Lógica Difusa (Fuzzy) e Raciocínio Aproximado: Conceitos e Aplicações

Ernesto Araujo
ernesto.araujo@{lit.inpe.br unifesp.br}
Laboratório de Integração e Testes (LIT), INPE, 12.227-010, São José dos Campos, SP
Departamento de Informática em Saúde (DIS), UNIFESP, 04.023-062, São Paulo, SP
Hospital Municipal Dr. José de Carvalho Florence (HJCF), 12.220-280, São José dos Campos, SP
Associação Paulista para o Desenvolvimento da Medicina (SPDM), 04.024-002, São Paulo, SP

Resumo – A teoria de conjuntos difusos e lógica difusa (fuzzy, nebulosa) pode ser entendida tanto como uma maneira de reproduzir o conhecimento e o senso comum funcionando como uma interface entre números e símbolos, assim como uma ferramenta para construir funções numéricas quando se está lidando com dados. Sendo um mecanismo de inferência, a lógica difusa é entendida como uma forma de representar o raciocínio aproximado humano; sendo uma forma de mapeamento, é um aproximador universal. Este artigo tutorial fornece os principais conceitos, estruturas, e abordagens de projeto para se construir um mapeamento não-linear ao lidar com informações que são imprecisas, incertas, vagas, ou representam verdades parciais (subjetividades). Estas abordagens têm a vantagem de serem representadas de maneira simples ao se empregar de regras de produção do tipo SE-ENTÃO, podendo ser aplicada nas mais diversas áreas, desde engenharia até medicina, passando por economia e física, só para citar algumas. Este artigo tem como objetivo principal contribuir para a disseminação da teoria de conjuntos difusos e lógica difusa para produzir sistemas difusos e, como tal, sistemas inteligentes em diversas áreas de aplicação.

Palavras-chave: Lógica Difusa, Sistema Difuso, Modelagem, Controle, Decisão, Raciocíno Aproximado.

Fuzzy Logic and Approximate Reasoning: Concepts and Applications

Abstract – The fuzzy set theory and fuzzy logic can be understood both as a manner to reproduce the knowledge and the common sense working as an interface between numbers and symbols as a tool to build up numerical functions when dealing with data. Being a mechanism of inference, the fuzzy logic is understood as a form to represent the human approximate reasoning; being a form to represent a mapping, it is a universal approximator. This tutorial paper supplies the main concepts, structures and design approaches to build up a nonlinear mapping when dealing with information that are imprecise, uncertain, vague, or represent partial truth (subjectivity). These approaches have the advantage of being represented in a simple manner by using production rules in the IF-THEN form and can be applied in diverse areas, from engineering to medicine, through economy and physics, only to mention some. This paper aims at contributing for disseminating the fuzzy set theory and fuzzy logic to produce fuzzy systems and so intelligent systems in diverse areas of application.

KeyWord: Fuzzy Logic, Fuzzy Systems, Modelling, Control, Decision-Making, Approximate Reasoning.

1. INTRODUÇÃO

O emprego do *raciocínio* permeia a própria existência humana. Se, por um lado, o *raciocínio imediato* emerge de maneira natural, por outro, o *raciocínio mediato* somente se tornou formal com as obras de Aristóteles com o conceito de *lógica*. A lógica é entendida como o estudo dos princípios e critérios de demonstração e inferência válida. Ela tem como objetivo investigar e classificar as estruturas de assertivas e argumentos, ambas da perspectiva e estudo de sistemas formais de inferência e pelo estudo de argumentos em linguagem natural. Aristóteles tem dentre suas principais contribuições para a consolidação da lógica a (*i*) sistematização, (*ii*) identificação dos conceitos básicos, e (*iii*) definição de termos fundamentais.

A lógica Aristotélica é vista como o mecanismo empregado para descrever o raciocínio humano clássico em que uma conclusão *precisa* e *certa* possível, Q, é deduzida de uma coleção de premissas *precisas* e *certas*, P_i, na forma:

$$\text{SE } P_1 \text{ E } P_2 \text{ E } \ldots \text{ E } P_n \text{ ENTÃO } Q \; , \qquad (1)$$

sendo $P_1, P_2, \ldots, P_n$ uma seqüência finita de proposições que, em conjunto, denotam o antecedente da regra SE-ENTÃO, enquanto, Q é denominada proposição final, sendo ainda chamadas, respectivamente, *premissas* e *conclusão* do argumento.

Um argumento como dado em (1) é válido se e somente se existe uma correspondência com a *proposição condicional*,

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q \; , \qquad (2)$$

que seja tautológica, sendo o operador de conjunção, $\wedge$, relacionado à conjunção lingüística, "E".

A lógica Aristotélica (clássica) é baseada no *princípio do terceiro excluído* em que as proposições são assumidas verdadeiras ou falsas. Querer que as proposições sejam sempre verdadeiras ou falsas é, em inúmeras situações, uma fuga da realidade, pois exige que as informações sejam perfeitas. Na realidade, entretanto, muitas das informações com as quais seres humanos, sistemas, ou máquinas lidam são imperfeitas, podendo ser caracterizadas como imprecisas, incertas, vagas ou que correspondam a verdades parciais e subjetivas (Figura 1).

Uma alternativa para lidar com informações imperfeitas é utilizar a lógica difusa[1] A lógica difusa pode ser abordada por três perspectivas diferentes. A primeira remete à *Lógica de Multivalor* e está relacionada ao campo da *Matemática* através da modelagem de valores parciais verdadeiros ou da vaguidade (idéia de vago). A segunda perspectiva refere-se ao *Raciocínio Aproximado* e está associada à *ciência da computação* através da *Inteligência Artificial* e *Inteligência Computacional* ao englobar métodos baseados em conjuntos difusos para representar o raciocínio humano. Finalmente, mas não menos importante, *Computação numérica baseada em regras difusas* está vinculada à *Engenharia de Sistemas* pela modelagem de uma função numérica (mapeamento) (Nguyen and Sugeno; 1998). A ausência de comunicação entre estas áreas enlarga o distanciamento de entendimento entre estas diferentes perspectivas e suas sobreposições.

Sendo capaz de ser aplicada nas mais diversas áreas, desde engenharia até medicina, passando por economia e física, só para citar algumas. Da perspectiva de estudos teóricos estão relacionadas com diferentes áreas de estudo, por exemplo, teoria de possibilidade,

[1] Embora o termo nebuloso seja também aceito, neste trabalho optou-se pelo uso do termo difuso não só porque na literatura sobre lógica este termo tem sido utilizado.

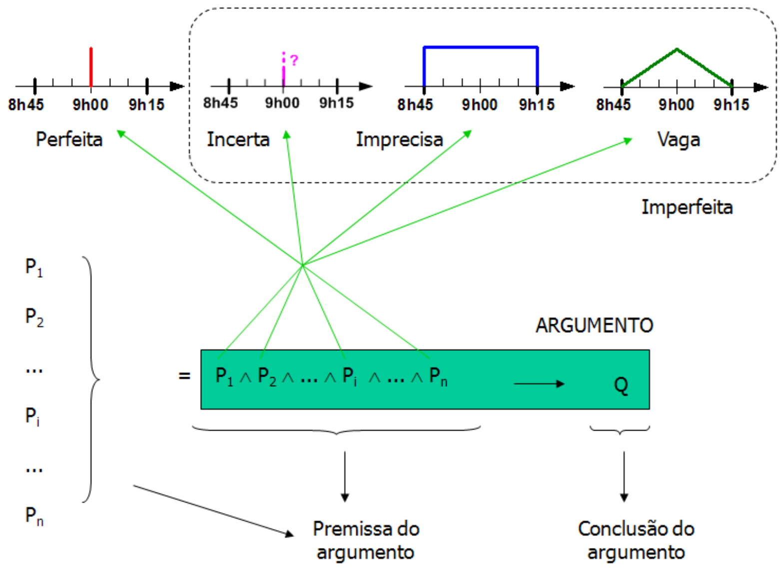


Figura 1: Raciocínio humano ao lidar com informações perfeitas ou imperfeitas (Araujo; 1994,1995,2005).

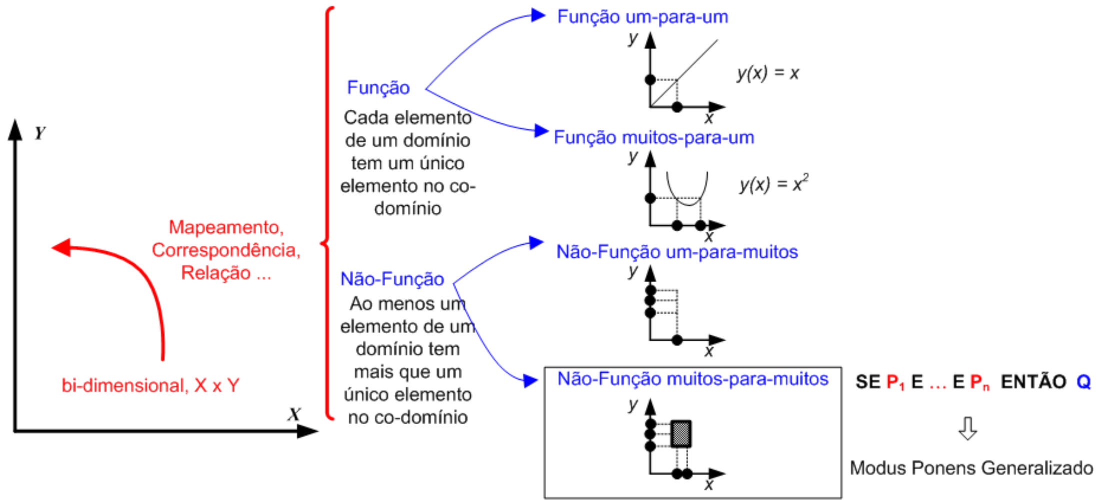


Figura 2: Mapeamento difuso (Araujo; 1994,1995,2005)

