehat{F}_k$ são as transformadas de Fourier de ϕ e F_0 com respeito a x respectivamente. Verifiquemos a equação (1.28), substituiremos η por x, ξ por z, τ por δt, w_0 por $\frac{w_0}{\delta^2}$, u_0 por $\frac{U_0}{\delta^2}$ e f_0 por $\frac{F_0}{\delta}$ e ϕ : Função corrente, tal que $U_0 = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$ e $W_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x}$.

Verificando (1.25) temos

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U_0}{\delta^2}\right) = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial U_0}{\partial x}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{W_0}{\delta^2}\right) = \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial W_0}{\partial z}.$$

Portanto

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial w_0}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial W_0}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial W_0}{\partial z} = 0$$

e

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \quad ; \quad \frac{\partial W_0}{\partial z} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x}.$$

Agora verificando (1.23) temos

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{U_0}{\delta}\right) = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x}\left(\frac{U_0}{\delta^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{U_0}{\delta^2}\right)$$

$$-\frac{1}{\delta^2}\frac{\partial U_0}{\partial z} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{1}{\delta^2}\frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2}. \qquad (*)$$

Analogamente de (1.24), temos

$$-\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_0}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \xi^2} \Rightarrow -\frac{\partial w_0}{\partial z} = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}. \qquad (**)$$

Agora de (*) substituindo $U_0 = -\dfrac{\partial \phi}{\partial z}$, temos

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial z}\right) \Rightarrow -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} \quad (1*)$$

e substituindo $W_0 = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}$ em (**) temos

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial z} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z^2 \partial x}. \qquad (2*)$$

Derivando (1*) em relação a z

$$-\frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} = -\delta^2\frac{\partial^2 p_0}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial z \partial x^2 \partial z} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4}. \qquad (a)$$

Derivando (2*) em relação a x temos

$$-\frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} = -\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^2 \partial x^2}. \qquad (b)$$

Fazendo (a) - (b) temos

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial z \partial x^2} = -\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial z^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial z^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2=0.$$

Isso verifica (1.28), depois de resolver este problema e tomando a inversa da transformada de Fourier uma vez achamos

$$W_0(x,0,t)=\frac{\delta G}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ik(x-x')}\frac{F_0(x',t)}{\sqrt{k^2+1/4}}dx'dk. \tag{1.29}$$

Analogamente no caso periódico, encontramos

$$W_0(x,0,t)=\frac{\delta G}{8\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{ik(x-x')}\frac{F_0(x',t)}{\sqrt{k^2+1/4}}dx'. \tag{1.30}$$

Verifiquemos a equação (1.30)

$$\begin{aligned}
W_0(x,0,t) &= \frac{\delta G}{4}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-ikx'}\frac{F_0(x',t)}{\sqrt{k^2+1/4}}dx'\right)\\
&= \frac{\delta G}{4\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-ikx'}\frac{F_0(x',t)}{\sqrt{k^2+1/4}}dx'\right)\\
&= \frac{\delta G}{4\sqrt{2\pi}}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{ikx}\frac{\widehat{F_0}(k,t)}{\sqrt{k^2+1/4}}\\
&= \frac{\delta G}{4}\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\widehat{F_0}(k,t)}{\sqrt{k^2+1/4}}\right),
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{F}^{-1}$ é a transformada de Fourier inversa. Logo

$$\widehat{W_0}(k,t)=\frac{\delta G}{4}\frac{1}{\sqrt{k^2+1/4}}\widehat{F_0}(k,t)dk.$$

Dizemos que

$$W_0=\frac{\partial\phi}{\partial x}\Rightarrow\widehat{W_0}(k,t)=ik\widehat{\phi}_k(0,t).$$

Logo

$$\widehat{\phi}_k(0,t)=-i\frac{\delta G}{4}\frac{\widehat{F_0}(k,t)}{k\sqrt{k^2+1/4}} \tag{1.31}$$

Seja a equação (1.28), chamamos $y(z)=\phi_k(z,t)$ e denotamos $D^j=\dfrac{\partial^j}{\partial z^j}$, logo, (1.28) é equivalente a

$$(D^2-k^2)^2y+D(D^2-k^2)y=0. \tag{1.32}$$

Logo obtemos

$$y^{iv}-k^2y''-k^2y''+k^4y+y'''-k^2y'=0.$$

E então teremos

$$y^{iv} + y''' - 2k^2y'' - k^2y' + k^4y = 0. \tag{1.33}$$

Supondo soluções da forma

$$y = Ce^{\lambda z}; \quad y' = \lambda Ce^{\lambda z}; \quad y'' = \lambda^2 Ce^{\lambda z}; \quad y''' = \lambda^3 Ce^{\lambda z}; \quad y^{(iv)} = \lambda^4 Ce^{\lambda z}.$$

Substituindo em (1.33) obtemos,

$$(\lambda^4 + \lambda^3 - 2k^2\lambda^2 - k^2\lambda + k^4)Ce^{\lambda t} = 0,$$

e temos a equação algébrica

$$\lambda^4 + \lambda^3 - 2k^2\lambda^2 - k^2\lambda + k^4 = 0 \tag{1.34}$$

Observamos que k e $-k$ são raízes de (1.34), logo fatorando (1.34) temos

$$(\lambda - k)(\lambda + k)(\lambda^2 + \lambda - k^2) = 0.$$

E teremos como raízes de (1.34)

$$\lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k, \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2} - \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}$$

Então (1.28) tem soluções gerais da forma

$$y_1(z) = A_1e^{kz} + A_2e^{-kz} + A_3e^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z} + A_4e^{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)},$$

para $z < 0$ e

$$y_2(z) = B_1e^{kz} + B_2e^{-kz} + B_3e^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z} + B_4e^{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)},$$

para $z > 0$.

Suponhamos as soluções limitadas y_1 e y_2 de (1.28), assim obtemos que $A_2 = A_4 = 0$ e $B_1 = B_2 = 0$ então,

$$y(z) = \begin{cases} y_1(z) & = A_1e^{kz} + A_3e^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z}, \ z < 0 \\ y_2(z) & = B_2e^{-kz} + B_4e^{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)}, \ z > 0 \end{cases}$$

Da condição $[\widehat{\phi}_k]_-^+ = 0$ se, e somente se, $\lim_{x\to 0^+}(y(z)) - \lim_{x\to 0^-}(y(z))$, logo

$$\lim_{z\to 0^+}(y(z)) = \lim_{z\to 0^+}(y_2(z)) = B_2 + B_4$$

e

$$\lim_{z\to 0^-}(y(z)) = \lim_{z\to 0^-}(y_1(z)) = A_1 + A_3,$$

o que resulta em

$$B_2 + B_4 = A_1 + A_3. \tag{1.35}$$

De $\left[\dfrac{\partial \widehat{\phi}_k}{\partial z}\right]_-^+ = 0$ se, e somente se, $\lim_{z\to 0^+}(y'(t)) - \lim_{z\to 0^-}(y'(z)) = 0$, logo

$$\lim_{z\to 0^+}(y'(z)) = \lim_{z\to 0^+}(y_2'(z)),\quad y_2'(z) = -kB_2e^{-kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)B_4 e^{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z},$$

também

$$\lim_{z\to 0^-}(y'(z)) = \lim_{z\to 0^-}(y_1'(z)),\quad y_1'(z) = -kA_1e^{kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)A_3 e^{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z}.$$

Portanto

$$\lim_{z\to 0^+}(y'(z)) = -kB_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)B_4$$

e

$$\lim_{z\to 0^-}(y'(z)) = kA_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)A_3,$$

logo, obtemos a equação

$$-kB_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)B_4 + kA_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)A_3. \tag{1.36}$$

De $\left[\dfrac{\partial^2 \widehat{\phi}_k}{\partial z^2}\right]_-^+ = 0$ se, e somente se, $\lim_{z\to 0^+}(y''(z)) - \lim_{z\to 0^-}(y''(z)) = 0$, logo

$$\lim_{z\to 0^+}(y''(z)) = \lim_{z\to 0^+}(y_2''(z))$$

e

$$y_2''(z) = k^2B_2e^{-kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)B_4 e^{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z},$$

assim

$$\lim_{z\to 0^+}(y''(z)) = k^2B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)B_4. \tag{1.37}$$

Por outro lado,

$$\lim_{z\to 0^-}(y''(z)) = \lim_{z\to 0^-}(y_1''(z)),$$

$$y_1''(z) = k^2 A_1 e^{kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right) A_3 e^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z}$$

e

$$\lim_{z\to 0^-}(y_1''(z)) = k^2 A_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right) A_3. \tag{1.38}$$

De (1.37) e (1.38) obtemos

$$k^2 B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right) B_4 + k^2 A_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right) A_3. \tag{1.39}$$

Agora de $\left[\dfrac{\partial^3 \widehat{\Phi}_k}{\partial z^3}\right]_-^+ = -ik\delta G\widehat{F}_k$

se, e somente se, $\lim\limits_{z\to 0^+}(y'''(z)) - \lim\limits_{z\to 0^-}(y'''(z)) = -ik\delta G\widehat{F}_k$, logo

$$\lim_{z\to 0^+}(y'''(z)) = \lim_{z\to 0^+}(y_2'''(z))$$

e

$$y_2'''(z) = -k^3 B_2 e^{-kz} + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right) B_4 e^{\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z}$$

$$\lim_{z\to 0^+}(y'''(z)) = -k^3 B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right) B_4. \tag{1.40}$$

