Synergismus scyentifica **UTFPR, Pato Branco, 04 (2) . 2009**
13^o *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - XIII ERMAC*

TEORIA DOS GRAFOS E APLICAÇÕES

Alvaro Ostroski[1], Lucia Menoncini[2]

1.- Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática da UNOCHAPECÓ, **2.-** Professor do curso de Licenciatura em Matemática da UNOCHAPECÓ

Resumo- A teoria dos grafos é um ramo da Matemática que vem crescendo ao longo dos anos. Inicialmente surgiu como um desafio, no problema conhecido como "as pontes de Königsberg", mas com a invenção dos computadores foi ganhando espaço e atualmente é considerada uma ferramenta eficiente para resolver problemas em diferentes áreas como na Matemática, nas Engenharias, na Indústria e no Comércio. Dentre as classes de problemas abordados por esta teoria, pode-se destacar a utilização do modelo conhecido como o "problema de coloração", que busca colorir os vértices de um grafo, de modo que vértices adjacentes apresentem cores distintas, utilizando para isto o menor número possível de cores. Através do problema de coloração, consegue-se modelar um grande número de situações práticas, pois ele consiste em particionar os vértices de um grafo em conjuntos, onde seus elementos apresentam características comuns, que podem ser a cor, a numeração, ou outras.

Palavras-chave:grafos, coloração, particionamento.

THEORY OF THE GRAPHS AND APPLICATIONS

Abstract- The theory of the graphs is a branch of Mathematics that has grown in the last years. At the beginning it came up as a challenge, the problem known as "the bridges of Königsberg", but with the invention of computers it has won space and is nowadays considered to be an efficient tool to solve problems in different areas such as Mathematics, Engineerings, Industry and Commerce. Among the classes of problems addressed by this theory, it can be highlighted the use of the model known as the "coloring problem", that tries to color the vertixes of a graph, in such a way that adjacent vertixes display different colors, using the fewer number of colors possible. Through this coloring problem, a great number of practical situations can be patterned, because it consists in partitioning the vertixes of a graph into sets, where its elements exhibit common characteristics, that may be the color, the numeration, or others.

KeyWord: graphs, coloring, partitioning.

1. INTRODUÇÃO

A teoria dos grafos é um ramo da Matemática Discreta (estuda estruturas matemáticas que não necessitam da noção de continuidade) que estuda objetos denominados grafos. Conforme informações retiradas de Boaventura Netto (2006, p.02), o pioneiro desta teoria foi o matemático suíço Leonhard Euler que formulou e resolveu o problema das pontes de Königsberg, o qual inicialmente se apresentou como uma charada matemática. Além de Euler, Gustav Robert Kirchhoff, Arthur Cayley e William Rowan Hamilton foram alguns dos nomes que utilizaram conceitos de grafos para resolução de problemas e acabaram por contribuir para o desenvolvimento teórico e prático acerca da teoria dos grafos. Um grafo $G = G(V,E)$ pode ser definido como uma estrutura onde V é um conjunto discreto e ordenado de pontos chamados vértices, e E um conjunto de linhas chamadas arestas, e cada aresta está conectada em pelo menos um vértice.

Com a idéia de pontos interligados por linhas, a representação por grafos pode facilitar o entendimento e a resolução de problemas. Desta forma, mapas que representam a estrutura organizacional de uma empresa, rotas de transporte, redes de comunicação, distribuição de produtos, assim como a estrutura química de moléculas, podem ser expressos através de grafos. De modo geral, o estudo sobre grafos vem crescendo nas últimas décadas, devido ao avanço de novas tecnologias computacionais, que permitem a resolução de problemas via algoritmos, com maior eficiência, rapidez e confiança. Assim, a crescente aplicabilidade desta teoria é um fator positivo para o desenvolvimento social, e um dos modelos práticos que merece destaque é o problema conhecido como coloração, o qual pode ser utilizado em situações que exigem a seleção de elementos em conjuntos independentes e com características comuns.