tratamento baseado em regras difusas, aritmética difusa, programação difusa etc.
Equivalente em estrutura à lógica Aristotélica (1) (2) a lógica difusa diferencia daquela pela obtenção de uma conclusão *imprecisa* e *incerta* possível, Q, deduzida de uma coleção de premissas *imprecisas* e *incertas*, P_i, representadas por conjuntos difusos. Desta maneira, a lógica difusa vem a ser um mecanismo de inferência para lidar com condições que são parcialmente conhecidas, permitindo o *Raciocínio Aproximado* (*Raciocínio Difuso*).
A lógica difusa assume um papel fundamental para a atividades de modelagem (representação da realidade), projeto de sistemas inteligentes de controle (automação), sistemas inteligentes de suporte a decisão, pois ela contribui com o mecanismo de inferência (lógica) necessário para a manipulação de incertezas e imprecisões nas informações – incertezas e imprecisões estas limitadas por conjuntos difusos (função distribuição de possibilidade) permitindo a construção de *sistemas difusos* e, como tal, sistemas e máquinas inteligentes. Sistemas difusos podem ser entendidos basicamente como um mapeamento (mapeamento difuso) em que existe uma correspondência entre um ou mais universos de discurso, $(X_1 \times \ldots \times X_n)$, de entrada e um universo de saída, Y, através de uma relação (não-função) – seja um-para-muitos, seja muitos-para-muitos (Figura 2).
Este artigo tutorial fornece os principais conceitos, estruturas, e abordagens de projeto para se construir sistemas difusos. Seu conteúdo foi apresentado na forma de palestra e está em consonância com o 13º *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional – XIII ERMAC* e, como tal, apresenta um viés matemático, no entanto, sem perda de generalidade. Desta forma, este artigo tenta fornecer uma breve visão geral de maneira a ser auto-contida como pode ser verificado no decorrer do texto.

2. CONJUNTOS DIFUSOS

Quando não se está lidando com o conhecimento *perfeito*, o conhecimento que se tem sobre uma situação qualquer pode ser geralmente classificado como conhecimento *imperfeito*:

- seja porque há uma dúvida sobre sua validade, conhecimento *incerto*,
- seja porque existe uma dificuldade de expressá-lo claramente, conhecimento *impreciso*.

Adicionalmente, a capacidade humana de descrever precisamente um sistema é função inversa de sua complexidade, p.ex., definida pelo número de elementos que o compõem, das relações entre seus elementos e da dificuldade de se definir suas características. Portanto, a necessidade de representar estes sistemas está relacionada com a capacidade de lidar com dados que sejam vagos, imprecisos, mal definidos, validade não absoluta, submetidos a incertezas. Uma alternativa para representar e manipular o conhecimento imperfeito, vago ou aproximado é o conceito de conjuntos difusos.
O conceito de *conjunto difuso* foi introduzido em um trabalho seminal pelo azerbajão Lotfi Aliasker Zadeh em 1965 (Zadeh; 1965). Vale ressaltar, no entanto, que em 1937 o também azerbajão Max Black havia apresentado o conceito de conjunto para representar a vaguidade (idéia de vago) através do termo *conjunto vago* (Black; 1937) que é relacionado com conjuntos difusos.
A noção de conjunto difuso permite o uso de categorias com limites mal-definidos, de situações intermediárias entre o todo e o nada, da passagem progressiva de uma propriedade a uma outra, e a utilização de valores aproximados. Assim, um conjunto difuso tem por propósito permitir uma pertinência gradual e não absoluta de um elemento a uma classe, ao contrário da noção de conjunto clássico baseado no princípio do terceiro excluído cujo elemento pertence, ou não, a uma classe.

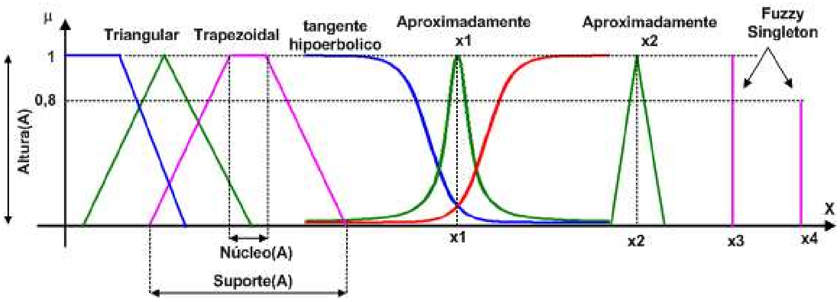


Figura 3: Exemplo de conjuntos difusos (convexos), Suporte e Núcleo (Araujo; 1994,1995,2005).

Definição: Considere pontos (objetos) genericamente denominados por $\{u\}$ distribuídos em um espaço de pontos denominados *universo de discurso*, U, que podem ser discretos ou contínuos. A coleção destes objetos, $\{u\}$, que representam elementos quaisquer, é denominada *subconjunto*, A, em U .
A todo *subconjunto*, A, de um universo de discurso, U, é doravante designado como *conjunto*, sem perda de generalidade.
Definição: Um *conjunto clássico*, A, de um universo de discurso, $X = \{x\}$, é definido por uma função característica (mapeamento), $\mu_A(x)$, que assume um valor nulo para os elementos de X que não pertencem ao conjunto A, $\mu_A(x) = 0$ se $x \notin A$, e valor unitário para aqueles que pertencem, $\mu_A(x) = 1$ se $x \in A$, ou seja, $\mu_A(x) : X \to \{0, 1\}$. Na teoria clássica dos conjuntos, um elemento pode pertencer ou não a um determinado conjunto.
Definição: Um *conjunto difuso*, A, de um universo de discurso, $X = \{x\}$, é definido por uma função de pertinência[2] $\mu_A(x) : X \to [0, 1]$ mapeando cada elemento, valor ou ponto x do domínio, X, a um número (grau) no intervalo *entre* os reais $[0, 1]$[3] (Zadeh; 1965). Como exposto em (Pedrycz and Gomide; 1998), a *função de pertinência* $\mu_A(x)$ pode ser entendida como sendo o *grau de compatibilidade*[4] entre o elemento x e o conceito expresso por A:

$$\begin{aligned} &\mu_A(x) = 1, x \text{ é completamente compatível com} A; \\ &\mu_A(x) = 0, x \text{ é completamente incompatível com} A; \\ &0 < \mu_A(x) < 1, x \text{ é parcialmente compatível com} A, \\ &\qquad \text{com grau} \mu_A(x) \ ; \end{aligned} \tag{3}$$

Definição: Um *conjunto difuso*, A, pode ser representado como um conjunto de *pares ordenados* de um elemento genérico, $\{x\}$, tal que $A = \{(x, \mu_A(x))\forall x \in X\}$, sendo $\mu_A(x))$ conhecido também como o grau de pertinência de x em A, e $\mu_A : X \to M$ é uma função de X para o espaço M chamado de *espaço de pertinência* (Bellman and Zadeh; 1970).
Um conjunto difuso A em universo de discurso finito e discreto em X pode ser expresso por:

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1))\}, \{(x_2, \mu_A(x_2))\}, \ldots, \{(x_n, \mu_A(x_n))\} \ . \tag{4}$$

embora seja usual representá-lo como:

$$A = \{(\mu_A(x_1)/x_1)\}, \{(\mu_A(x_2)/x_2)\}, \ldots, \{(\mu_A(x_n)/x_n)\} \ . \tag{5}$$

ou de maneira abrangente, como apresentado a seguir.
Um *conjunto difuso* pode ser entendido como a disposição dos valores singulares (*singletons*) que o compõem. Por sua vez, podem ser representados na forma contínua ou na forma discreta. Apesar de ter caído em desuso é possível ainda encontrar, respectivamente, a seguinte representação:

Universo de discurso discreto

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i/y \ , \tag{6}$$

Universo de discurso contínuo

$$A = \int_U \mu_A(y)/y \ . \tag{7}$$

sendo, que o sinal de integração representa a disposição dos valores singulares, $\mu_A(y)/y$, quando o universo de discurso é contínuo, e o sinal de somatório representa a disposição dos valores singulares, $\mu_i, i = 1, \ldots, n$, quando o universo de discurso é discreto, i.e., o suporte é finito, $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$.

Características de Conjuntos difusos

Um conjunto difuso pode assumir diferentes formas – a altura de conjuntos difusos e a *dispersão* (*espalhamento*) podem assumir diferentes valores – desde que seja convexo (Figura 3). Um conjunto convexo é aquele que os valores assumidos pela função de pertinência, $\mu_A(x)$, são monotonicamente crescentes desde o valor inicial do suporte até o valor inicial do núcleo e monotonicamente decrescentes desde o valor final do núcleo até o valor final do suporte.

[2] Neste trabalho adota-se a mesma notação para *função característica* e para *função de pertinência*, sem perda de generalidade.
[3] Se os valores de $\mu_A(x)$ são associados à graduação de verdade, isto equivale à lógica de multivalor sendo que a verdade assume valores contínuos no intervalo $[0, 1]$.
[4] Embora pertinência seja um termo fundamental para conjuntos clássicos, não apresenta a mesma significação em conjuntos difusos (Zadeh; 1965). Todavia, ao longo do texto, for facilidade de expressão, não será feita distinção entre estes termos.