Por outro lado,

$$\lim_{z\to 0^-}(y'''(z)) = \lim_{z\to 0^-}(y_1'''(z)),$$

$$y_1'''(z) = k^3 A_1 e^{kz} + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)^3 A_3 e^{\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)z}$$

e

$$\lim_{z\to 0^-}(y_1'''(z)) = k^3 A_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)^3. \tag{1.41}$$

de (1.40) e (1.41) obtemos

$$\left\{-k^3 B_2 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)^3 B_4\right\} - \left\{-k^3 A_1 + \left(-\frac{1}{2} - \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\right)^3 A_3\right\} = -ik\delta G\widehat{F_k}. \tag{1.42}$$

De (1.35), (1.36), (1.39) e (1.42) obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} A_1 + A_3 + (-B_2) + (-B_4) & = 0 \\ kA_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right) A_3 + (-k)(-B_2) + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}\right)(-B_4) & = 0 \\ k^2 A_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)^2 A_3 + (-k)^2(-B_2) + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}\right)^2 (-B_4) & = 0 \\ k^3 A_1 + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}\right)^3 A_3 + (-k)^3(-B_2) + \left(-\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}\right)^3 (-B_4) & = ik\delta G\widehat{F}_k \end{cases} \tag{1.43}$$

Observamos que o sistema (1.43) tem a forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_3 \\ -B_2 \\ -B_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ik\delta G\widehat{F}_k \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_1 = k$; $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}$; $\lambda_3 = -k$; e $\lambda_4 = -\frac{1}{2} + \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}$.

Temos assim que

det $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3 & \lambda_4^3 \end{pmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)$ é o conhecido determinante de Vandermond.

Observamos que

$\lambda_2 - \lambda_1 = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \left(k + \frac{1}{2}\right)$; $\lambda_3 - \lambda_1 = -2k$; $\lambda_4 - \lambda_1 = -\left[\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\right]$; $\lambda_3 - \lambda_2 = -\left[\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} + \left(k - \frac{1}{2}\right)\right]$; $\lambda_4 - \lambda_3 = -\left[\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}} - \left(k - \frac{1}{2}\right)\right]$; $\lambda_4 - \lambda_2 = -2\sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}$,
além disso,

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1) = k$$

e

$$(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3) = k,$$

logo, usando a regra de Crammer, obtemos

$$A_1 = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_1)} = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{k2k} = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{2k^2}.$$

Por outro lado,

$$A_3 = \frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2)}.$$

De $(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2) = \sqrt{k^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$, temos que

$$(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_2) = -2\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\left(\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right),$$

logo,

$$A_3 = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{2\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\left(\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)},$$

portanto,

$$A_1+A_3 = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{2}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}\left(\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)}\right),$$

que é equivalente a

$$A_1+A_3 = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{2}\left(-\frac{1}{2k^2\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}}\right) = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{4k\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}}.$$

Da condição $[\hat{\phi}_k]_-^+ = 0$, temos que $y(z)$ é contínua em $z=0$ e

$$\lim_{z\to 0} y(z) = \lim_{z\to 0^-} y_1(z) = A_1 + A_3,$$

então

$$\hat{\phi}_k(0,t) = A_1 + A_3 = -\frac{ik\delta G\widehat{F}_k}{4k\sqrt{k^2+\frac{1}{4}}},$$

o que prova (1.31).

Assim, (1.27), no caso contínuo, torna-se

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \mathfrak{D}_c\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{\delta G}{8\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}\frac{F_0(x',t)}{\sqrt{k^2+1/4}}dx'dk \qquad (1.44)$$

e no caso periódico

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} = \mathcal{D}_c \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}\right)^2 + \frac{\delta G}{8\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ik(x-x')} \frac{F_0(x',t)}{\sqrt{k^2+1/4}} dx' \tag{1.45}$$

Capítulo 2

Equações de Evolução - Teoria

2.1 O Teorema de Hille-Yosida

Na próxima definição I é a identidade em X.

Definição 1. Seja X um espaço de Banach.Uma família $T(t), 0 \leq t < \infty$, de operadores lineares limitados em X é chamada um semigrupo de operadores lineares limitados em X se

a) $T(0) = I$.

b) $T(t + s) = T(t)T(s), t, s \geq 0$.

O operador linear definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X | \ \exists \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} \right\}$$

$$Ax = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}, \ x \in D(A)$$

é chamado o gerador infinitesimal do semigrupo $T(t)$.

Definição 2. Seja X um espaço de Banach. Um semigrupo $T(t)$, $0 \leq t < \infty$ de Operadores Lineares Limitados em X é dito um semigrupo fortemente contínuo se

$$\lim_{t \to 0+} T(t)x = x, \ \textit{para todo } x \in X.$$

Um semigrupo fortemente contínuo de operadores lineares limitados em X será chamado um semigrupo de classe C_0 ou um semigrupo C_0.

Teorema 2.1. *(Hille-Yosida). Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações $T(t)$, $t \geq 0$, se, e somente se*

a) A é fechado e densamente definido.

b) O conjunto resolvente de A $\rho(A) \supseteq (0, \infty)$ e para todo $\lambda > 0$

$$\|R(\lambda,\, A)\|_{\mathcal{B}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Sobre a teoria desta seção, veja [10], [11] e [2].

2.2 Teoria Quasilinear de Kato

2.2.1 A Equação Linear

As notações estabelecidas a seguir serão usadas nos próximos capítulos. Sejam X e Y espaços de Banach, então. $X \hookrightarrow Y$ significará $X \subset Y$, $\overline{X} = Y$ e $I : X \to Y$ contínua, onde I denota a aplicação indentidade.

Seja X um espaço de Banach. Considere o problema de Cauchy

$$(L) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = f(t), \quad t \in [0, T] \\ u(0) = \phi \in X. \end{cases} \tag{2.1}$$

A seguir enunciaremos os principais resultados sobre (L) que serão utilizados no estudo da equação Quasilinear. A solução de (L) é dada formalmente por

$$(S) \qquad u(t) = U(t, 0)\phi + \int_0^t U(t, s)f(s)ds,$$

onde $U(t, s)$ é chamado operador de evolução, definido como a aplicação

$$(t, s) \in \triangle = \{(t, s)|0 \leq s \leq t \leq T\} \longmapsto U(t, s) \in \mathcal{B}(X),$$

tal que $u(t) = U(t, s)\phi$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = 0, \quad t \in [0, T] \\ u(s) = \phi \in X. \end{cases} \tag{2.2}$$

A seguir faremos as hipóteses necessárias para a construção do operador de evolução. Seja $G(X, M, \beta)$ o conjunto dos operadores lineares A em X tais que $-A$ gera um semigrupo $\{e^{-tA}\}$ de classe C_0 e $\|e^{-tA}\| \leq Me^{\beta t}$, $0 \leq t < \infty$.

A família $\{A(t)\}_{0\leq t\leq T}$ é dita estável se existem M, β tais que

$$\|\prod_{i=1}^{k}(A(t_i)+\lambda)^{-1}\| \leq M(\lambda-\beta)^k, \quad \lambda > \beta, \tag{2.3}$$

para todo $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_k \leq T$. O produto anterior é temporalmente ordenado, isto é, $A(t_j)$ está a esquerda de $A(t_i)$ se $t_j > t_i$. O par M, β é chamado índice de estabilidade para $\{A(t)\}_{0\leq t\leq T}$.

Exercício 2.2. *Mostre que* (2.3) *é equivalente a*

$$\|\prod_{j=1}^{k} e^{-s_j A(t_j)}\| \leq M e^{\beta(s_1+...+s_k)}, \tag{2.4}$$

para todo t_j *como em* (2.3), $s_j \geq 0$, *onde o produto no lado esquerdo é temporalmente ordenado.*

Note que se $A(t) \in G(X, 1, \beta)$, então $\{A(t)\}_{\{0\leq t\leq T\}}$ é estável com índice de estabilidade $1, \beta$.

Considere as hipóteses

i) A família $\{A(t)\}_{\{0\leq t\leq T\}}$ é estável com índice de estabilidade M, β.

ii) Existe um espaço de Banach $Y \subset X$ e um isomorfismo $S : Y \to X$ tal que

$$SA(t)S^{-1} = A(t) + B(t), \tag{2.5}$$

onde $B(t) \in \mathcal{B}(X)$, $0 \leq t \leq T$, $t \in [0, T] \to B(t)$ é fortemente mensurável(isto é, $t \in [0, T] \longmapsto B(t)x$ é fortemente mensurável para cada $x \in X$) e $t \longmapsto \|B(t)\|_{\mathcal{B}(X)}$ é integrável superiormente em $[0, T]$.

iii) $Y \subset D(A(t))$, para todo $0 \leq t \leq T$. Então $A(t) \in \mathcal{B}(Y, X)$(consequência do teorema do Gráfico Fechado). Além disso, $t \longmapsto A(t)$ é contínua em norma.

Teorema 2.3. *Se i), ii) e iii) são satisfeitas, então existe um único operador de evolução* $\{U(t, s)\}$ *definido em* $\triangle$, *satisfazendo as propriedades*

a) $U : \triangle \to \mathcal{B}(X)$ *é fortemente contínua, com* $U(s, s) = 1$.

b) $U(t, s)U(s, r) = U(t, r)$.

c) $U(t, s)Y \subset Y$ *e* $U : \triangle \to \mathcal{B}(Y)$ *é fortemente contínua.*

d) $\dfrac{d}{dt}U(t, s) = -A(t)U(t, s)$ *e* $\dfrac{d}{ds}U(t, s) = U(t, s)A(s)$, *existem no sentido forte em* $\mathcal{B}(Y, X)$, *e são fortemente contínuas de* $\triangle$ *em* $\mathcal{B}(Y, X)$.