2. HISTÓRIA

A teoria dos grafos teve seu surgimento no ano de 1736, quando Leonhard Euler se depara com o problema das pontes de Königsberg. Königsberg era uma cidade da antiga Prússia do século XVIII, atual Kaliningrado (Rússia), onde haviam duas ilhas que, juntas com a parte continental eram ligadas por sete (7) pontes.

Na cidade, discutia-se a possibilidade de atravessar todas as pontes, sem repeti-las. No entanto Euler, em 1736, mostrou a solução para esta problemática, usando para isto, um raciocínio simples: transformou os caminhos das pontes em retas e suas interseções em pontos, criando possivelmente o primeiro grafo da história. A partir de então Euler percebeu que só seria possível atravessar o caminho inteiro passando uma única vez em cada ponte se houvesse no máximo dois pontos de onde saía um número ímpar de caminhos. A razão de tal idéia estava baseada no fato de que em cada ponto deveria haver um número par de caminhos, os quais representariam a chegada e a saída. Os dois pontos com caminhos ímpares, seriam referentes ao início e ao final do percurso, pois estes não precisariam de um caminho para chegar e um caminho para sair, respectivamente.

A resolução do problema das pontes, por Euler, acabou sendo visto pela comunidade científica da época sem maior importância, simplesmente como uma charada matemática. Por isso esta descoberta ficou adormecida cerca de 150 anos até que em 1847, Gustav Robert Kirchhoff - cientista nascido na cidade de Königsberg (1824 a 1887) - ao estudar circuitos elétricos utilizou modelos de grafos, criando a chamada teoria das árvores.

Com isso, outros cientistas começaram a notar a provável aplicabilidade desta teoria e dez anos mais tarde Arthur Cayley - britânico nascido em Richmond (1821 a 1895) - utilizou a idéia de árvores para outras aplicações tais como a enumeração dos isômeros dos hidrocarbonetos alifáticos saturados, em química orgânica.

A teoria dos grafos contou ainda com o importante auxílio do irlandês William Rowan Hamilton (1805 a 1865) - que foi um matemático, físico e astrônomo - que ao inventar um jogo simples que consistia na busca de um percurso fechado envolvendo todos os vértices de um dodecaedro regular, de tal modo que cada um deles fosse visitado uma única vez, deu origem ao estudo de grafos Hamiltonianos que têm por definição, segundo Rabuske (1992, p.45) " encontrar um caminho fechado, passando uma vez em cada vértice".

A partir de 1970, a teoria dos grafos teve um grande salto com o desenvolvimento acelerado dos computadores, os quais, após a 2ª guerra mundial alcançaram seu apogeu que segundo Guimarães, com a criação do primeiro software para microcomputador criado pelos estudantes William (Bill) Gates e Paul Allen, o qual era uma adaptação do BASIC (Beginners All-Purpose Symbolic Instruction Code, ou "Código de Instruções Simbólicas para todos os Propósitos dos Principiantes") para o ALTAIR (computador pessoal projetado em 1975). Anos mais tarde, Gates e Allen fundaram a Microsoft, uma das mais bem sucedidas companhias de softwares para microcomputadores.

Foi então que surgiram publicações referentes a algoritmos de grafos, abrindo assim possibilidades para utilização aplicada da teoria dos grafos.

No Brasil a teoria dos grafos chegou, segundo Boaventura Netto (2006, p.3), no ano de 1968 com a apresentação de trabalhos sobre esta teoria no **I Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional**. Desde então, algumas universidades como UFRJ, UFF, USP, UNESP e UNICAMP, começaram a realizar trabalhos de pesquisa sobre teoria dos grafos, sendo que hoje em dia essas mesmas universidades possuem em seus quadros de docentes, pesquisadores em teoria dos grafos e aplicações.