Definição: Um conjunto difuso, A, é *convexo* se, e somente se,

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq min(\mu_A(x), \mu_A(y)), \quad \forall x, y \in X \quad \forall \lambda \in [0,1] \ . \tag{8}$$

A noção de convexidade é importante por ser um meio de preservar muita das propriedades que conjuntos difusos têm em relação a conjuntos clássicos. Por exemplo, (i) se dois conjuntos difusos, A e B, são convexos, sua interseção é um conjunto convexo, (ii) se um conjunto difuso, A, é convexo, seu núcleo é um conjunto convexo etc.
Definição: Um conjunto difuso, A, é um *número difuso* se, além de ser convexo, for também *normal*:

$$\max_{x \in X} \mu_A(x) = 1, \forall x \in X \ . \tag{9}$$

Definição: Um conjunto difuso, A, é *subnormal* se $\max_{x \in X} 0 < \mu_A(x) < 1, \forall x \in X$, i.e., se não for normal. Adicionalmente, um conjunto subnormal não-vazio pode ser normalizado ao dividir cada $\mu_A(s)$ por $\sup_x \mu_A(x)$. Um conjunto difuso é vazio quando $\mu_A(x) \equiv 0$.
As principais características de conjuntos difusos são apresentadas na tabela 1.
Considere, por exemplo, uma função de pertinência linear por partes. Quando o conjunto difuso é chamado de trapezoidal, A pode ser representado utilizando a notação $< a, b, c, d >$, tal que $Su(A) = [a, d]$ e $Nu(A) = [b, c]$. De acordo com esta representação, o suporte é dado por $Su(A) = [a, d]$ e o núcleo é $Nu(A) = [b, c]$ (Figura 3). As funções entre a e b e d e c são estritamente monotônicas crescente e decrescente, respectivamente. Quando $[b, c] = b'$, a representação anterior se torna $< a, b', d >$ e é denominado conjunto difuso triangular.

Manipulação de conjuntos difusos

A manipulação de conjuntos é feita principalmente pelos operadores de interseção ($\cap$), união ($\cup$), e complemento ($\neg$). A *interseção* corresponde na lógica ao operador de *conjunção*, $\wedge$, e ao *conectivo lógico*, "e". A *união* corresponde à operação de *disjunção*, $\vee$, e ao *conectivo lógico, "ou"*. O *complemento* equivale ao conectivo lógico de *negação* de uma dada proposição, apresentando a idéia de oposição.
Os operadores de conjunção difusos, também chamados de *normas triangulares* (t-normas), e os operadores de disjunção difusos, também chamados de *conormas triangulares* (t-conormas ou s-normas) não são únicos – i.e., constituem uma família de operadores. Um operador t-norma, $x \top y = f(x, y)$, e um operador t-conorma, $x \bot y = f(x, y)$, são mapeamentos de $[0, 1] \times [0, 1] em [0, 1]$ $(f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1])$. Para quaisquer $x, y, z, w \in [0, 1]$, ambas devem satisfazer os axiomas, propriedades dadas pela tabela 2.
Dados dois conjuntos A e B, os operadores de *mínimo* e *produto algébrico* são as alternativas mais empregadas para as operações de intersecção, ($\cup$),

Tabela 1: Termos básicos da teoria de conjuntos difusos.

Definição	*Símbolo*	*Descrição*
Suporte	$Su(A)$	conjunto dos elementos de U que pertencem ao conjunto A e cuja função de pertinência positiva, i.e., não seja nula, $Su(A) = \{x \in U \vert \mu_A(x) > 0\}$
Núcleo	$Nu(A)$	conjunto de todos os elementos com grau de pertinência unitário ao conjunto A, $Nu(A) = \{x \in U \vert \mu_A(x) = 1\}$
Altura	$Al(A)$	maior grau que um elemento de U pertence ao conjunto A correspondendo ao maior valor (supremo) da função de pertinência, $Al(A) = \sup_{x \in U} A(x)$
Ordinário	-	um conjunto A é ordinário de U, quando é normalizado, $Al(A) = 1$, e é idêntico a seu suporte e seu núcleo,
Cardinalidade	$\vert A \vert$	grau global com o qual os elementos de U pertencem ao conjunto A quando U é finito, para o universo de discurso discreto: $\vert A \vert = \sum_{x \in U} \mu_A(x)$ e Para o universo de discurso contínuo: $\vert A \vert = \int_U \mu_A(x)$,
Especificidade	-	um conjunto difuso $A \in F(U)^5$ é mais específico que $B \in F(U)$ se o núcleo de A (não vazio) é estritamente incluso no núcleo de B e $sup(B) \supseteq sup(A)$
Singleton	-	*singleton* {x} de U é o conjunto difuso mais específico, i.e., cujo suporte é um ponto singular em U tal que 0¡$\mu_x(x) \leq 1$ e $\mu_x(y) = 0$ para todo $x \neq y$,
	-	um conjunto difuso $A \in F(U)$ é mais preciso que $B \in F(U)$ de mesmo núcleo de A, se o suporte de A é estritamente incluso dentro do suporte de B.
Precisão	-	o conjunto difuso mais preciso associado a A é o conjunto ordinário $Nu(A)$ de U.

Tabela 2: Propriedade das T-normas e T-conormas.

Propriedade	*T-norma*	*T-conorma*
Comutatividade	$x \top y = y \top x$	$x \perp y = y \perp x$
Associatividade	$(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$	$(x \perp y) \perp z = x \perp (y \perp z)$
Monotonicidade	$x \top w \leq y \top z$, se $x \leq y, w \leq z$	$x \perp w \leq y \perp z$, se $x \leq y, w \leq z$
Elemento neutro	$x \top 1 = x$ $0 \top 0 = 0$	$x \perp 1 = x$ $1 \top 1 = 1$

difusa representadas, respectivamente, pelas seguintes t-normas:

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \; \forall \; x \in X \; , \tag{10}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x) \; \forall \; x \in X \; . \tag{11}$$

Dados dois conjuntos A e B, os operadores de *máximo* e *adição algébrica* são as alternativas mais empregadas para as operações de união, $(\cup)$, difusa representadas, respectivamente, pelas seguintes t-conormas:

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \; \forall \; x \in X \; , \tag{12}$$

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \; \forall \; x \in X \; . \tag{13}$$

Definição: A operação complemento também pode ser definida sobre os conjuntos difusos. A função $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$ é chamada negação se é uma função bijetora decrescente, contínua e tal que $N(0) = 1$ e $N(1) = 0$. O complemento é dito involutivo se $N(N(x)) = x$ para todo $x \in [0,1]$.
O operador de complemento típico é dado por $n(x) = 1 - x$, i.e.:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \; \forall \; x \in X. \tag{14}$$

As T-normas e T-conormas mais utilizadas são dadas na tabela 3. Vale ressaltar que as t-normas, t, e t-conormas, s, são duais, satisfazendo a seguinte condição:

$$1 - t(x,y) = s(1-x, 1-y) \; . \tag{15}$$

Operadores de Implicação

As T-normas e T-conormas são utilizadas ainda na construção de operadores de implicação, $I : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, utilizados para modelar regras de inferência do tipo SE <premissa> Então <conclusão>.
Exemplos de operadores de implicação são mostrados na Tabela 4. Vale ressaltar que, embora existam aplicações em lógica difusa que utilizam uma T-norma para modelar a inferência da regra SE-ENTÃO (p.ex., controladores Mamdani), estas não são implicações propriamente ditas. Elas não correspondem à implicação da lógica booleana quando reduzidas, no caso da teoria dos conjuntos clássicos.

Variáveis lingüísticas, Termos lingüísticos

O uso de conjuntos difusos fornece uma maneira de manipular informações vagas e imprecisas e, como tal, pode estar associado a variáveis lingüísticas. Assim, uma variável lingüística é uma variável difusa ao se considerar a faixa dos possíveis valores que pode assumir associada a um universo de discurso.
Uma variável lingüística pode ser entendida como uma variável que assume um valor que é um número difuso, tanto quanto uma variável que pode ser atribuída um *termo lingüístico*. Assim, cada conjunto difuso distribuído sobre a variável lingüística representa um valor lingüístico ou termo lingüístico (Figura 4).
Definição: Uma *variável lingüística* é aquela cujos valores possíveis são conjuntos difusos. Formalmente, ela pode ser definida como uma quíntupla $(x, T(x), U, G, M)$, sendo x o nome de uma variável, U é o universo de discurso de x, $T(X)$ é um conjunto de conjuntos difusos em x chamados de termos lingüísticos, G é a regra semântica sintática para geração dos nomes dos valores de x, e M é a regra semântica para se associar com cada valor seu significado.

Tabela 3: Principais T-normas e T-conormas.

Nome	*T-norma*	*T-conorma*
Zadeh	$\min(a,b)$	$\max(a,b)$
probabilística	$a.b$	$a + b - a.b$
Lukasiewicz	$\max(a+b-1, 0)$	$min(a+b, 1)$
Weber	$\begin{cases} 0, & \text{se } b = 1 \\ b, & \text{se } a = 1 \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \text{se } b = 0 \\ b, & \text{se } a = 0 \\ 1, & \text{senão} \end{cases}$

Tabela 4: Principais operadores de implicação.