Além disso definindo

$$\|U\|_{\infty,X} = \sup_{(t,s)\in\triangle} \|U(t,s)\|_{\mathcal{B}(X)},$$

temos que

$$\|U\|_{\infty,X} \leq Me^{\beta T} \tag{2.6}$$

$$\|U\|_{\infty,Y} \leq \|S\|_{\mathcal{B}(Y,X)}\|S^{-1}\|_{(X,Y)}Me^{\beta T+M\|B\|_{1,X}}, \tag{2.7}$$

onde $\|B\|_{1,X} = \int_0^T(*)\|B(t)\|_{\mathcal{B}(X)}dt$, *onde* $(*)$ *denota integral superior.*

Teorema 2.4. *Seja u dada por (S), então se* $\phi \in Y$ *e* $f \in C([0,T],X) \cap L^1([0,T],Y)$, *então* $u \in C([0,T],Y) \cap C^1([0,T],X)$ *e u satisfaz* (L).

Além disso

$$\|u\|_{\infty,X} \leq \|U\|_{\infty,X}(\|\phi\|_X + \|f\|_{1,X}) \tag{2.8}$$

$$\|u\|_{\infty,Y} \leq \|U\|_{\infty,Y}(\|\phi\|_Y + \|f\|_{1,Y}) \tag{2.9}$$

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{\infty,X} \leq \|f\|_{\infty,X} + \|A\|_{\infty,\mathcal{B}(Y,X)}(\|\phi\|_Y + \|f\|_{1,Y}) \tag{2.10}$$

Considere

$$(L') \quad \begin{cases} \dfrac{du'}{dt} + A'(t)u' = f'(t), \quad t \in [0,T] \\ u'(0) = \phi' \in X. \end{cases} \tag{2.11}$$

Suponha que (i), (ii) e (iii) são satisfeitas para $\{A'(t)\}$ com os mesmos Y e S, então existe $\{U'(t,s)\}$ o operador de evolução para (L').

Teorema 2.5. *Seja* $\phi \in Y$, $f \in L^1([0,T],Y)$, $\phi' \in X$ *e* $f' \in L^1([0,T],X)$. *Se u e u′ são soluções de (L) e (L') respectivamente, então*

$$\|u' - u\|_{\infty,X} \leq \|U'\|_{\infty,X}(\|\phi' - \phi\|_X + \|f' - f\|_{1,X} + \|(A' - A)u\|_{1,X}). \tag{2.12}$$

Note que $u \in C([0,T],Y)$ *pelo teorema* (2.4), *então* $(A'(t) - A(t))u(t) \in X$.

Teorema 2.6. *Sejam ϕ, $\phi' \in Y$ e $f, f' \in L^1([0,T], Y)$. Então*

$$\|u' - u\|_{\infty,Y} \leq k'[\|\phi' - \phi\|_Y + \|f' - f\|_{1,Y} + \|(B' - B)Su\|_{1,X} + \|h\|_{\infty,X}], \tag{2.13}$$

onde onde k' depende apenas de $\|U'\|_{\infty,X}$ e $\|U'\|_{\infty,Y}$ e

$$h(t) = (U'(t,0) - U(t,0))S\phi + \int_0^t (U'(t,s) - U(t,s))g(s)ds,$$

$$g(s) = Sf(s) - B(s)Su(s). \tag{2.14}$$

Note que $g(s) \in X$ pois $u(s) \in Y$ pelo teorema (2.4).

A seguir, formularemos a dependência contínua. Considere a sequência de equações em X

$$(L^n) \quad \begin{cases} \dfrac{du^n}{dt} + A^n(t)u^n = f^n(t), \quad t \in [0,T] \\ u^n(0) = \phi^n \in X. \end{cases} \tag{2.15}$$

onde $n = 1, 2, \ldots$. Suponha que A^n satisfaz as condições (i), (ii) e (iii) uniformemente em n. Isto quer dizer que M e β podem ser escolhidos independentes de n, e Y e S são comuns a todos os (L^n). Então $\{U^n(t,s)\}$ existe para $\{A^n(t)\}_{\{0 \leq t \leq T\}}$.

Teorema 2.7. *Nas hipóteses anteriores suponha que*

$$A^n(t) \rightarrow A(t) \ fortemente \ em \ \mathcal{B}(Y,X) \ q.t.p \ em \ t \tag{2.16}$$

e

$$\int_E \|A^n(t)\|_{\mathcal{B}(Y,X)} dt \rightarrow 0, \ com \ |E| \rightarrow 0 \ uniformemente \ em \ n, \tag{2.17}$$

onde $|\ |\equiv$ medida de Lebesgue.

Então

$$U^n(t,s) \rightarrow U(t,s) \ fortemente \ em \ \mathcal{B}(X) \ uniformemente \ em \ t \ e \ s. \tag{2.18}$$

Temos também que se $\phi^n \rightarrow \phi$ em X e $f^n \rightarrow f$ em $L^1([0,T], X)$, entao $u^n \rightarrow u$ em $C([0,T], X)$, onde u^n e u sao soluções para (L^n) e (L) respectivamente.

2.2.2 A Equação Quasilinear

O nosso objetivo é resolver o problema de Cauchy

$$(Q) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t,u)u = f(t,u), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = \phi \in X. \end{cases} \tag{2.19}$$

onde $A(t,y)$ é um operador linear em X para cada $t \in [0,T]$ e $y \in X$. Chamamos $A(t,u)u$ de parte quasilinear e $f(t,u)$ de parte semi-linear.

Para resolver (Q) prosseguimos da seguinte forma, para certas funções $t \longmapsto v(t) \in X$, consideramos o problema linear

$$(L^v) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t,v(t))u = f(t,v(t)), \quad t \in [0,T] \\ u(0) = \phi \in X. \end{cases} \tag{2.20}$$

Se (L^v) tem solução u, consideramos a função $v \longmapsto u = \Phi v$ e mostramos que Φ tem um ponto fixo. O ponto fixo para Φ e solução de (Q).

Sobre (Q) assumiremos as hipóteses :

(X) X é espaço de Banach reflexivo. Existe um outro espaço de Banach reflexivo $Y \hookrightarrow X$. Existe um isomorfismo $S : Y \to X$. A norma em Y e escolhida de modo que S seja uma isometria.

(A1) $A : [0,T] \times W \to G(X,1,\beta)$, onde W é uma bola aberta em Y e $\beta \in \mathbb{R}$. Em outras palavras,

$$\|e^{-sA(t,y)}\|_{\mathcal{B}(X)} \leq e^{\beta s}, \quad s \geq 0,\ t \in [0,T],\ y \in W.$$

(A2) Para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$ temos que

$$SA(t,y)S^{-1} = A(t,y) + B(t,y),\ B(t,y) \in (X),$$

onde $\|B(t,y)\|_{(X)} \leq \lambda_1,\ \ \lambda_1 > 0$ constante. A igualdade anterior deve ser encarada no sentido estrito, isto é,

$$x \in D(A(t,y)) \Leftrightarrow S^{-1}x \in D(A(t,y)) \text{ e } A(t,y)S^{-1}x \in Y.$$

(A3) Para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$, temos que $A(t,y) \in (Y,X)$. Isto deve ser encarado da seguinte forma

$$\begin{cases} Y \subset D(A(t,y)),\ (t,y) \in [0,T] \times W \\ A(t,y)|_Y \in (Y,X). \end{cases} \tag{2.21}$$

Além disso para cada $y \in W$, $t \to A(t,y)$ é continua na norma de (Y,X), e para cada $t \in [0,T]$, $y \to A(t,y)$ é Lipschitz, isto é

$$\|A(t,y) - A(t,z)\|_{(Y,X)} \leq \mu_1 \|y - z\|_X, \tag{2.22}$$

onde $\mu_1 > 0$ é uma constante.

(A4) Seja y_0 o centro de W. Então $A(t,y)y_0 \in Y$, para todo $(t,y) \in [0,T] \times W$, com

$$\|A(t,y)y_0\|_Y \leq \lambda_2, \ \ t \in [0,T], \ \ y \in W. \tag{2.23}$$

(A5) $\|B(t,y) - B(t,z)\|_{(X)} \leq \mu_3 \|y - z\|_Y$, par cada $t \in [0,T]$

(f1) $f : [0,T] \times W \to Y$ é limitada,

$$\|f(t,y)\|_Y \leq \lambda_3, \ \ t \in [0,T], \ \ y \in W.$$

Para cada $y \in W$, $t \to f(t,y)$ é continua de $[0,T]$ em X, enquanto que para cada $t \in [0,T]$, $y \longmapsto f(t,y)$ é Lipschitz, isto é

$$\|f(t,y) - f(t,z)\|_X \leq \mu_2 \|y - z\|_X.$$

(f2) $\|f(t,y) - f(t,z)\|_Y \leq \mu_4 \|y - z\|_Y$.

Teorema 2.8. *(Existência e Unicidade) Suponha que $(X), (A1), ..., (A4)$ e $(f1)$ são satisfeitas. Se $\phi \in W$, então (Q) tem uma única solução*

$$u \in C([0,T'],Y) \cap C^1([0,T'],X),$$

para algum $0 \leq T' \leq T$.