3. CONCEITOS

Segundo Rabuske (1992, p.5) um grafo G = G (V,E) é uma estrutura entre V e E, sendo V um conjunto discreto finito e não vazio, e E uma relação binária sobre V. Os elementos de V são representados por pontos. O par ordenado (v,w) $\in$ E, (ou simplesmente vw), onde v,w $\in$ V, é representado por uma linha ligando v a w.

Os elementos do conjunto E são denominados de *arestas, linhas* ou *arcos* do grafo, e em geral, são representados pelas letras minúsculas a, b, c, d, ou e_i, e_j.

Os elementos do conjunto V são denominados de *vértices, pontos* ou *nós* do grafo, e em geral, são representados pelas letras minúsculas u, v, w, ou v_i, v_j ou por números 1, 2, 3, etc.
Em um grafo como por exemplo o da Figura 3, que foi retirado do INPE, pode-se encontrar vários conceitos de grafos.

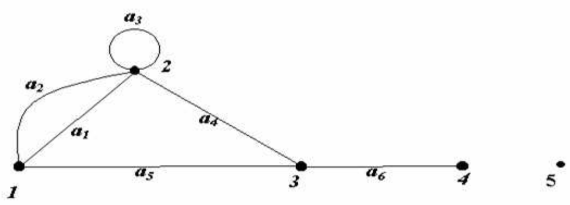

Figura 1: Grafo da combinação dos conceitos.

Por exemplo a aresta a_5 que une os vértices 1 e 3 é denominada *aresta incidente*, pois liga o vértice 1 ao vértice 3. A aresta a_3 é chamada *laço*, pois relaciona o vértice a ele próprio. Já as arestas a_1 e a_2 denominam-se *paralelas*, pois estão ligadas aos mesmos vértices 1 e 2. Tem-se um *vértice isolado* quando não existe aresta incidindo sobre ele, esse é o caso do vértice 5. As aresta a_4 e a_5 são conhecidas como *arestas adjacentes*, pois incidem sobre o mesmo vértice, no caso, o vértice 3. Também existem *vértices adjacentes*, que são vértices que estão ligados por uma mesma aresta, esse é o caso dos vértices 1 e 2 que são ligados pela aresta a_1.

Os grafos são classificados segundo os conceitos presentes neles, por exemplo um grafo que possui laços ou arestas paralelas é denominado *multigrafo*. Quando um grafo não possui laços ou arestas paralelas ele é denominado de *grafo simples*. O grafo simples em que cada par de vértices é adjacente chama-se grafo *completo*. Já um grafo que pode ser dividido em dois subconjuntos V_1 e V_2 , de forma que $V1 \cap V2 = \emptyset$ e cada vértice $v_i \in V1$ está unido a pelo menos um vértice $v_j \in V2$ é denominado *grafo bipartido*. Quando um grafo tem seus vértices ou arestas associados a um rótulo que pode ser número, nome, letra ou outro este grafo e chamado *rotulado*, em especial se as arestas ou vértices receberam como rótulo um número este grafo será chamdo *valorado*. Os grafos podem ainda ter suas orientadas ou não, quando suas arestas tiverem uma orientação o grafo é chamado de *grafo dirigido* ou *dígrafo*.

Um grafo pode ser representado de forma geométrica (por exemplo a Figura 3) ou algébrica. A forma algébrica de se representar um grafo é através de matrizes, e é desta forma que que um grafo pode ser identificado em um sistema computacional.

A *matriz de adjacência* A = $[a_{ij}]$ é uma matriz de ordem n que representa algebricamente um grafo e é definida por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se e somente se existe} \quad (v_i, v_j) \in E \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Sendo então que $a_{ij} = 1$, quando os vértices v_i e v_j são adjacentes, e $a_{ij} = 0$ em caso contrário.

A *matriz de custo* representa grafos valorados, onde o valor numérico da aresta pode representar distância, capacidade, fluxos, etc.