Operador	*nome*
max(1-a,b)	Kleene-Dienes
min(1-a+b,1)	Lukasiewicz
$\begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$	Rescher-Gaines
$\begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b \\ b, & \text{senão} \end{cases}$	Gödel
$\begin{cases} 1, & \text{se } a \leq b \\ b/a, & \text{senão} \end{cases}$	Goguen
1-a+ab	Reichenbach
max(1-a,min(a,b))	Zadeh-Wilmott

A fim de ilustrar este conceito, considere, por exemplo, a variável lingüística cujo nome é *temperatura* (Figura 4). Seu conjunto de termos, $T(temperatura)$, pode assumir os termos lingüísticos {*baixa, média, alta*} que são caracterizados por conjuntos difusos no universo de discurso, U. O grau com que um valor x em U satisfaz o termo lingüístico A é a pertinência de x em A dada por $\mu_A(x)$.

Modificadores Lingüísticos

Inerentemente associado às variáveis lingüísticas estão operações que modificam a forma das funções de pertinência introduzindo um novo significado ao conjunto original ao se criar um conjunto difuso composto (Yen and Langari; 1998; Negnevitsky; 2002). Elas podem alterar estas funções de duas maneiras diferentes: (i) modificando a forma do suporte e (ii) movendo o núcleo. Enquanto na primeira condição a transformação pode se dar tanto pelo espalhamento dos limites inferiores e/ou superiores do suporte quanto pelo deslocamento do próprio suporte; na segundo opção move-se o núcleo da função de pertinência (Zadeh; 1984).

Os operadores que modificam a forma dos conjuntos difusos são denominados de modificadores lingüísticos,

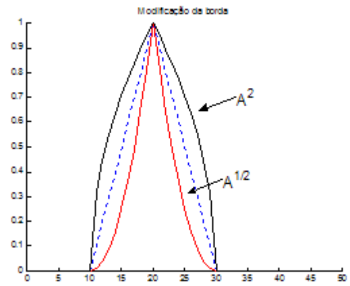


Figura 5: Exemplo de modificador lingüístico (Araujo; 1994,1995,2005).

qualificadores difusos de bordas. Os tipos de modificadores lingüísticos (Negnevitsky; 2002) podem ser utilizados como:

- modificadores de proposta geral: muito, extremamente etc.,
- valores verdade: um pouco verdadeiro, normalmente falso etc.,
- probabilidades: provavelmente, não muito provável etc.,
- quantificadores: a maioria, vários, poucos etc.,
- possibilidades: quase impossível, um pouco possível etc.

Exemplos utilizados na prática são dados a seguir:

- muito: representando uma operação de concentração do conjunto difuso;

$$\mu_A^{muito}(x) = [\mu_A(x)]^2 \ , \tag{16}$$

- extremamente: representando uma operação de muita concentração do conjunto difuso;

$$\mu_A^{extremamente}(x) = [\mu_A(x)]^3 \ , \tag{17}$$

- mais ou menos ou alguma coisa: representando uma operação de dilatação do conjunto difuso;

$$\mu_A^{mais\ ou\ menos}(x) = \sqrt{\mu_A(x)} \ , \tag{18}$$

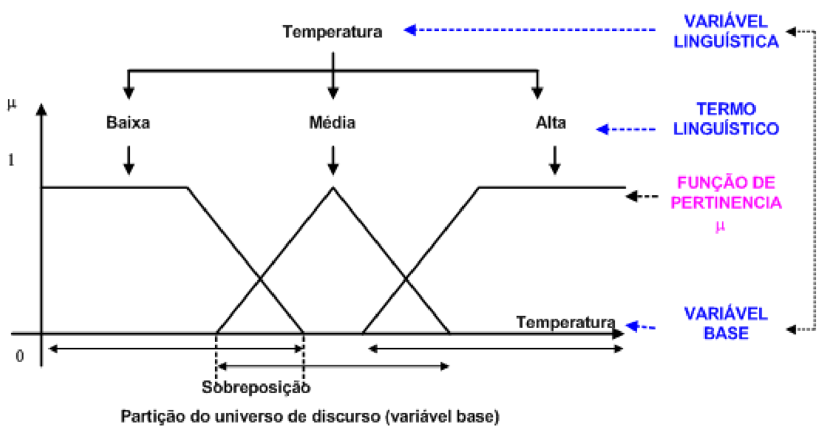


Figura 4: Funções de pertinência, termos lingüísticos e variáveis lingüísticas (Araujo; 1994,1995,2005).

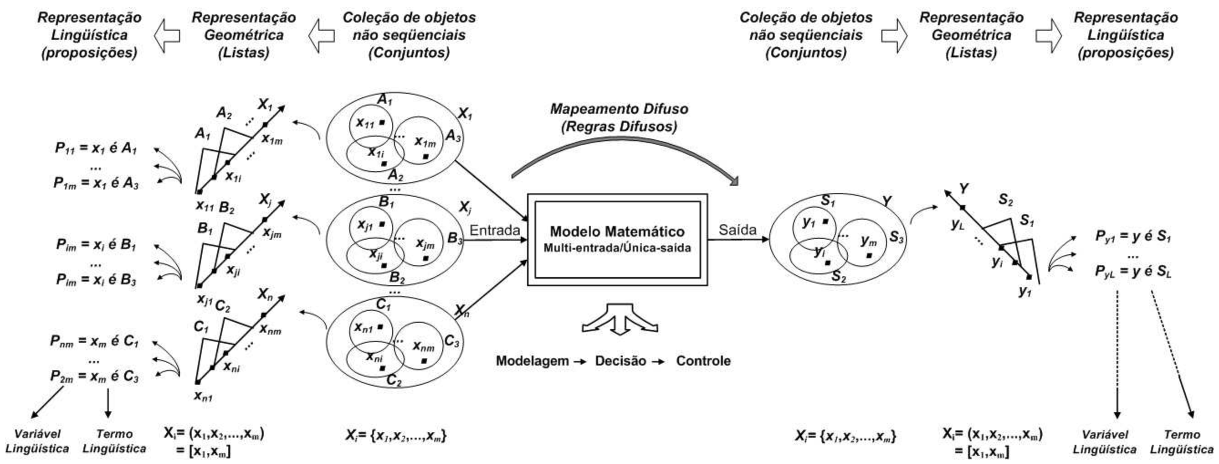


Figura 6: Descrição lingüística e direcionada por dados do mundo real: Sistema Difuso (Araujo; 1994,1995,2005).

3. LÓGICA DIFUSA E RACIOCÍNIO APROXIMADO

A habilidade de processar tanto informações *qualitativas* quanto *quantitativas*, e tratar informações que são ao mesmo tempo imprecisas e incertas, i.e., vaga, faz da *lógica difusa* uma abordagem natural para representar o raciocínio humano aproximado pelo uso de conjuntos difusos na entrada e saída do mecanismo de inferência (Figura 6).
Uma das principais características da lógica difusa é dada pela premissa (antecedente da regra) e a conclusão (conseqüente da regra) serem expressos na forma canônica, que é, respectivamente, $p : X$ é A, sendo p a proposição, X o atributo do objeto, e A o valor do objeto (Zadeh; 1988). A proposição condicional difusa na forma SE <antecedente> ENTÃO <conseqüente> assume que tanto os antecedentes quanto os conseqüentes sejam proposições difusas e, como tal, os termos A e B são conjuntos difusos. A assertiva condicional relacionada aos conceitos fundamentais previamente apresentados é representada na forma de *regras difusas* como dado em (19) sendo $A_1 \ldots A_n$ e $B_1 \ldots B_n$ conjuntos difusos distribuídos em universos de discurso $X_1 \ldots X_n$ e $Y_1 \ldots Y_n$, respectivamente. A proposição P_x dada por x_1 é A_1 E…E x_n é A_n e a proposição P_y dada por y_1 é B_1 E…E y_n é B_n são relações difusas em $X_1 \ldots X_n$ e $Y_1 \ldots Y_n$, respectivamente. A combinação das proposições do antecedente e do conseqüente da regra SE-ENTÃO difusa é realização pelas operações de implicação e de operações de conjunção (T-norma) e disjunção (T-conorma) como será apresentado na seqüência.
Devido a estas características, a lógica difusa permite que programas aumentem sua capacidade de compreender a linguagem natural e fazer deduções lógicas aproximadas. Estes atributos fazem da lógica difusa e o raciocínio aproximado difuso uma alternativa para a representação do conhecimento humano assim como para emular seu processo de decisão.