Para formular a dependência contínua, considere a sequência de problemas de Cauchy

$$(Q^n) \quad \begin{cases} \dfrac{du^n}{dt} + A^n(t,u^n)u^n = f^n(t,u^n), \quad t \in [0,T] \\ u^n(0) = \phi^n \in X. \end{cases} \tag{2.24}$$

onde $n = 1, 2, ...$. Suponha que A^n e f^n satisfazem $(A1), ..., (A4)$ e $(f1)$ com os mesmos Y, S e W anteriores. Suponha também que $A5$ e $f2$, são satisfeitos.

Teorema 2.9. *(Dependência Contínua) Suponha que (X), (A1),...,(A5), (f1) e (f2) são satisfeitas para (Q^n) uniformemente em n (isto é, as constantes β, λ_1,...,μ_4 são independentes de n.) Além disso, assuma que para cada $(t,y) \in [0,T] \times W$,*

$$A^n(t,y) \to A(t,y) \ \textit{fortemente em} \ (Y,X) \tag{2.25}$$

$$B^n(t,y) \to B(t,y)\ fortemente\ em\ (X) \tag{2.26}$$

$$f^n(t,y) \to f(t,y)\ fortemente\ em\ Y. \tag{2.27}$$

Então se $\phi, \phi_n \in Y$ e $\phi_n \to \phi$ em Y, existe $T'' > 0$, $T'' \leq T$, para o qual existem únicas soluções

$$u^n \in C([0,T'']; W) \cap C^1([0,T'']),\ \ u^n(0) = \phi^n,$$

para (Q^n), $n = 1, 2, ...,$ e uma única solução u para (Q) na mesma classe. Além disso

$$u^n(t) \to u(t)\ em\ Y,\ uniformemente\ em\ t \in [0,T''].$$

A demonstração do teorema (2.9), pode ser vista em [12] e [16].

Durante a demonstração dos teoremas (2.8) e (2.9) faremos uso da teoria para a equação linear (L) da seção anterior e dos seguintes lemas, sempre assumindo (X).

Lema 2.10. *Se um subconjunto de Y é convexo, fechado e limitado, então ele também é fechado em X.*

Demonstração. Exercício.

Lema 2.11. *Se $g : [0,T] \to Y$ é limitada na norma de Y é contínua na norma de X, então g é fracamente contínua (portanto fortemente mensurável) como função com valores em Y.*

Demonstração. Exercício.

Demonstração. (Demonstração do teorema (2.8))

Como $\phi \in W$, existe $R > 0$ tal que

$$\begin{cases} \|\phi - y_0\| < R \\ \|y - y_0\|_Y \leq R \Rightarrow y \in W. \end{cases} \tag{2.28}$$

Seja

$$E = \{v \in C([0,T']; X) |\ \sup_{[0,T']} \|v(t) - y_0\|_Y \leq R\}. \tag{2.29}$$

Exercício 2.12. *Mostre que E com a métrica*

$$d(v,w) = \sup_{0 \leq t \leq T'} \|v(t) - w(t)\|_X$$

é um espaço métrico completo.

Para $v \in E$, sejam

$$A^v(t) = A(t, v(t))$$

e

$$B^v(t) = B(t, v(t)),\ t \in [0, T'].$$

Lema 2.13. *A aplicação $t \in [0,T'] \longmapsto A^v(t) \in (Y, X)$ é contínua na norma de (Y, X).*

Demonstração. De (A3) temos que $A^v(t) \in (Y, X)$, logo

$$\begin{aligned} \|A^v(t') - A^v(t)\|_{(Y,X)} &\leq \|A(t', v(t')) - A(t', v(t))\|_{(Y,X)} + \|A(t', v(t)) - A(t, v(t))\|_{(Y,X)} \\ &\leq \mu_1 \|v(t') - v(t)\|_X + \|A(t', v(t)) - A(t, v(t))\|_{(Y,X)}, \end{aligned}$$

portanto o lema segue de (A3) e de $v \in C([0,T'], X)$.

Lema 2.14. *A aplicação $t \in [0,T'] \longmapsto B^v(t) \in (X)$ é fracamente contínua(portanto fortemente mensurável).*

Demonstração. Seja $y \in Y$, de (A2) temos que

$$S^{-1}B^v(t)y = A^v(t)S^{-1}y - S^{-1}A^v(t)y,$$

pelo lema anterior o membro direito da igualdade anterior e contínuo de $[0,T']$ em X. Portanto o mesmo é verdade do membro esquerdo. Como

$$\|S^{-1}B^v(t)\|_{(X)} \leq \|S^{-1}\|_{(Y,X)}\lambda_1,$$

por (A2), e como Y é denso em X, segue que $t \in [0,T'] \longmapsto S^{-1}B^v(t)x$ é contínua para cada $x \in X$. Como

$$\|S^{-1}B^v(t)x\|_Y \leq \|B^v(t)x\|_X \leq \lambda_1\|x\|,$$

segue pelo lema (2.11) que $t \in [0,T'] \longmapsto B^v(t)x \in X$ e fracamente contínua. Portanto de (X), (A1),(A2),(A3) e dos lemas (2.13) e (2.14) temos que as hipóteses do teorema (2.3) são satisfeitas para a família $\{A^v(t)\}_{\{0 \leq t \leq T'\}}$. Portanto existe um único operador $U^v = \{U^v(t,s)\}$ definido em

$$\triangle' = \{(t,s) | 0 \leq s \leq t \leq T'\},$$

com as propriedades descritas no teorema (2.3).

Seja

$$f^v(t) = f(t, v(t)) \in Y,\ t \in [0,T'],\ v \in E.$$

Lema 2.15. *Temos que*

$$\|f^v(t)\|_Y \leq \lambda_3,$$

e $t \in [0, T'] \to f^v(t)$ *é contínua na norma de* X *e fracamente contínua (portanto fortemente mensurável) na norma de* Y*.*

Demonstração. De (f1) temos que

$$\|f(t, v(t))\|_Y \leq \lambda_3.$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \|f^v(t') - f^v(t)\|_X &\leq \|f(t', v(t')) - f(t', v(t))\|_X + \|f(t', v(t)) - f(t, v(t))\|_X \\ &\leq \mu_2 \|v(t') - v(t)\|_X + \|f(t', v(t)) - f(t, v(t))\|_X, \end{aligned}$$

logo a continuidade segue de (f1) e $v \in C([0, T'], X)$. A continuidade fraca de f^v na norma de Y segue do lema (2.11). Pelo lema anterior nós podemos aplicar o teorema (2.4) para o problema de Cauchy (pois $f^v : [0, T'] \to Y$ é fortemente mensurável).

$$(L^v) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A^v(t)u = f^v(t), \quad t \in [0, T'] \\ u(0) = \phi \in W \subset Y, \end{cases} \tag{2.30}$$

cuja solução é dada por

$$u(t) = U^v(t, 0)\phi + \int_0^t U^v(t, s) f^v(s) ds,$$

onde $u \in C([0, T'], Y) \cap C^1([0, T'], X)$.

Seja

$$\Phi v(t) = U^v(t, 0)\phi + \int_0^t U^v(t, s) f^v(s) ds,$$

então temos o

Lema 2.16. *Existe* $T' \in (0, T]$ *tal que* $\Phi : E \to E$*.*

Demonstração. De (2.43) e (2.7) temos que

$$\|U^v\|_X \leq e^{\beta T'} \text{ e } \|U^v\|_Y \leq e^{(\beta + \lambda_1)T'},$$

pois $\|S\|_{(Y,X)} = \|S^{-1}\|_{(X,Y)} = 1$ e

$$\|B^v\|_{1,X} \leq \lambda_1 T', \text{ visto que } \|B^v(t)\|_X \leq \lambda_1.$$

Para estimar $\|u(t) - y_0\|_Y$ façamos $u' = u - y_0$ e consideremos o problema de Cauchy,

$$\begin{cases} \dfrac{du'}{dt} + A^v(t)u' = f^v(t) - A^v(t)y_0, \quad t \in [0, T'] \\ u'(0) = \phi - y_0. \end{cases} \tag{2.31}$$

A solução do problema anterior é dada por

$$u(t) - y_0 = U^v(t,0)(\phi - y_0) + \int_0^t U^v(t,s)(f^v(s) - A^v(s)y_0)ds,$$

logo

$$\begin{aligned} \|u(t) - y_0\|_Y &\leq e^{(\beta+\lambda_1)T'}\|\phi - y_0\|_Y + e^{(\beta+\lambda_1)T'}\int_0^t \|(f^v(s) - A^v(s)y_0)\|_Y \\ &\leq e^{(\beta+\lambda_1)T'}(\|\phi - y_0\|_Y + (\lambda_3 + \lambda_2)T'). \end{aligned}$$

Como $\|\phi - y_0\| < R$, é possivel escolher $T' > 0$ tal que o lado direito da última desigualdade ainda seja menor do que R. Como $u \in C([0, T'], X)$, para todo $T' \leq T$, temos que $\Phi v = u \in E$.