Todo grafo simples valorado pode ser representado por sua matriz de custo W = $[w_{ij}]_{m \times n}$, sendo seus elementos assim definidos:

$$w_{ij} = \begin{cases} \text{custo da aresta}, & \text{se} \quad (v_1, v_2) \in E \\ 0 \quad \text{ou} \quad \infty, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Desta forma, se existe aresta unindo dois vértices coloca-se como grau o valor/custo da aresta, se não houver tal aresta o valor colocado é zero ou infinito.

Já a *matriz de incidência* de um grafo não orientado G = G (V,E) com n vértices e m arestas é denotada por B = $[b_{ij}]$ e é uma matriz $n \times m$ definida como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad v_i \quad \text{for vértice inicial da aresta} \quad e_j; \\ 0, & \text{caso contrário ou se} \quad e_j \quad \text{for um laço.} \end{cases}$$

Se o grafo G for orientado, então poderá ser definida como:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad v_i \quad \text{for vértice inicial de} \quad e_j; \\ -1, & \text{se} \quad v_i \quad \text{for vértice final de} \quad e_j; \\ 0, & \text{caso contrário ou se} \quad e_j \quad \text{for um laço.} \end{cases}$$

4. PLANARIDADE E COLORAÇÃO

Toda vez que um grafo G puder ser representado geometricamente em um plano, sem que suas arestas se cruzem ele será chamado *grafo planar*. Assim, um grafo G é planar desde que possa ser desenhado um grafo G' isomorfo a G num plano, sem que haja cruzamento de arestas.

Grafos podem ter seus vértices coloridos de modo que dois vértices adjacentes não apresentem cores iguais. O problema de coloração surge quando se deseja colorir os vértices de um grafo obedecendo a condição acima e utilizando para isso o menor número de cores possível, denominado número cromático.

Após a pintura dos vértices de um grafo, eles podem ser agrupados em diferentes conjuntos, levando em consideração para a formação destes, as cores que são comuns em cada vértice, ou seja, cada conjunto é formado por vértices da mesma cor. Esses conjuntos são chamados conjuntos independentes. Define-se particionamento como o ato de separar os vértices de um grafo em conjuntos, onde os elementos de cada conjunto têm uma característica comum, seja cor, numeração ou outra.

Para conseguir determinar o número cromático de um grafo foram desenvolvidos alguns algoritmos. Segundo Rabuske (1992, p. 148 e p. 149) será indicado um algoritmo para coloração de grafos. Em consequência de tal coloração consegue-se o número cromático do grafo.

Algoritmo para colorir um grafo

Entrada: Matriz de Adjacência do grafo
Saída: $T_k = 1, 2, \ldots,$ onde em T_k estão os vértices coloridos com a cor k.
P1. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ os n vétices do grafo G(V,E); Coloque os vértices numa fila de tal modo que $gr(v_i) \geq gr(v_j)$ para todo $v_i, v_j \in V$;
P2. Faça $i \leftarrow 1$;
P3. Enquanto $V \neq \emptyset$, faça:

1. Coloque o primeiro elemento da fila em T_i, isto é, se v_j é o primeiro elemento da fila, então coloque v_j em T_i;
2. Retire v_j da fila;
3. Enquanto existir na fila algum vértice v_k não adjacente a qualquer vértice pertencente a T_i, faça:
   (a) Coloque v_k em T_i;
   (b) Retire v_k da fila;
   (c) Faça $i \leftarrow i + 1$;

P4. O número cromático é dado por $i-1$ e os vértices de mesma cor estão em T_i

O algoritmo embora consiga uma boa aproximação para o número cromático, não se pode ter certeza de que essa aproximação é a melhor possível. Por isso conclui-se que este algoritmo é um procedimeto heurístico.

Para grafos planares, o problema de coloração está intimamente ligado ao problema da *conjectura das 4-cores*. Este problema originou o teorema das 4-cores o qual relata que todo e qualquer grafo planar pode ser colorido com o número máximo de 4 cores.