Proposição Condicional Difusa e Regra Composicional de Inferência

Existem dois diferentes tipos de regras difusas: *regra de mapeamento difuso* e *regra de implicação difusa* (Yen and Langari; 1998). Embora possam parecer equivalentes, elas apresentam diferenças significativas que influenciam o resultado do conseqüente da regra devido à semântica diferenciada entre estas abordagens. Neste trabalho será enfocado a regra de mapeamento difuso.
Regras de mapeamento difuso (i) descrevem um mapeamento funcional entre saída e entrada através de termos lingüísticos, (ii) o elemento fundamental que o compõe é o grafo difuso, (iii) a inferência difusa envolve um conjunto de regras difusas (modelo difuso) cujo antecedente da regra forma uma partição difusa do espaço de entrada, (iv) o conjunto de regras é projetado e ativado também em grupo e não individualmente.
A proposição condicional difusa assume um papel importante também na construção dos *algoritmos difusos* (Zadeh; 1968). Este tipo de regra de inferência pode ser considerada como uma extensão da regra de

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & \text{variável} & & \text{termo} & & \text{variável} & & \text{termo} \\
\text{SE} & : & \text{lingüística} & \text{é} & \text{lingüístico} & \text{ENTÃO} & \text{lingüística} & \text{é} & \text{lingüístico} \\
 & & \text{de entrada} & & \text{de entrada} & & \text{de saída} & & \text{de saída} \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\
\text{SE} & : & x & \text{é} & A & \text{ENTÃO} & y & \text{é} & B
\end{array}
\qquad (19)
$$

modus ponens	*modus tollens*	
premissa 1: x é A	premissa 1: y é B	(20)
premissa 2: SE x é A ENTÃO y é B	premissa 2: SE x é A ENTÃO y é B	
conseqüente: y é B	conseqüente: x é A	
modus ponens generalizado (GMP)	*modus tollens generalizado (GMT)*	
premissa 1: x é A'	premissa 1: y é B'	(21)
premissa 2: SE x é A ENTÃO y é B	premissa 2: SE x é A ENTÃO y é B	
conseqüente: y é B'	conseqüente: x é A'	

inferência conhecida como *modus ponens*[6] (20).
A lógica difusa tem seu núcleo, como outros sistemas lógicos, em um sistema de regras de inferência. O mecanismo de inferência difuso utiliza os princípios da lógica para determinar como os fatos e as regras devem ser combinados para derivar novos fatos. A inferência em avanço baseada em dados normalmente empregada aos sistemas difusos é à regra de implicação difusa denominada *modus ponens generalizado* (GMP) (21). Uma outra regra de implicação difusa está associada à inferência de retropropagação baseada em objetivo emprega a regra de implicação difusa denominada *modus tollens generalizado* (GMT) (21). Vale ressaltar que, diferente dos sistemas especialistas típicos (lógica Aristotélica), no mecanismo de inferência empregado em sistemas difusos o conseqüente da regra não é utilizado no antecedente de uma outra regra. Desta forma, ao invés de se utilizar o mecanismo de inferência em cadeia, emprega-se uma inferência em avanço um passo-a-frente baseada em dado.
A inferência através do *modus ponens generalizado* pode ser expressa na forma lógica (22) ou na forma computacional (23). Os termos A e C são conjuntos difusos com suas respectivas funções de pertinência, μ_A e μ_C, $\neg A$ é a negação de A, a operação $\oplus$ é composta por outras operações, por exemplo, $\wedge$ é min ou uma t-norma:

Representação simbólica

$$\begin{array}{l} X \text{ é } A' \\ Y \text{ é } C \text{ se } x \text{ é} A \\ \hline Y \text{ é } A' \circ (\neg A \oplus C) \end{array} \tag{22}$$

Representação computacional

$$\mu_{\neg A \oplus C}(u,v) = 1 \wedge (1 - \mu_A(u) + \mu_C(v)) \tag{23}$$

Uma característica da inferência pelo método *modus ponens generalizado* é que o antecedente da regra, x é A, não precisar ser idêntica à proposição que corresponde a informação de entrada também conhecida como *restrição elástica* (Zadeh; 1988).

[6] Afirmação do antecedente

Adicionalmente, vale ressaltar que o modus ponens generalizado pode ser associado a uma operação conhecida também como *regra composicional de inferência*. O termo A é um conjunto difuso com sua respectiva função de pertinência, μ_A, R é a relação entre X e Y, $\wedge$ é min ou uma t-norma, e $A' \circ R$ é composição da relação unária, A', com a relação binária, R:

Representação simbólica

$$\begin{array}{l} X \text{ é } A' \\ (X,Y) \text{ é } R \\ \hline Y \text{ é } A' \circ R \end{array} \tag{24}$$

Representação computacional

$$\mu_{A' \circ R}(v) = \sup_u(\mu_A(u) \wedge \mu_R(u,v)) \tag{25}$$

Assim, a inferência de implicação difusa é baseada na regra composicional de inferência como sugerido por Zadeh, resulta da aplicação do *princípio da extensão cilíndrica*, *princípio da conjunção* e o *princípio da projeção* (de Silva; 1995; Zadeh; 1988).

Definição: O *princípio da conjunção* é dado por:

Representação simbólica

$$\begin{array}{l} X \text{ é } A' \\ X \text{ é } B \\ \hline X \text{ é } A' \cap B \end{array} \tag{26}$$

Representação computacional

$$\mu_{A' \cap B}(u) = \mu_A(u) \wedge \mu_B(u)), u \in U \tag{27}$$

sendo que $A' \cap B$ é a operação de interseção (operação de conjunção, operação T-norma – por exemplo, mas não limitada a, operação de mínimo) entre A' e B.

Definição: O *princípio da projeção* é dado por:

Representação simbólica

$$\begin{array}{l} (X,Y) \text{ é } R \\ \hline X \text{ é}_X R \end{array} \tag{28}$$

Representação computacional

$$\mu_{X\,R}(u) = \sup_v \mu_R(u,v), u \in U, v \in V \ , \qquad (29)$$

sendo que $_AR$ é a projeção de relação binária no domínio de X de tal forma que $\mu_R(u,v)$ é uma função de pertinência.

Definição: O *princípio da extensão cilíndrica* fornece um mecanismo para calcular a restrição induzida. Se uma variável X assumindo valores em um universo de discurso, U, é restrita pela proposição, X é A, e considerando que existe um mapeamento, $f : U \to V$de modo que X seja mapeado em $f(X)$, então a restrição em $f(X)$ induzida pela restrição X é fornecida pelo princípio da extensão cilíndrica expressa como a regra de inferência:

Representação simbólica

$$\frac{(X) \text{ é } A'}{f(X) \text{ é} f(A')} \qquad (30)$$

Representação computacional

$$\mu_{f(A)}(v) = \sup_u \mu_A(u) \qquad (31)$$

sendo que a função de pertinência de $f(A)$ sujeita à condição $v = f(u), u \in U, v \in V$. Em particular, se a função, f é 1:1, então se tem a simplificação na forma $\mu_{f(A)}(v) = \mu_A(v^{-1}), v \in V$, e v^{-1} é a inversa de v.

Produto Cartesiano

Na maioria dos sistemas difusos, o conectivo "E" obtido através de uma conjunção difusa no espaço do produto cartesiano nas quais as variáveis assumem valores em diferentes universos de discurso.
Definição: Um *produto cartesiano* de conjuntos difusos $A_1, \ldots, A_n$ distribuídos nos respectivos universos de discurso $X_1, \ldots, X_n$ é também um conjunto difuso no espaço de produto $X_1 \times \cdots \times X_n$ com a função de pertinência dada por:

$$\mu_{A_1\times\cdots\times A_n}(u_1,\ldots,u_n) = min[\mu_A(u_1),\ldots,\mu_A(u_n)] \qquad (32)$$

ou

$$\mu_{A_1\times\cdots\times A_n}(u_1,\ldots,u_n) = \mu_A(u_1)\cdots\mu_A(u_{n-1})\cdot\mu_A(u_n) \qquad (33)$$

No caso específico de se ter um produto cartesiano de dois conjuntos difusos, $A \times B$, onde se tem um conjunto difuso, A, distribuído no universo de discurso, U, e um conjunto difuso, B, distribuído em um universo de discurso, V, tem-se:

$$A \times B = \mu_A(u) \wedge \mu_B(v) \ . \qquad (34)$$

sendo que $U \times V$ denota o produto cartesiano. Isto significa que $A \times B$ é um conjunto difuso de pares ordenados $(u,v), u \in U, v \in V$, com grau de pertinência de (u,v) em $A \times B$ dado por $\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)$ sendo $\wedge$ uma T-conorma previamente escolhida. Neste sentido, $A \times B$ é também uma relação difusa entre U e V.

Relações Difusas Simples e Compostas

Relações Difusas Simples são apresentadas primeiro. O conceito de relação é uma generalização de função e tem uma extensão natural para conjuntos difusos e lógica difusa (Zadeh; 1965). Desta forma, a lógica difusa tem uma perspectiva relacional, R, principalmente quando se utiliza a representação e manipulação de funções e relações definidas em ambientes com imprecisão e incerteza. Esta característica assume um papel importante em projeto de sistemas inteligentes.
Esta forma de proposição condicional difusa descreve uma *relação difusa* entre duas variáveis difusas (Zadeh; 1973).
Definição: Uma *relação difusa*, R, de um conjunto X a um conjunto Y é um conjunto difuso no produto cartesiano $X \times Y$. ($X \times Y$ é a coleção de pares ordenados $(x,y), x \in X, y \in Y$). A relação difusa, R, é caracterizada por uma função de pertinência bivariável, $\mu_A(x,y)$, i.e., um conjunto difuso.
Uma relação difusa n-ária é um conjunto difuso n-dimensional onde a cada n-upla $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ definido em um universo de discurso multidimensional tem-se:

$$R_{X_1\times\cdots\times X_n} = \{((x_1,\ldots,x_n), \mu_R(x_1,\ldots,x_n))|(x_1,\ldots,x_n)\} \ , \quad x_i \in X_i, i = 1,\cdots,n \ . \qquad (35)$$

Em seguida são apresentadas as relações difusas compostas. A composição de duas relações difusas R_1 e R_2 definidas em $X \times Y$ e em $Y \times Z$, respectivamente, denotada por $R_1 \circ R_2$, é também uma relação difusa que associa diretamente X a Z e pode ser definida como:

$$R_1 \circ R_2(x,z) = \{[(x,z), sup_{(y\in Y)}(\mu_{R_1}(x,y) \star \mu_{R_2}(y,z))], \quad x \in X, y \in Y, z \in Z\} \ . \qquad (36)$$

sendo que $\star$ pode assumir qualquer operador na classe das t-normas, por exemplo, – mas não limitado a – operações de mínimo, produto algébrico, produto limitado, ou produto drástico. A composição mais usual é a *sup-min*.
A composição de relações difusas, $R = R_1 \circ R_2(x,z)$, pode ser, assim, entendida como a projeção de $X \times Z$ da interseção $R_1 \cap R_2$ entre da extensão cilíndrica de R_1 e R_2.