Lema 2.17. *Existe $T' \in (0, T]$ tal que $\Phi : E \to E$ é uma contração.*

Demonstração. Pela desigualdade (2.12) temos que

$$d(\Phi w, \Phi v) \leq e^{\beta T'}(\|f^w - f^v\|_{1,X} + \|(A^w - A^v)\Phi v\|_{1,X}), \tag{2.32}$$

por (f1) temos que

$$\|f^w(t) - f^v(t)\|_X = \|f(t, w(t)) - f(t, v(t))\|_X \leq \mu_2\|w(t) - v(t)\|_X,$$

logo

$$\|f^w - f^v\|_{1,X} \leq \mu_2 T' d(w, v). \tag{2.33}$$

Por (1.16) e $\Phi v \in E$ (lema anterior) temos que

$$\begin{aligned} \|(A^w(t) - A^v(t))\Phi v(t)\|_X &\leq \|A(t, w(t)) - A(t, v(t))\|_{(Y,X)}\|\Phi v(t)\|_Y \\ &\leq \mu_1\|w(t) - v(t)\|_X(\|y_0\|_Y + R), \end{aligned}$$

logo

$$\|(A^w - A^v)\Phi v\|_{1,X} \leq \mu_1(\|y_0\|_Y + R)T' d(w, v), \tag{2.34}$$

então usando (2.33) e (2.34) em (2.32) temos que

$$d(\Phi v, \Phi w) \leq T' e^{\beta T'}(\mu_2 + \mu_1\|y_0\| + R)d(v, w).$$

Portanto tomando $T' \in (0,T]$ tal que $T'e^{\beta T'}(\mu_2+\mu_1\|y_0\|+R) < 1$, temos que Φ é uma contração. Pelo exercício (2.12) e pelo teorema do ponto fixo de Banach, Φ possui um único ponto fixo em E. Note que obtivemos a existência e unicidade para (Q) apenas em E.

Sejam $u, v \in C([0,T'],Y) \cap C^1([0,T'],X)$, tais que $u(0) = v(0) = \phi$, então os respectivos problemas (Q) são equivalentes a

$$u(t) = \phi + \int_0^t [f(s,u) - A(s,u)u]ds$$

e

$$v(t) = \phi + \int_0^t [f(s,v) - A(s,v)v]ds.$$

Então, utilizando as propriedades (f1) e (A3) temos que

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_X &\leq \int_0^t \|f(s,u) - f(s,v) + A(s,v)v - A(s,u)u\|_X ds \\
&= \int_0^t \|f(s,u) - f(s,v) + A(s,v)v - A(s,v)u + A(s,v)u - A(s,u)u\|_X ds \\
&\leq \mu_2 \int_0^t \|u - v\|_X ds + \int_0^t \|A(s,v)\|_{(Y,X)} \|u - v\|_X ds + \\
&+ \int_0^t \|A(s,v) - A(s,u)\|_{(Y,X)} \|u\|_X ds \\
&\leq \mu_2 \int_0^t \|u - v\|_X ds + c_1 \int_0^t \|u - v\|_X ds + \\
&+ c_2\mu_1 \int_0^t \|u - v\| \|u\|_Y ds \\
&\leq (\mu_2 + c_1 + c_2\mu_1(\|y_0\|_Y + R)) \int_0^t \|u - v\|_X ds,
\end{aligned}$$

onde $c_1 = \sup_{s\in[0,T']}\{\|A(s,u)\|_{(Y,X)}\}$ e $\|u\|_X \leq c_2\|u\|_Y$. Portanto pelo lema de Gronwall $\|u(t) - v(t)\|_X \leq 0, \ \ \forall \ t \in [0,T']$, portanto $u = v$.

A teoria desta seção pode ser vista em [12], [13] e [16].

2.3 Regularização Parabólica

Sejam $I = [t_0, T]$, $A_\mu : D(A_\mu) \subset X \to X$, linear $F : I \times H \to X$, onde H e X são espaços de Banach. Seja $\mu \geq 0$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u = -A_\mu u + F(t,u), \ \ t > 0 \\ u(t_0) = \phi, \end{cases} \tag{2.35}$$

2.3.1 Existência e Unicidade de Solução

Teorema 2.18. *(H1) (i) Suponha que V, H e X são espaços de Banach reais tais que $V \hookrightarrow H \hookrightarrow X$.*

(H2) (i) Se $\mu \geq 0$, $A_\mu : D(A_\mu) \subset X \to X$ é linear.

(ii) Temos que $H \subset D(A_\mu)$, $\mu \geq 0$.

(iii) Para $\mu > 0$, A_μ satisfaz as condições do teorema de Hille-Yosida.

(iv) Se $\mu > 0$ e $h \in H$ então $e^{-tA_\mu}h \in H$ e

$$t \in R_+ = [0, \infty) \mapsto e^{-tA_\mu}h \in H$$

é contínua.

(v) Se $\mu, t > 0$ então $e^{-tA_\mu} \in \mathcal{B}(X, V)$ e

$$\|e^{-tA_\mu}x\|_V \leq g_\mu(t)\|x\|_X, \tag{2.36}$$

onde $x \in X$ e $g_\mu \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

(vi) A aplicação

$$t \in (0, \infty) \mapsto e^{-tA_\mu}x \in V,$$

é contínua para cada $x \in X$.

(H3) (i) $F : I \times H \to X$ é contínua.

(ii) $F(t, 0) = 0, \forall t \in I$.

(iii) Existe $\gamma : I \times R^2_+ \to R_+$ não decrescente tal que

$$\|F(t, u) - F(t, v)\|_X \leq \gamma(t, \|u\|_H, \|v\|_H)\|u - v\|_H, \tag{2.37}$$

$\forall t \in I, u, v \in H$.

Então, se $\phi \in H$ e $\mu > 0$, existe $T_\mu = T(\mu, \|\phi\|_H) \in (0, T]$ e uma única $u_\mu \in C([0, T_\mu], H)$ solução de (2.35).

2.3.2 Intervalo de Existência

Teorema 2.19. *(H1) (ii) Temos que H é espaço de Hilbert real com produto interno $(\cdot|\cdot)_H$ e*

$$\langle v, h \rangle = (v|h)_H, \quad v \in V, h \in H.$$

(H2) (vi) Se $\mu > 0$ *e* $v \in V$ *temos que*

$$\langle v, A_\mu v \rangle \geq 0.$$

(H3) (iv) Existe $\beta : I \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *contínua tal que*

$$\langle v, F(t, v) \rangle \leq \beta(t, \|v\|_H^2)\rangle, \quad \forall\ t \in I, v \in V.$$

Então existe $T_+ = T_+(\|\phi\|_H) \in (0, T]$ *tal que, para todo* $\mu > 0$*,* $u_\mu(t)$ *pode ser estendida a* $[0, T_+]$ *satisfazendo*

$$\|u_\mu\|_H \leq \rho(t), \quad 0 \leq t \leq T_+, \tag{2.38}$$

onde ρ *é a solução maximal do problema de valor inicial,*

$$\begin{cases} \rho'(t) = 2\beta(t, \rho(t)), \ t > 0 \\ \rho(0) = \|\phi\|_H^2. \end{cases} \tag{2.39}$$

Aqui, estamos entendendo por solução maximal uma solução $\rho = \rho(t)$*, definida num intervalo maximal* $[0, r)$ *e maior ou igual a qualquer outra solução de* (2.39).

A teoria desta seção pode ser vista em [16].

2.4 O Teorema de Kato-Lai

Este capítulo trata de um teorema devido a Tosio Kato e Chi Yuen Lai, que é o teorema que da nome ao capítulo. Ele foi publicado em [24]. Este teorema aborda a existência de solução fraca para o Problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \partial_t u = F(t, u), \ t > 0 \\ u(0) = \phi, \end{cases} \tag{2.40}$$

onde F é em geral um operador não linear.

A respeito da unicidade e da continuidade da solução, enunciaremos mais dois teoremas que podem ser encontrados em [26]. Estas notas são baseadas principalmente na referência [25].

2.4.1 Existência

Antes de enunciar o próximo teorema precisamos de algumas definições.

Definição 3. Um terno $\{V, H, X\}$ de espaços de Banach reais e separáveis e dito admissível se

i) $V \hookrightarrow H \hookrightarrow X$.

ii) H é espaço de Hilbert com produto interno $(\ |\ )_H$ e norma $\|\ \|_H = (\ |\ )_H^{1/2}$

iii) Existe uma forma bilinear $\langle , \rangle$ definida em $V \times X$, contínua e não degenerada, tal que

$$\langle v, u \rangle = (v|u)_H, \quad \forall v \in V, u \in H.$$

Uma forma bilinear é não degenerada se

$$\langle v, x \rangle = 0, \quad \forall x \in X \Leftrightarrow v = 0.$$

e

$$\langle v, x \rangle = 0, \quad \forall v \in V \Leftrightarrow x = 0.$$

Definição 4. Sejam Z_1 e Z_2 espaços de Banach e I um intervalo. Então $f : I \times Z_1 \to Z_2$ é fracamente sequencialmente contínua (w.s.c) se

$$t_n \to t \text{ } em \text{ } I \text{ } e \text{ } z_n \rightharpoonup z \text{ } em \text{ } Z_1 \Rightarrow f(t_n, z_n) \rightharpoonup f(t, z) \text{ } em \text{ } Z_2,$$

onde $\rightharpoonup$ denota convergência fraca.

Definição 5. Sejam Z um espaço de Banach e I um intervalo. Então definimos

a) $C_w(I, Z) = \{f : I \to Z |\ f \text{ é } w.s.c\}$.

b) $C_w^1(I, Z) = \{f : I \to Z |\ f$ é fracamente derivável com derivada fraca em $C_w(I, Z)\}$.

c) $C_+(I, Z) = \{f : I \to Z |\ f$ é fortemente contínua à direita em $I - \{\sup I\}\}$.

d) $C_-(I, Z) = \{f : I \to Z |\ f$ é fortemente contínua à esquerda em $I - \{\inf I\}\}$.

e) $C(I, Z) = \{f : I \to Z |\ f$ é fortemente contínua em $I\}$

f) $C^1(I, Z) = \{f : I \to Z |\ f$ é fortemente derivável com derivada forte em $C(I, Z)\}$.