O teorema das 4-cores, é muito conhecido em teoria dos grafos pelas muitas tentativas falhadas de sua demonstração tanto por matemáticos “amadores”quanto por grandes nomes da matemática como Albert Bray Kempe - matemático britânico -, Peter Guthrie Tait - fisico-matemático escocês que estudou a aplicação dos quaterniões em problemas físicos que envolviam gradiente, divergente, laplaciano e rotacional -, Birkhoff - famoso pelo teorema que leva seu nome no tópico de relatividade geral -, Hassler Whitney, Hapel, Akken e outros.

O teorema das 4-cores surgiu logo após o problema das 4-cores. O fato é o seguinte: no ano de 1852 o estudante Francis Guthrie - matemático britânico que mais tarde se tornou professor de matemática na África do Sul - estava colorindo um mapa dos condados da Inglaterra, e ao fazer tal coloração observou que eram necessárias somente 4 cores diferentes para colorir o mapa sem que países com alguma linha demarcatória comum tivessem a mesma cor, esse fato acabou por instiga-lo. Então intrigado e sem conseguir sucesso na demonstração de que com 4 cores seria possível pintar qualquer mapa, foi perguntar ao irmão mais velho, Frederick Guthrie, se isto se passava com qualquer mapa.

Frederick não conseguindo sanar a dúvida de seu irmão, foi perguntar a seu professor em Cambridge, o senhor Augustus de Morgan - conhecido pelas leis De Morgan em teoria dos conjuntos - que observando o problema chegou a conclusão de que a afirmação de que qualquer mapa poderia ser colorido com apenas 4 cores era falsa.

Apesar do professor Augustus de Morgan ter feito tal afirmação o problema da coloração dos mapas através de 4 cores não se encerrou, e no ano de 1878 Arthur Cayley - matemático britânico cujas contribuições incluem a multiplicação de matrizes e o teorema de Cayley - retomou tal problema em um trabalho literário editado pela London Mathematical Society, a qual o próprio Cayley era presidente na época. Um ano após a retomada do problema das 4-cores o matemátio Kempe fez a primeira demonstração deste teorema também conhecido como *conjectura das 4-cores*. Mas em 1890 o matemático Percy John Heawood apontou alguns erros na demonstação de Kempe.

No ano de 1880 Tait já havia feito outra demonstração para tal problema, essa demonstração seguiu aceita até 1891 quando Petersen também mostrou ser falha a mesma.

Dos anos de 1891 até 1922 o teorema das 4-cores foi ganhando contribuições de alguns matemáticos como Birkhoff, contribuições estas que ajudaram a Franklin em 1922 a mostrar que o teorema era válido para mapas com no máximo 25 regiões.

Então de 1922 à 1976 o teorema das 4-cores foi novamente ganhando contribuições de outros matemáticos tal como Heesch que introduziu importantes técnicas sobre redutibilidade e descarga em teoria de grafos. No ano de 1976 os matemáticos Hapel e Akken conseguiram reduzir os casos possíveis a pouco mais de dois mil e colocaram um computador a verificá-los um a um, com isso foi provado a demonstração do teorma das 4-cores, embora não muito aceito pela comunidade matemática por ser uma demonstração feita por um computador e não por um ser humano de maneira “clássica”.

Embora se pensasse que tal teorema estava demonstrado devido ao fato de um computador ter realizado tal demonstração, aconteceu um fato que chocou a comunidade matemática pois o senhor Ragnar demonstrou através de um contra-exemplo que a demonstração feita por Hapel e Akken estava errada. Com isso o teorema das 4-cores continua até os dias de hoje sem ter uma demonstração aceitável e correta.

5. APLICAÇÕES

Para a resolução de situações práticas através do problema de coloração em grafos, foi utilizado o algoritmo para colorir um grafo contido em Rabuske (1996, p.148), e apresentado na p. 4. Deve-se salientar que tal algoritmo não garante a solução ótima, mas oferece uma boa aproximação.