Grafo e Mapeamento Difusos através de Regras

A composição de relações difusas é importante na construção do mapeamento difuso por regras e diretamente relacionado a grafos difusos.
Grafos difusos – como discutido por Zadeh, e não por Ronsenfeld (visão difusa pela generalização da teoria de grafo) – é fundamental para o projeto de sistemas

difuso (Yen and Langari; 1998).
Definição: Um grafo difuso, f^*, descreve um mapeamento funcional, $f : U \to V,\ X \in U,\ Y \in V$ entre as variáveis lingüísticas, X, do universo de discurso de entrada, U, para variáveis lingüísticas, Y, do universo de discurso de saída, V.
Este mapeamento funcional pode ser entendido também como a união dos produtos cartesianos obtidos pela associação de termos lingüísticos difusos através de regras difusas:

$$\begin{array}{lllll} f & : \text{SE} & x \text{ é pequeno} & \text{ENTÃO} & y \text{ é pequeno} \\ & : \text{SE} & x \text{ é médio} & \text{ENTÃO} & y \text{ é grande} \\ & : \text{SE} & x \text{ é grande} & \text{ENTÃO} & y \text{ é pequeno} \end{array} \tag{37}$$

tem-se como valor aproximado de saída:

$$\begin{aligned} f^* = {} & \text{pequeno} \times \text{pequeno} + \ldots \\ & \text{médio} \times \text{grande} + \ldots \\ & \text{grande} \times \text{pequeno} \end{aligned} \tag{38}$$

sendo que as operações $+$ e $\times$ denotam, respectivamente, as operações de disjunção e produto cartesiano. O produto cartesiano na forma $A \times B$ sendo A e B conjuntos difusos são denominados de grânulos cartesianos (Zadeh; 1996, 1997, 2002, 2005), ou simplesmente grânulos.
O grafo resultante é inerentemente uma relação difusa. Quando entendido como a combinação de relações difusas ou, particularmente, união de produtos cartesianos envolvendo pares de entrada, x é A, e saída, x é B, na forma $A \times B$ sendo A e B conjuntos difusos o grafo difuso, f^*, de X a Y pode ser dado por:

$$f^* = \bigcup_i A_i \times B_i \tag{39}$$

Partição Difusa

Um conjunto difuso particiona o universo de discurso. Os tipos de partição nos sistemas difuso, seja no problema de modelagem ou no problema de controle, ou ainda no problema de suporte a decisão, estão representados na Figura 7. A partição difusa pode ser do tipo *grade* (Figura 7(a)), do tipo *dispersão*

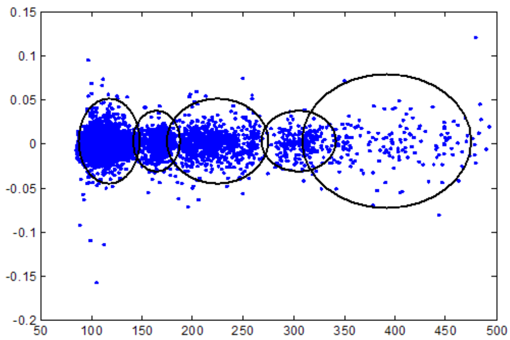
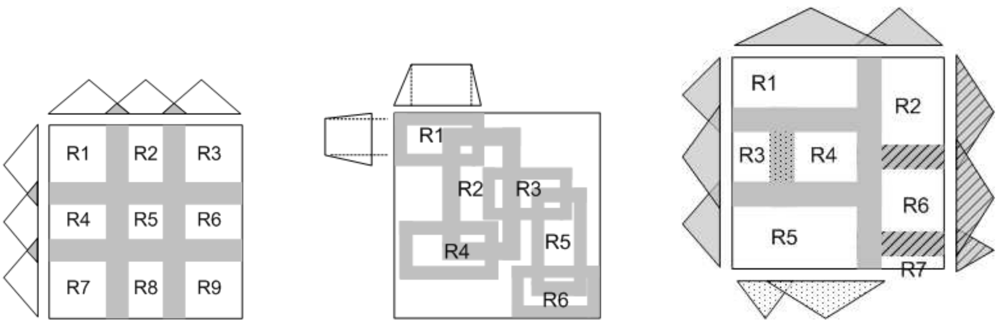


Figura 8: Partição para sistemas difusos baseado em dados (Araujo; 1994,1995,2005).

(associada a aglutinação/agrupamento/*clustering*) (Figura 7(b)), do tipo *árvore* (Figura 7(c)). Um caso particular de partição difusa é a *partição de Ruspini* (Ruspini; 1969) e basicamente pode ser entendida quando o núcleo do termo T acaba onde começa o suporte do termo consecutivo T'.
Definição: Dado que um conjunto de termos $\{T_1, ..., T_n\}$ está em ordem consecutiva quando, para todo i, se $Su(T_i) \cap Su(T_{i-1}) \neq \emptyset$ e $Su(T_i) \cap Su(T_{i+1}) \neq \emptyset$ então $Su(T_i) \cap Su(T_j) = \emptyset, \forall j \notin \{i-1, i+1\}$. Em uma *partição de Ruspini*, todos os pares de termos consecutivos T e T' são tais que $T(\omega) + T'(\omega) = 1$ para todo $\omega \in Su(T) \cap Su(T')$.

4. SISTEMAS DIFUSOS

A estrutura básica de um sistema difuso consiste, basicamente, da (i) interface de fuzificação, (ii) base de conhecimento, (iii) mecanismo de inferência composto de funções de implicação difusa, e (iv) interface de defuzificação. Um resumo dos principais conceitos apresentados é mostrado na Figura 9 na forma de diagrama em bloco que compõem o mecanismo de inferência difusa e raciocínio aproximado representando um mapeamento não-linear entre entrada e saída. O mapeamento não-linear depende da base de regra



(a) Partição tipo grade.
(b) Partição tipo dispersão.
(c) Partição tipo arvore.

Figura 7: Partições Difusas.

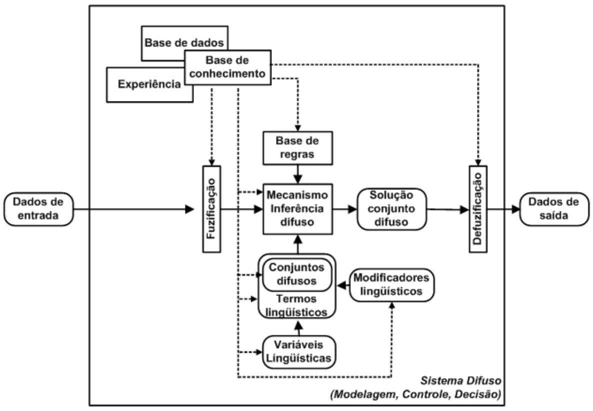


Figura 9: Sistema difuso que imita o mapeamento humano mental (Araujo; 1994,1995,2005).

(base de conhecimento), da estratégia empregada na inferência, estratégia de codificação (fuzificação), e estratégia de decodificação (defuzificação). E que qualquer modificação no sistema difuso pode fornecer uma variedade infinita de mapeamentos entre a entrada e a saída (Jenkins and Passino; 1999).

O primeiro módulo de codificação (fuzificação) refere-se ao processo de conversão de informações precisas em termos lingüísticos representados por conjuntos difusos. O segundo módulo representa o mecanismo de inferência. Ele é agregado à base de regras que é composta por um conjunto de regras do tipo SE-ENTÃO que expressam a relação difusa entre as premissas e as conclusões. Neste módulo, sistemas difusos apresentam uma interpolação entre as saídas discretas que através da sobreposição de regiões determinadas pelas funções de pertinência representando um domínio contínuo do mapeamento. Estas características contribuem para uma operação do sistema previsível e bem comportada e tornam a abordagem de sistemas difusos robustos. Devido à sobreposição das funções de pertinência da parte antecedente, cada regra é influenciada pelas regras vizinhas e, conseqüentemente, cada ponto no espaço de estados é aproximado por um subconjunto de regras difusas.

Adicionalmente, qualquer função contínua pode ser aproximada considerando-se uma precisão arbitrária e se for utilizada uma ativação de regra baseada em produto, uma decodificação (defuzificação) do tipo centróide e uma função de pertinência contínua (e.g., gaussiana). Esta propriedade determina que o sistema difuso seja um aproximador universal.

Possíveis representações para os sistemas difusos tanto aplicados em modelos quanto em controladores difusos são apresentadas na Figura 10. As principais categorias de sistemas difusos encontradas na literatura são: (1) sistema difuso relacional, (2) sistema difuso lingüístico (p.ex., sistema difuso Mamdani, sistema difuso Larsen) que emprega números difusos para o processo de decisão e (3) controlador difuso interpolativo ou baseado em modelo (p.ex., sistema difuso Takagi-Sugeno, sistema difuso Tsukamoto) que gera ações de controle ao empregar funções lineares compostas por variáveis de entrada do sistema manipulado.