Aqui, o termo forte refere-se ao espaço de Banach Z munido da topologia dada por sua norma.

Definição 6. i) Dizemos que f é fracamente derivável com derivada fraca $f' : I \to Z$ se

$$\frac{d}{dt}\lambda(f(t)) = \lambda(f'(t)), \quad \forall \lambda \in Z'.$$

ii) Sejam $H \subset X$ espaços de Banach e $[s,T]$ um intervalo não degenerado. Diremos que uma dada aplicação $u : [s,T] \to H$ é solução de (2.40) em $C_w([s,T],H) \cap C_w^1([s,T],X)$ se $u \in C_w([s,T],H) \cap C_w^1([s,T],X)$ e u satisfaz (2.40) no sentido fraco. Isto quer dizer

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t)) = \lambda(F(t,u(t))), \quad \lambda \in X'.$$

Teorema 2.20. *(Existência de Solução) Sejam $\{V,H,X\}$ um terno admissível, $[S,T_0]$ um intervalo não degenerado e*

$$F : [S,T_0] \times H \to X,$$

uma aplicação fracamente sequencialmente contínua (w.s.c) tal que

$$\langle v, F(t,v)\rangle \leq \beta(\|v\|_H^2), \quad \forall t \in [S,T_0], v \in V,$$

onde β é uma função continua não-decrescente de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$. Seja $s \in [S,T_0)$, então dado $\phi \in H$, para qualquer T tal que $s < T \leq T_0$ e $[s,T] \subset D(\rho)$ (definido abaixo), existe uma solução u de (2.40) *em $C_w([s,T];H) \cap C_w^1([s,T];X)$, onde ρ é a solução maximal da EDO*

$$\begin{cases} \rho' = 2\beta(\rho) \\ \rho(s) = \rho_0 \end{cases} \tag{2.41}$$

para algum $\rho_0 \geq \|\phi\|_H^2$ arbitrário. Além disso

$$\|u(t)\|_H^2 \geq \rho(t) \quad \forall t \in [s,T].$$

2.4.2 Unicidade e continuidade

Teorema 2.21. *(Unicidade) Seja Y um espaço de Banach real tal que $X \subset Y$, continuamente. Seja $\langle , \rangle : X \times Y \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, contínua, não-degenerada, positiva (ie, $\langle x,x\rangle \geq 0$, $\forall x \in X$) e simétrica (ie, $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$, $\forall x,y \in X$). Se $F : [S,T_0] \times H \to X$ satisfaz as condicões do teorema* (2.20) *e além disso,*

$$\langle u-v, F(t,u)\rangle \leq \gamma(\|u\|_H, \|v\|_H)\langle u-v, u-v\rangle, \quad \forall u,v \in H, t \in [S,T_0] \tag{2.42}$$

onde $\gamma : \mathbb{R}^2 \to R_+$ localmente limitada, então existe uma única solução em $C_w([s,T];H) \cap C_w^1([s,T];X)$, de (2.40) *e esta solução pertence a $C_+([s,T];H)$, $\forall [s,T] \subset D(\rho)$.*

Teorema 2.22. *(Continuidade) Suponha que a aplicação* $F : [S, T_0] \times H \to X$ *satisfaz as hipóteses dos teoremas* (2.20) *e* (2.21) *com* $\langle , \rangle$ *substituídos por* $|\langle , \rangle|$. *Seja* u *a solução de* (2.40) *dada pelos teoremas* (2.20) *e* (2.21), *então* $u \in C([s, T], H) \cap C^1_w([s, T], X)$. *Além disso, se* F *é fortemente contínua então*

$$u \in C([s, T], H) \cap C^1([s, T], X).$$

2.5 Espaços de Bourgain

A seguir, introduziremos um espaço de funções, utilizado no estudo das equações de evolução do tipo dispersivo, por exemplo para o problema de Valor Inicial associado a equação KdV

$$\begin{cases} u_t + u\, u_x + u_{xxx} = 0, \;\; x, t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{2.43}$$

Consideremos o problema de Cauchy associado a KdV linear

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} = 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{2.44}$$

A solução de (2.44) é dada por $u(x, t) = U(t)\phi$, onde o grupo unitário $U(t)$ é definido por

$$\widehat{U(t)\phi}(\xi) = e^{it\xi^3}\hat{\phi}(\xi).$$

Definição 7. Sejam $s, b \in \mathbb{R}$, definimos

$$X_{s,b} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{f}(\xi, \tau)(1 + |\tau - \xi^3|)^{2b}(1 + |\xi|)^{2s} d\xi d\tau\},$$

onde $\hat{}$ denota a transformada de Fourier em $\mathbb{R}^2$.

Observação. Seja $\widehat{J^s f}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{s/2}$, e $\widehat{\Lambda^b f}(\tau) = (1 + |\tau|^2)^{b/2}\hat{f}(\tau)$, onde $\hat{}$ denota a transformada de fourier em uma variável. Então,

$$\|f\|_{X_{s,b}} = \|\Lambda^b J^s U(-t) f\|_{L^2_\xi L^2_\tau}.$$

Proposição 1. *Seja* $s > -3/4$. *Então existe* $b' \in (-1/2, 0)$ *e* $\epsilon_s > 0$ *tal que para qualquer* $b \in (1/2, b' + 1]$ *com* $1 - b + b' \leq \epsilon_s$, *e* $u, v \in X_{s,b}$

$$\|(uv)_x\|_{X_{s,b'}} \leq c\|u\|_{X_{s,b}}\|v\|_{X_{s,b}}.$$

A demonstração desta proposição pode ser vista em [27]. Mais informações podem ser vistas em [30] e [29].

Usando os resultados acima e outros analogos e com argumentos do tipo Picard; Kenig C. E., Ponce G. e Vega L. provam em [28] o seguinte resultado

Teorema 2.23. *Seja $s \in (-3/4, 0)$. Então existe $b \in (1/2, 1)$ tal que para cada $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ existe $T = T(||\phi||_{H^s})$ (com $T(\rho) \to +\infty$ quando $\rho \to 0$) e uma unica solução $u(t)$ do PVI (2.43) no intervalo de tempo $[-T, T]$ satisfazendo*

$$u \in C([-T, T] \colon H^s(\mathbb{R})), \tag{2.45}$$

$$u \in X_{s,b} \subset L^p_{x,loc}\left(\mathbb{R} \colon L^2_t(\mathbb{R})\right), \text{ para } 1 \leq p \leq +\infty, \tag{2.46}$$

$$\partial_x u \in X_{s-3,b-1}. \tag{2.47}$$

Alem disso, para cada $T' \in (0, T)$ existe $R = R(T') > 0$ tal que a aplicação $\tilde{\phi} \mapsto \tilde{u}(t)$ de $\left\{\tilde{\phi} \in H^s(\mathbb{R}) \colon ||\phi - \tilde{\phi}||_{H^s} < R\right\}$ na classe de funções definidas em ((2.45)) - ((2.47)) com T' em vez de T, é suave.

Capítulo 3

O Problema de Valor Inicial para o Fluxo de Brinkman

3.1 Introdução

Na modelagem do escoamento de fluidos em meios porosos, é típico usar equações de conservação de massa e uma versão da lei de Darcy´s que substitui as equações de conservação do momentum. Por exemplo, se $\vec{v}$ a velocidade macroscópica e P a pressão, então estas estão relacionadas pela seguinte equação

$$\nabla P = -\frac{\mu}{k}\,\vec{v} \tag{3.1}$$

onde k é a permeabilidade do meio poroso e μ a viscosidade do fluido. Por outro lado a equação (3.1) em muitos casos não da uma boa descrição do fluxo, para sanar estas deficiencias H. C. Brinkman [9] sugere a seguinte modificação

$$\nabla P = -\frac{\mu}{k}\,\vec{v} + \mu_{eff}\,\Delta\vec{v} \tag{3.2}$$

Então a equação de Brinkman´s resulta de uma modificação da lei de Darcy´s pela adição de um termo viscoso, onde o coeficiente μ_{eff} é usualmente identificado como a viscosidade efectiva do fluido . Nesse caso o fluxo de Brinkman é descrito pelo seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} \phi\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\,\vec{v}) = F\,(t,\rho)\,, \\ (-\mu_{eff}\Delta + \frac{\mu}{k})\vec{v} = -\nabla P(\rho), \end{cases} \tag{3.3}$$

onde ϕ é a porosidade do meio, ρ a densidade do fluido e F a taxa do fluxo de massa externa.

A seguir estudaremos o problema de Valor Inicial para o fluxo uni-dimensional de Brinkman. Alem disso, para simplificar a notação, escolheremos todas os coeficientes igual a 1. Assim obtemos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_x(\rho\, v) = F\,(t,\rho)\,, \\ (-\partial_x^2 + 1)v = -\partial_x P(\rho), \\ (\rho(0), v(0)) = (\rho_0, v_0) \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$.