Aplicação 1: Elaboração de horários de exames escolares

Uma determinada escola pretende realizar seus exames finais de forma que não haja ”choque”de horários entre eles, devido ao fato de alguns alunos terem exames em mais de uma disciplina. A escola também deseja utilizar a menor quantia de períodos (cada período corresponde a 2 horas de prova) possível para a realização destes exames. Como a escola poderia organizar os horários dos exames para que não haja ”choque”entre as disciplinas, utilizando o menor número de períodos possível?

Solução:

Para representar esta situação, tem-se o grafo G_1 (V,E) abaixo onde os vértices são as disciplinas que compõem o quadro de exames e cada aresta entre dois vértices indica que há alunos que devem realizar os exames correspondentes àquelas disciplinas.

Para facilitar a representação geométrica, será utilizada a seguinte legenda para as disciplinas do exame:

- v_1 - Matemática
- v_2 - Português
- v_3 - Física

- v_4 - Química
- v_5 - História
- v_6 - Geografia
- v_7 - Artes
- v_8 - Educação Física

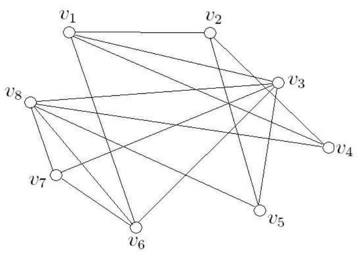

Figura 2: Grafo G_1 (V,E).

A matriz de adjacência do grafo G_1 é:
Usando o algoritmo para colorir grafos, tem-se:
P1. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_8$ os vértices do grafo G_1
Fila $V = \{v_3, v_8, v_1, v_6, v_2, v_4, v_5, v_7\}$, de acordo com o grau de cada vértice.

P2. $i = 1$

P3.
$v_3 \in T_1 \rightarrow T_1 = \{v_3, v_2\}$ e $V_1 = \{v_8, v_1, v_6, v_4, v_5, v_7\}$

T_1 (Cor Amarela) = { Física (v_3), Português (v_2)

$v_8 \in T_2 \rightarrow \{v_8, v_1\}$ e $V_2 = \{v_6, v_4, v_5, v_7\}$

T_2 (Cor Azul) = {Educação Física (v_8), Matemática (v_1)}

$v_6 \in T_3 \rightarrow T_3 = \{v_6, v_4, v_5\}$ e $V_3 = \{v_7\}$

T_3 (Cor Verde) = {Geografia (v_6), Química (v_4), História (v_5)}

$v_7 \in T_4 \rightarrow T_4 = \{v_7\}$

T_4 (Cor Vermelha) = {Artes (v_7)}

P4. O número cromático é $i = 4$ e os vértices de mesma cor estão em T_i.

Cada conjunto T_i, $i = 1, \ldots, 4$ receberá uma cor e representará um período de 2 horas para a realização dos exames.

Logo se obtém as cores dos vértices do grafo.

Assim, pode-se estabelecer a seguinte resposta à situação de elaboração de exames:
Período 1: 8h às 10h
Exames: Português e Física

Período 2: 10h às 12h
Exames: Matemática e Educação Física

Período 3: 14h às 16h
Exames: Química, História e Geografia

Período 4: 16h às 18h
Exames: Artes

Aplicação 2: Alocação de produtos

Uma indústria farmacêutica possui em seu laboratório experimental, produtos químicos utilizados na manipulação de remédios. Alguns destes produtos não podem ser armazenados juntos, por motivo de segurança. Na tabela abaixo tem-se os produtos químicos que serão armazenados no laboratório, sendo que X indica os produtos que não podem entrar em contato. Com base nesta tabela os farmacêuticos responsáveis pelo laboratório gostariam de alocar estes produtos ($A_1, \ldots, A_9$) de forma que os marcados com X não estejam na mesma seção de armazenamento, utilizando para isso um número mínimo de alocações. Como os farmacêuticos poderiam fazer isso?