Modelo Difuso Relacional

Um sistema difuso relacional realiza um mapeamento estático não-linear de conjuntos difusos, de n universos de discurso de entrada, $X_i \; | i = 1, 2, \ldots, n$, para um universo de discurso de saída, Y, através da relação difusa, R, e da regra composicional de inferência. A regra de inferência difusa – *regra composicional de inferência* – é obtida pela aplicação da *extensão cilíndrica, princípio (operação) de conjunção* e *princípio (operação) de projeção.* No caso geral, os conjuntos difusos referentes ao domínio de saída, Y, são calculados pela composição relacional:

$$\begin{aligned} Y &= X \circ R \\ &= \text{proj[conj(cil(M), R)]} \; . \end{aligned} \tag{40}$$

de forma que *proj*, *conj* e *cil* significam, respectivamente, *projeção*, *conjunção* e *extensão cilíndrica* aplicada a todos os conjuntos difusos referentes ao domínio de entrada, X_i.

Empregando-se a regra composicional de inferência, faz-se uma composição entre a medida do estado atual do sistema, X_i, e a relação difusa, R, que mapeia as entradas e saídas do sistema. O resultado é o sinal de saída, Y, necessário para obter a ação adequada para atingir um determinado objetivo. A medida, X_i, do estado atual do sistema é aplicada sobre a base de conhecimento através da extensão cilíndrica. A operação de conjunção determina a interseção entre o resultado da extensão cilíndrica e a base de conhecimento. Em seguida o princípio da projeção é aplicado de forma a obter a projeção resultante e, depois da etapa de defuzificação, o valor final de saída.

A operação, $\circ$, é associada à composição $\sup - t$ para se obter U, embora a composição $\sup - \min$ seja aceita como o mecanismo de mapeamento entre o espaço de estados e o espaço de controle (Pedrycz and Gomide; 1998; de Silva; 1995). A regra composicional de inferência em (40) pode gerar a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} U(u) &= \sup_x [A(x) \wedge R(x,u)] \\ &= \sup_x \left[A(x) \wedge \vee_{i=1}^{N} R_i(x,u) \right] \; , \end{aligned} \tag{41}$$

sendo a operação de conjunção associada a alguma T-norma previamente escolhida.

Modelo Difuso Mamdani

Um caso particular do sistema relacional difuso é o sistema difuso baseado na estrutura Mamdani, que emprega a T-norma min, para construir uma relação difusa para cada regra, e a T-conorma max, para agregar as relações previamente encontradas. A estrutura do sistema difuso Mamdani é fornecida a

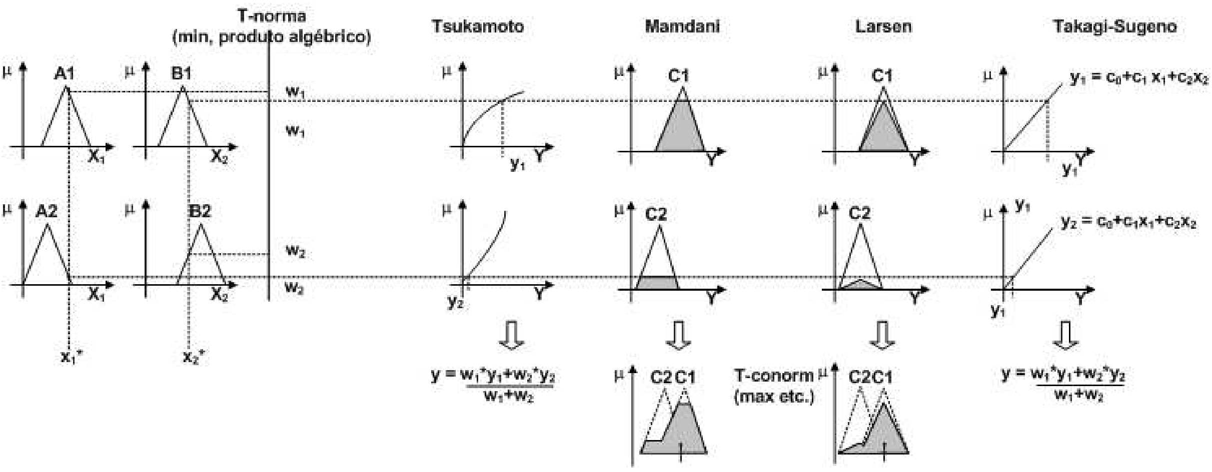


Figura 10: Arquiteturas para sistemas difusos.

seguir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rs}_i : &\ \mathrm{SE}\ x_1(t) \text{ é } M_{i1}(x(t)) \ \ \mathrm{E}\ldots\mathrm{E}\ \ x_n(t) \text{ é } M_{in}(x(t)) \\ &\ \mathrm{ENTÃO}\ \ y_i(t) = C_i(x(t))\ . \end{aligned} \tag{42}$$

A i-ésima regra (implicação) é representada por Rs_i, tal que $i = 1, 2, \ldots, N_r$, sendo N_r o número máximo de regras (implicações) difusas; $y_i(t)$, a saída da i-ésima regra (implicação); $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, variáveis de estado; $M_{ip}, p = 1, 2, \cdots, n$, a p-ésima função de pertinência da i-ésima regra que particiona o universo de discurso de entrada; e $C_i(x(t))$, função de pertinência da i-ésima regra que particiona o universo de discurso de saída. O grau de ativação da i-ésima regra é $w_i(x(t)) \geq 0$, sendo definido pelo operador de conjunção. O sistema difuso Mamdani emprega a operação de mínimo, $w_i(x(t)) = \min_{p=1}^{n}[M_{ip}(x(t))]$.

Modelo Difuso Larsen

O sistema difuso Larsen é similar ao sistema difuso Mamdani em (42) exceto que o grau de ativação, $w_i(x(t)) \geq 0$, da i-ésima regra, R_i, é calculada o produto algébrico (Larsen), $w_i(\delta(t)) = \prod_{p=1}^{n}[M_{ip}(x(t))]$.

Sistema Difuso Tsukamoto

O sistema difuso Tsukamoto é similar ao sistema difuso Mamdani em (42) mas com funções de pertinência, M_{ij} e C_i sendo monotonicamente crescentes. Esta abordagem é flexível em aceitar somente funções no conseqüente da regra, C_i, que sejam monotonicamente crescentes enquanto na premissa as funções de pertinência da premissa, M_{ij}, podem assumir conjuntos difusos quaisquer. O resultado final é obtido pelo cálculo parcial $\alpha_i = C_i(y_i)$ da i-ésima regra, R_i:

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \alpha_i(x(t), r_i) y_i(t)}{\sum_{j=1}^{r} \alpha_j(x(t), r_i)}. \tag{43}$$

Modelo Difuso Takagi-Sugeno

O sistema difuso Takagi-Sugeno (TS) foi proposto em (Takagi and Sugeno; 1985) e é conhecido também como sistema difuso de interpolação ou baseado em modelo. Ele é caracterizado por particionar o espaço de entrada em áreas difusas e fazer uma aproximação de cada área através de modelos lineares locais de tal forma que o modelo global seja obtido.

A característica principal do modelo difuso Takagi-Sugeno é representar a dinâmica local das regras difusas por um modelo composto de sistemas lineares (Wang et al.; 1996), de forma que o modelo não-linear do sistema é linearizado em certos pontos de operação, produzindo um conjunto de submodelos lineares.

O sistema difuso TS utiliza um conjunto de regras SE-ENTÃO em que a parte conseqüente da regra é composta por submodelos lineares, $f_i(\cdot)$, descrevendo o comportamento dinâmico de distintas condições de operação, enquanto a parte antecedente é responsável por interpolar estes subsistemas:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rs}_i : \mathrm{SE}\ & x(k) \text{ é } M_{i1}(x(k), \theta_i)\ \mathrm{E}\ldots \\ & x(k-n+1) \text{ é } M_{in}(x(k), \theta_i)\ \mathrm{E}\ldots \\ & u(k) \text{ é } N_{i1}(x(k), \theta_i)\ \ \mathrm{E}\ldots \\ & u_{k-m+1}(t) \text{ é } N_{im}(x(t), \theta_i) \\ \mathrm{ENTÃO}\ \ & x_i(k+1) = a_{0i} + a_{1i}x^1(k) + \cdots \\ & +a_{in}x^1(k-n+1) + \mathrm{E}\ b_{i1}u_(k) + \cdots \\ & +b_{im}u(k-m+1)\ , \end{aligned} \tag{44}$$

ou equivalentemente representado na forma de espaço de estados:

$$\begin{aligned} \mathrm{Rs}_i : \mathrm{SE}\ \ & x(k) \text{ é } M_{i1}(x(k), \theta_i)\ \ \mathrm{E}\ldots \\ & x(k-n+1) \text{ é } M_{in}(x(k), \theta_i)\ \ \mathrm{E}\ldots \\ & u_(k) \text{ é }\ N_{i1}(x(k))\ \ \mathrm{E}\ \ldots \\ & u_{k-m+1}(t)\ \ \text{é}\ \ N_{im}(x(k), \theta_i) \\ \mathrm{ENTÃO}\ \ & x_i(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k). \end{aligned} \tag{45}$$

A resposta final para eq. (44) ou (45) é:

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_i(x(k))x_i(k+1)}{\sum_{i=1}^{r} w_i(x(k))}. \qquad (46)$$

sendo que $\sum_{i=1}^{r} w_i(x(k)) > 0$ e $x_i(k+1)$ são calculados também para a i-ésima regra. O peso $w_i(x(k))$ fornece um grau de ativação global para a premissa da i-ésima regra:

$$w_i(x(t)) = \text{aggreg}(M_{in}, N_{im}) \ . \qquad (47)$$

Quando o conseqüente da regra é escolhido na forma $y_i = a_i x + b_i$ o controlador Takagi-Sugeno é considerado de primeira ordem. Se o parâmetro do vetor é nulo, $a_i = 0$, e o termo $b_i = K$ é constante, o sistema difuso é considerado de ordem zero. Esta última função equivale ao modelo lingüístico Mamdani simplificado que utiliza conseqüentes do tipo *singleton*.