De (3.4) calculamos $v(t,\, x)$ usando a segunda equação, obtendo

$$v = -\left(1 - \partial_x^2\right)^{-1} \partial_x P\,(\rho)\,, \tag{3.5}$$

e substituindo na primeira equação, obtemos o seguinte problema de valor inicial para o fluxo de Brinkman

$$\begin{cases} \partial_t \rho = \partial_x \left(\rho \left(1 - \partial_x^2\right)^{-1} \partial_x P\,(\rho)\right) + F\,(t,\rho) \\ \rho\,(0) = \rho_0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Então resolvendo (3.6), calculamos v usando (3.5). Naturalmente a seguinte condição de compatibilidade deve ser satisfeita:

$$v_0 = -\left(1 - \partial_x^2\right)^{-1} \partial_x P\,(\rho_0)\,. \tag{3.7}$$

3.2 A Boa Postura do Problema de Cauchy para o Fluxo de Brinkman (Teoria Quasilinear de Kato)

Nesta seção usaremos a teoria quasilinear de Kato (2.2.2) para provar a boa postura local de (3.6) nos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ para todo $s > 3/2$. A seguir estabeleceremos condições suficientes para aplicar o teorema de Kato, para existência local de soluções para o problema da forma

$$\begin{cases} \partial_t u + A\,(t,u)\,u = f\,(t,u) \in X \\ u\,(0) = \phi \in Y \end{cases} \tag{3.8}$$

Nós tomamos $X = L^2(\mathbb{R})$, $Y = H^s(\mathbb{R})$ e $S = \left(1 - \partial_x^2\right)^{s/2} = J^s$. Assim obtemos o seguinte teorema

Teorema 3.1. *Seja*

$$A(\rho) f = -\partial_x \left(f \left(1 - \partial_x^2\right)^{-1} \partial_x P(\rho) \right) = -\partial_x \left(f J^{-2} \partial_x P(\rho) \right), \tag{3.9}$$

e a EDP em (3.6) pode ser escrita como

$$\partial_t \rho + A(\rho) = F(t, \rho). \tag{3.10}$$

Seja $\rho_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $s > 3/2$, P *e* F *com as condições seguintes:*
(a) $P \colon H^s(\mathbb{R}) \hookleftarrow$, $P(0) = 0$ *e Lipchitz no sentido*

$$\|P(\rho) - P(\widetilde{\rho})\|_s \leq L_s\left(\|\rho\|_s, \|\widetilde{\rho}\|_s\right) \|\rho - \widetilde{\rho}\|_s \tag{3.11}$$

onde $L_s : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty)$ *é contínuo e monotono não decrescente em todas as variaveis.*
(b) $F : [0, T_0] \times H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$, $F(t, 0) = 0$ *e satisfaz a seguinte condição Lipchitz:*

$$\|F(t, \rho) - F(t, \widetilde{\rho})\|_s \leq M_s\left(\|\rho\|_s, \|\widetilde{\rho}\|_s\right) \|\rho - \widetilde{\rho}\|_s. \tag{3.12}$$

Então (3.6) é localmente bem colocado.

Demonstração. Primeiramente temos que provar que $A(\rho)$, $\rho \in H^s(\mathbb{R})$ é quasi-m-acretivo em $L^2(\mathbb{R})$ (veja [14]). Dado que $H^s(\mathbb{R})$ é um espaço de Hilbert, é suficiente mostrar que existe um $\beta > 0$
(a) $(A(\rho) f \,|\, f)_0 \geq -\beta \|f\|_0^2$ para todo $f \in \mathcal{D}(A(\rho)) = H^1(\mathbb{R})$;
(b) $(A(\rho) + \lambda)$ é sobre $L^2(\mathbb{R})$ para algum (equivalentemente para todo) $\lambda > \beta$. (Para detalhes veja [15].)
Por tanto $A(\rho)$ gera um C^0-semigrupo, $U_\rho(s) = \exp(-sA(\rho))$, $s \in [0, \infty)$, tal que

$$\|U_\rho(s)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq \exp(\beta s). \tag{3.13}$$

A seguir mostraremos que

$$\begin{gathered} SA(\rho) S^{-1} = A(\rho) + B(\rho) \\ B(\rho) \in \mathcal{B}\left(L^2(\mathbb{R})\right) \\ \|B(\rho)\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))} \leq q(\rho), \end{gathered} \tag{3.14}$$

onde $q(\cdot)$ é uma função não decrescente. Logo é sufiente mostrar que

$$\begin{gathered} [S, A(\rho)] = SA(\rho) - A(\rho) S \in \mathcal{B}\left(H^s(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})\right) \\ \|[S, A(\rho)]\|_{\mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))} \leq q(\rho), \end{gathered} \tag{3.15}$$

para alguma função não decrescente $q(\cdot)$.

Seja $f \in H^s(\mathbb{R})$ e

$$\Theta(\rho) = J^{-2}\nabla P(\rho). \tag{3.16}$$

Então,

$$[S, A(\rho)] = J^s\partial_x(f\Theta(\rho)) - \partial_x((J^s f)\Theta(\rho)) = \tag{3.17}$$

$$= [J^s, \partial_x\Theta(\rho)]f + [J^s, \Theta(\rho)]\partial_x f.$$

Combinando o fato que $J^{-2}\,\partial_x \in \mathcal{B}(H^s(\mathbb{R}), H^{s+1}(\mathbb{R}))$ com as hipotesis sobre p , nos concluimos que $\Theta(\rho) \in H^{s+1}(\mathbb{R})$ e

$$\|\Theta(\rho)\|_{s+1} \leq \left\|J^{-2}\,\partial_x\right\| L_s(\|\rho\|\,, 0)\,\|\rho\|_s\,. \tag{3.18}$$

A estimativa desejada seque-se do Lemma (A4) of [17]. Finalmente, as kipotesis sobre P e F implica as condições Lipchtz requeridas pela teoria de Kato. Assim temos provado o teorema.

3.3 O Método de Picard, Regularização Parabolica e Existência Global para o Fluxo de Brinkman

O teorema 3.1 continua valendo se nos regularizamos a equação. Mais precisamente, obtemos o mesmos resultados para o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t\rho^{(\mu)} = \partial_x\left(\rho^{(\mu)}\left(1-\partial_x^2\right)^{-1}\partial_x P\left(\rho^{(\mu)}\right)\right) + F\left(t,\rho^{(\mu)}\right) + \mu\partial_x^2\rho^{(\mu)} \\ \rho^{(\mu)}\left(0\right) = \rho_0. \end{cases} \tag{3.19}$$

para quaisquer $\mu \geq 0$. Por outro lado, devido as propriedades regularizantes do C^0-semigrupo $U_\mu\left(t\right) = \exp\left(\mu t\partial_x^2\right)$, $\mu > 0$, nos podemos resolver o problema usando o método de Picard, isto é, usando o Teorema do Ponto fixo de Banach e a desigualdade de Gronwall´s na equação integral

$$\rho^{(\mu)}\left(t\right) = U_\mu\left(t\right)\rho_0 + \int_0^t U_\mu\left(t-t'\right)\left[A\left(\rho^{(\mu)}\left(t'\right)\right)\rho^{(\mu)}\left(t'\right) + F\left(t,\rho^{(\mu)}\left(t\right)\right)\right]dt'. \tag{3.20}$$

De facto nós temos um resultado melhor neste caso.

Teorema 3.2. *Suponhamos que $\mu > 0$ e que P e F satisfazem (3.11) e (3.12) para algum $s > 1/2$ fixo. Then (3.19) é localmente bem colocado em $H^s\left(\mathbb{R}\right)$. Alem disso, se $\left(0, T_\mu\right]$ é um intervalo de existência, então $\rho^{(\mu)} \in C\left(\left(0, T_\mu\right]; H^\infty\left(\mathbb{R}\right)\right)$, onde $H^\infty\left(\mathbb{R}\right) = \bigcap_{s\in\mathbb{R}} H^s\left(\mathbb{R}\right)$ provido da natural topologia de espaço de Frechet.*

Demonstração. Daremos uma demostração bem detalhada na apresentação do minicurso, o leitor pode encontrar as demonstrações em [18] , [19] e [1].

Para o limite, quando μ tende a zero, devemos mostrar que é possível escolher intervalos de existência independentes de μ. Então temos

Lema 3.3. *Suponha que μ, P e F são dados como no Teorema 3.2. Então existe um $T = T(\phi)$, independente de $\mu > 0$ tal que toda solução $\rho^{(\mu)}$ pode ser estendida, caso necessário, para $[0, T]$.*

Demonstração. Dado que $\rho^{(\mu)} \in C((0, T_\mu]; H^\infty(\mathbb{R}))$, as seguintes contas são inteiramente rigorosas:

$$\begin{aligned} \partial_t \left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s^2 &= 2\left(\rho^{(\mu)} \left| \partial_t \rho^{\mu} \right.\right)_s \\ &= 2\mu\left(\rho^{(\mu)} \left| \partial_x^2 \rho^{(\mu)} \right.\right)_s + 2\left(\rho^{(\mu)} \left| A\left(\rho^{(\mu)}\right)\rho^{(\mu)} \right.\right)_s + 2\left(\rho^{(\mu)} \left| F\left(t, \rho^{(\mu)}\right) \right.\right)_s \end{aligned} \tag{3.21}$$

Integrando por partes e usando as hipotesis sobre P e F, obtemos

$$2\mu\left(\rho^{(\mu)} \left| \partial_x^2 \rho^{(\mu)} \right.\right)_s = -2\mu \left\| \partial_x \rho^{(\mu)} \right\|_s^2 \leq 0, \tag{3.22}$$

$$\left| \left(\rho^{(\mu)} \left| F\left(t, \rho^{(\mu)}\right) \right.\right)_s \right| \leq M_s\left(\left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s, 0 \right) \left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s^2, \tag{3.23}$$

e

$$\left| \left(\rho^{(\mu)} \left| A\left(\rho^{(\mu)}\right)\rho^{(\mu)} \right.\right)_s \right| = \left| \left(\left(\rho^{(\mu)}\right)^2 \left| \partial_x^2 J^{-2} P\left(\rho^{(\mu)}\right) \right.\right) \right| \leq L_s\left(\left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s \right) \left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s^3. \tag{3.24}$$

Segue-se então

$$\partial_t \left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s^2 \leq M_s\left(\left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s, 0 \right) \left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s^2 + L_s\left(\left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s \right) \left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s^3 = G\left(\left\| \rho^{(\mu)} \right\|_s^2 \right). \tag{3.25}$$

Seja $h(t)$ a solução maximal do problema

$$\begin{cases} \partial_t h(t) = G(h(t)) \\ h(0) = \|\rho_0\|_s^2 . \end{cases} \tag{3.26}$$

Então

$$\left\| \rho^{(\mu)}(t) \right\|_s^2 \leq h(t) \tag{3.27}$$

sempre que ambos os lados são definidos. Isto termina a prova dado que h não depende de μ.