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9
	X			X		X	X	
X			X	X	X			X
			X		X		X	
	X	X					X	x
X	X				X	X		X
	X	X		X			X	
X				X				X
X		X	X		X			
	X		X	X		X		

Solução:
Pode-se associar um grafo $G_2(V, E)$ à tabela acima onde os vértices do grafo são os produtos químicos e as aresta ligam os produtos que não podem ser armazenados juntos.

De acordo com o algoritmo para colorir um grafo, segue que:
P1. $A_1, A_2, \ldots, A_9$ são os vértices do grafo $G_3(V, E)$.
Fila $V = \{A_2, A_5, A_4, A_6, A_8, A_9, A_1, A_3, A_7\}$

P2. $i = 1$

P3.
$A_3 \in T_1 \rightarrow T_1 = \{A_2, A_8, A_7\}$ e $V_1 = \{A_5, A_4, A_6, A_9, A_1, A_3\}$
T_1 (Cor Amarela) = $\{A_2, A_8, A_7\}$

$A_5 \in T_2 \rightarrow T_2 = \{A_5, A_4\}$ e $V_2 = \{A_6, A_9, A_1, A_3\}$
T_2 (Cor Verde) = $\{A_5, A_4\}$

$A_6 \in T_3 \rightarrow T_3 = \{A_6, A_9, A_1\}$ e $V_3 = \{A_3\}$
T_3 (Cor Azul) = $\{A_6, A_9, A_1\}$

$A_3 \in T_4 \rightarrow T_4 = \{A_3\}$
T_4 (Cor Vermelha) = $\{A_3\}$

P4. O número cromático é $i = 4$ e os vértices de mesma cor estão em T_i

Sendo assim obtém-se um grafo colorido da situação.

Logo uma possível resposta a este problema é alocar os 9 produtos químicos em 4 seções distinstas (S_1, S_2, S_3, S_4), de acordo com o número cromático encontrado no passo P4 do algoritmo 3. Em cada seção podem ser armazenados os elementos:

- Seção S_1: A_2, A_7, A_8
- Seção S_2: A_4, A_5

- Seção S_3: A_1, A_6, A_9
- Seção S_4: A_3

6. CONCLUSÕES

Através deste trabalho, pôde-se compreender a origem e o processo de evolução dos grafos, considerado uma teoria recente se comparado com outras teorias científicas. Também possibilitou entender definições e resultados como as diversas maneiras geométricas e algébricas de representar um grafo, e de modo geral, os problemas clássicos intitulados problema de coloração e problema das 4-cores, bem como diferenciá-los.

Nossa pesquisa foi muito satisfatória, pois além de proporcionar o estudo de um ramo da matemática que dificilmente é abordado no currículo da graduação, mostrou uma visão da matemática não somente na área teórica, mas também na área prática. Podemos agora, através dos conceitos e modelos estudados, resolver muitas situações-problemas do cotidiano.

REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: teoria, modelos e algoritmos.** São Paulo: Edgard Blücher, 2003.

CONCEITOS BÁSICOS DA TEORIA DOS GRAFOS. Disponível em http://www.inf.ufsc.br/grafos/definicoes/definicao.html. Acesso em: 01 out. 2008.

GUIMARÃES, G. A.; VIERA, J. L. F.; GUIMARÃES JR., G. A. Disponível em: http://www.supridados.com.br /assinantes /geraldoguimaraes /lixoeletro.pps #318,2, Impactos ambientais e na saúde humana causados pelo lixo eletrônico. Acesso em: 28 mai. 2009.

INSTITUTO NACIONAL DE PESQUISAS ESPACIAIS (INPE). Disponível em http://www2.dem.inpe.br/ijar/Grafos.htm. Acesso em: 29 ago. 2008.

MELLO, L.F. Teoria dos grafos: problemas e aplicações. Disponível em http://www.ici.unifei.edu.br/luisfernando/arq_pdf/ palestras/teoria_dos_grafos. Acesso em: 28 ago. 2008.

RABUSKE, M.A. **Introdução à teoria dos grafos.** Florianópolis: UFSC, 1992.