A partir de agora, nós podemos supor, por simplicidade, que $F(t, \rho) = 0$. Todos os seguintes argumentos podem ser facilmente modificado, sob suposições convenientes, para o caso de F

diferente de zero. Em vista do teorema 3.2, a seguinte conta é inteiramente rigorosa se $\mu > 0$. Para simplificar a notação $\rho^{(\mu)} = \rho$

$$\begin{aligned} \partial_t \|\rho(t)\|_0^2 &= 2(\rho(t) | \partial_t \rho(t))_0 = \\ &= 2\mu \left(\rho(t) \left| \partial_x^2 \rho(t)\right.\right)_0 + 2\left(\rho(t) \left| \partial_x(\rho(t))\left(1-\partial_x^2\right)^{-1} \partial_x P(\rho)\right.\right)_0. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Integrando por partes mostramos que $\mu\left(\rho(t) \left| \partial_x^2 \rho(t)\right.\right) \leq -\mu \|\partial_x \rho(t)\|_s^2 \leq 0$, de modo que nós possamos desconsiderar o primeiro termo no terceiro membro de (3.28). Mas então,

$$\begin{aligned} \partial_t \|\rho(t)\|_0^2 &= 2(\rho(t) | \partial_t \rho(t))_0 \\ &\leq 2\left(\rho(t) \left| \partial_x(\rho(t))\left(1-\partial_x^2\right)^{-1} \partial_x P(\rho(t))\right.\right)_0 = -\left(\partial_x \rho(t)^2 \left| \left(1-\partial_x^2\right)^{-1} \partial_x P(\rho(t))\right.\right)_0 \\ &= \left(\rho(t)^2 \left| \left(1-\partial_x^2\right)^{-1} \partial_x^2 P(\rho(t))\right.\right)_0 \\ &= -\left(\rho(t)^2 | P(\rho(t))\right)_0 + \left(\rho(t)^2 \left| \left(1-\partial_x^2\right)^{-1} P(\rho(t))\right.\right)_0 \\ &\leq -\left(\rho(t)^2 | P(\rho(t))\right)_0 + \left\|\rho(t)^2\right\|_0 \left\|\left(1-\partial_x^2\right)^{-1} P(\rho(t))\right\|_0 \\ &\leq -\left(\rho(t)^2 | P(\rho(t))\right)_0 + \frac{\left\|\rho(t)^2\right\|_0^2 + \left\|\left(1-\partial_x^2\right)^{-1} P(\rho(t))\right\|_0^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Mas $\left\|\left(1-\partial_x^2\right)^{-1} P(\rho(t))\right\|_0 \leq P(\rho(t))$ temos que (3.29) implica

$$\partial_t \|\rho(t)\|_0^2 \leq \frac{1}{2}\left\|\rho(t)^2 - P(\rho(t))\right\|_0^2. \tag{3.30}$$

Assim se $P(\rho) = \rho^2$, segue-se que $\partial_t \|\rho(t)\|_0^2 \leq 0$ which, in turn implies that $\|\rho(t)\|_0^2 \leq \|\rho_0\|_0^2$. Alem disso este argumento nos mostra que $P(\rho) = \rho^2$ é uma natural escolha para a função $P(\rho)$. De fato, podemos monstrar que todas as normas de Sobolev permanecem finitas quando $t \to \infty$. A combinação destes resultados com a boa postura local na seção anterior vemos que, se $P(\rho) = \rho^2$ então (3.19) é global bem colocado em $H^s(\mathbb{R})$ para todo $s > 3/2$. Assim estabelecemos o seguinte resultado

Teorema 3.4. *Seja $P(\rho) = \rho^{2k}$, $k = 1, 2, 3 \ldots$. Então (3.19) é globalmente bem posto para todo $s > 3/2$ e $\mu \geq 0$*[1].

Demonstração. A prova encontra-se em [1], Teorema 5. Daremos uma demonstração detalhada durante a apresentação do minicurso.

[1] Lembremos que nós estamos supondo que $F(t, \rho) = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] Alarcon E. A., J. Iorio Jr. *On the Cauchy Problem associated to the Brinkman Flow: The One Dimensional Theory*, Matemática Contemporánea, Vol 27, (2004), 1-17.

[2] Cunha. A. R., *O problema de Cauchy para uma Equação de Evolução Não Linear*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística-IME, UFG, Goiânia, 2003.

[3] Cardoso Filho. J. L., *Derivação de uma equação diferencial parcial não-linear na propagação de frentes de reação em química*, Dissertação de Mestrado, Instituto Matemática e Estatística-IME, UFG, Goiânia, (2008).

[4] Bona, J.L., Chen, M., Saut, J.C., *Boussinesq Equations and Other Systems for Small-Amplitude Long Waves in Nonlinear Dispersive Media. I:Derivation and Linear Theory*, J. Nonlinear Sci. Vol. 12, (2002), 283-318.

[5] Edwards, F.B., Wilder, W.J., Showalter, K., *Onset of convection for autocatalytic reaction fronts: Laterally unbounded system*, Physical Review A 43, (1991), 749-760.

[6] Kevorkian, J., Cole, J.D., *Applied mathematical sciences, v.114*, Springer, (1996).

[7] Wilder, W.J., Edwards, F.B, Vasquez, A.D., *Finite thermal diffusivity at onset of convection in autocatalytic systems: Continuous fluid density*, Physical Review A 45, Number 4, (1992), 2320-2327

[8] Wilder, W.J., Edwards, F.B, Vasquez, A.D., Sivashinsky, I.G., *Derivation of a nonlinear front evolution equation for chemical waves involving convection*, Physica D 73 (1994)

[9] Brinkman H. C., *A Calculation of the Viscous Force Exerted by a Flowing Fluid on a Dense Swarm of Particles*, Appl. Scientific Research, A1, (1947), 24-27.

[10] Pazy A., *Semigroups of Linear Operators and Applicatons to Partial Diffe-rential Equations*, Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983;

[11] Gomes. A.,*Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, 2a Ed,Intituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro 1999.

[12] Kato. T., *Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equations*, Lect. Note in Math., 448, (1975), 25-70.

[13] Kato. T., *Linear evolution equations of "hiperbolic"type*, J. Fac. Sci. Univ. of Tokio, vol. 17, (1970), 241-258.

[14] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators,* 3rd Edition, Springer-Verlag (1995).

[15] R. J. Iorio, Jr., *On Kato's Theory of Quasilinear Equations,*

[16] Iório R. J.& Nunes W.V.L., *Introdução às Equações de Evolução não Lineares*, 18 Colóquio Brasileiro de Matemática;

[17] T. Kato, *On the Cauchy Problem for the (Generalized) KdV equation*, Studies in Applied Mathematics, Advances in mathematics Supplementary Studies, vol. 8, Academic Press (1983), 93-128.

[18] R. J. Iorio, Jr. and Valéria de Magalhães Iorio, *Fourier analysis and Partial differential Equations*, Cambridge studies im advanced mathematics, Cambridge University Press (2001).

[19] R. J. Iorio, Jr., *KdV, BO and Friends in Weighted Sobolev Spaces, Functional Analytic Methods for Partial Differential Equations*, H. Fujita, T. Ikebe, S. T. Kuroda (Eds.), Lectire Notes in Mathematics 1450, Springer-Verlag (1990), 104-121.

[20] Lima E. L., *Espaços Métricos*, Projetos Euclides, CNPq, (1993).

[21] Ponce G., *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución*, Escuela de Geometria y Ecuaciones en Derivadas Parciales, Cali, junio de 1993.

[22] Kato T.& Ponce G., *Commutator Estimates and Euler and Navier-Stokes Equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XLI 891-907, 1988;

[23] E. Hille, "Methods in Classical and Functional Analysis". Addison-Wesley Publ. Co., (1972).

[24] Kato. T.& Lai, C. Y. *Nonlinear Evolution Equations and the Euler Flow*, J. Functional Analysis, [56], (1984),15-28.

[25] Santos M. M. *A versão de Kato-Lai do Método de Galerkin e a Equação de Korteweg - de Vries*, Dissertação de Mestrado, IMPA, (1987).

[26] Kato. T. *Nonlinear Equations of Evolution in Banach Spaces*, Center for Pure and Applied Mathematics, University of California, Berkeley, January, (1984), preprint.

[27] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *A bilinear estimate with applications to the KdV equation*, J. Amer.Math. Soc. 92(1996) 573-603.

[28] C. E. Kenig, G. Ponce and L. Vega, *The Cauchy problem for the Korteweg-de Vries in Sobolev spaces of negative indices*, Duke Math. J., (1993), 1-21.

[29] J. Bourgain, *Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equation*, Geometric and Functional Anal. 3(1993) 107-156,209-262.

[30] Linares. F., Ponce. G. *Introduction to Nonlinear Dispersive Equations*, Publicações Matemáticas, IMPA, (2004).