Controle Difuso Takagi-Sugeno

Quando aplicado como controlador, o conseqüente da regra do sistema difuso Takagi-Sugeno se torna:

$$\begin{aligned} \text{Rc}_j : \text{SE } & x_1(t) \text{ é } M_{j1}(x(t), \theta_i) \text{ E} \ldots \\ & x_n(t) \text{ é } M_{jn}(x(t), \theta_i) \\ \text{ENTÃO } & u_j = -K_j x(t) + H_j r(t), \end{aligned} \qquad (48)$$

sendo que Rc_j representa a j-ésima regra. No conseqüente da regra, as matrizes de ganho, K_j e H_j, compõem a lei de controle e o sinal de referência é representado por $r(t)$. O grau de ativação da j-ésima regra é também obtida por $w_j(x_j, \theta_i) \geq 0$.
A operação de *aggreg* tanto para o modelo quanto para o controlador pode ser selecionado pelo produto algébrico :

$$w_j(x(t), \theta_i) = \prod_{p=1}^{n} M_{pj}(x(t), \theta_i). \qquad (49)$$

visto que esta opção fornece uma resposta suave e contínua.

Sistema de Controle Difuso Takagi-Sugeno

O sistema de controle difuso Takagi-Sugeno em malha fechada é dado por:

$$x(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} w_i w_j(x(t))[A_i - B_i K_j]x(t)}{\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} w_i w_j(x(t))} \ , \qquad (50)$$

ou

$$x(t) = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} w_i w_j(x(t))G_{ij}x(t)}{\sum_{i=1}^{N_r} \sum_{j=1}^{N_r} w_i w_j(x(t))} \ .$$

Os termos $G_{ij} = A_i - B_i K_j$ são responsáveis pelas características dinâmicas do projeto do controlador e pela análise de estabilidade.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao se projetar um sistema difuso são considerados todos os conceitos apresentados como mostrado na Figura 11. A fim de atingir este objetivo é necessário selecionar as variáveis lingüísticas, selecionar (sintonizar)

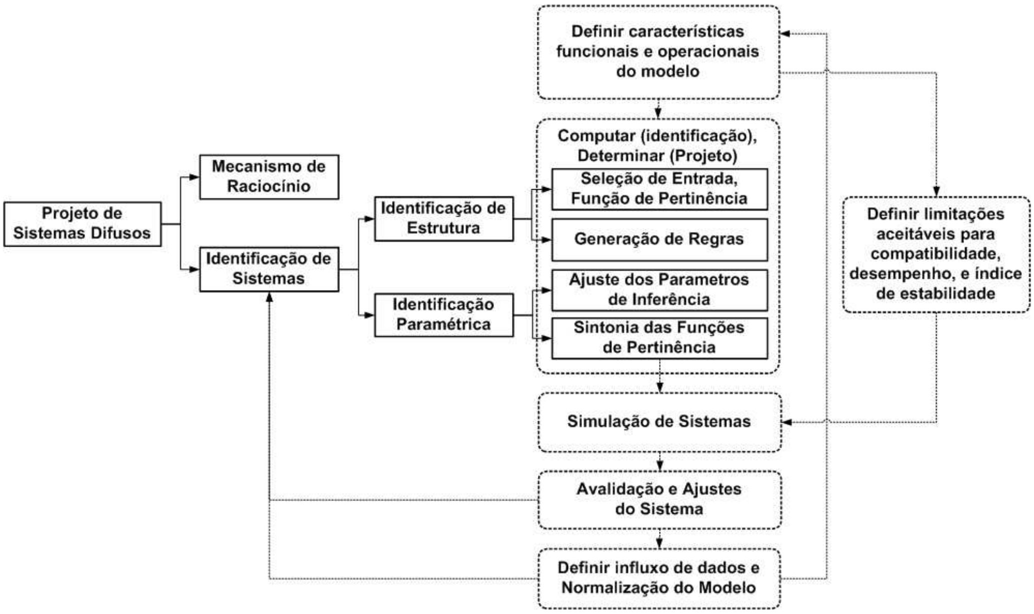


Figura 11: Etapas de projeto de sistemas difusos, com ênfase ao se empregar dados (dos S. Coelho and Araujo; 2009).

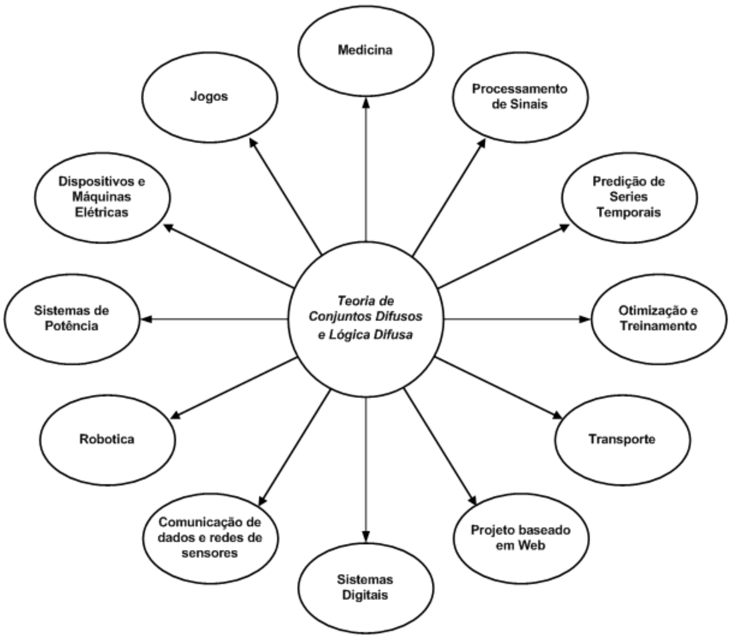


Figura 12: Aplicações para sistemas difusos.

as funções de pertinência pela quantidade, forma, posição (núcleo e suporte), deduzir regras de inferência, construir relações lógicas, e determinar as fórmulas para operações de união e intersecção (função de implicação), selecionar a melhor técnica de defuzificação.
Da perspectiva computacional, é precisar ainda verificar se é possível reduzir o esforço computacional e/ou melhorar a precisão computacional.
A base de regras e as funções de pertinência que estão associadas aos termos lingüísticos e ao mecanismo de inferência formam a base do conhecimento. A construção da base de conhecimento para o projeto de um sistema difuso pode ser realizado pela aquisição de conhecimento do operador através de técnicas de entrevista ou pela aquisição caixa preta por otimização-identificação-aprendizado (Figura 11).
Diferentes técnicas pra o projeto de sistemas difusos empregando dados englobam tanto abordagens de agrupamento (*clustering*) e abordagem de inteligência computacional. Exemplos que podem ilustrar estas técnicas englobam o algoritmo de aprendizado Gath-Geva, algoritmo Wang & Mendel, fuzzy c-means etc. das técnicas de agrupamento, assim como redes neurais artificiais, algoritmo genético, otimização por enxame de partículas (*Particle Swarm Optimization* – PSO). Quando utilizadas para a construção de sistemas híbridos tem-se assim os sistemas de inferência neuro-difusos adaptativos, (*Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System* (ANFIS), sistemas difuso-genéticos, sistemas neuro-difuso-genéticos, sistemas difusos como otimização por PSO, entre outros, compondo ainda a área de inteligência computacional.
O uso híbrido de sistemas difusos com outras técnicas vem do reconhecimento que lidar com problemas do mundo real é imperativo a coalizão de metodologias que juntas sejam capazes de lidar com imprecisão do mundo real.
A habilidade de lidar com informações imprecisas, incertas, vagas proporcionada pelos sistemas difusos ao mesmo tempo em que se empregam técnicas de otimização, aprendizado, ou identificação, faz com que estes sistemas tenham uma ampla gama de aplicações, nas mais diversas áreas. A fim de ilustrar a diversidade de aplicações é mostrado na Figura 12 possíveis exemplos de onde sistemas difusos, em particular, e sistemas híbridos, em geral.

Referências

Araujo, E. (1994,1995,2005). Introdução á lógica difusa e ao raciocínio aproximado, Notas de Aula de Curso (Apostila), São José dos Campos.

Bellman, R. E. and Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science* **17**(4): B 141–164.

Black, M. (1937). Vagueness, an exercise in logical analysis, *Philosophy of Science* **4**(4): 427–455.

de Silva, C. W. (1995). *Intelligent Control: Fuzzy Logic Applications*, CRC Press Ed., Florida.

dos S. Coelho, L. and Araujo, E. (2009). Identification of the Henon chaotic map by fuzzy modeling and Nelder-Mead simplex method, *Chaos, Solitons and Fractals* . dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2008.10.013.

Jenkins, D. F. and Passino, K. M. (1999). An introduction to nonlinear analysis of fuzzy control systems, *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems* **7**(1): 75–103.

Negnevitsky, M. (2002). *Artificial Intelligence: A Guide to Intelligent Systems*, Ed. Addison Wesley, Great Britain.

Nguyen, H. T. and Sugeno, M. (eds) (1998). *Fuzzy Systems: Modeling and Control*, Kluwer Academic Publishers, Boston.

Pedrycz, W. and Gomide, F. (1998). *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*, MIT Press, Boston.

Ruspini, E. (1969). A new approach to clustering, *Information and Control* **15**(1): 22–32.

Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **15**(1): 116–132.

Wang, H. O., Tanaka, K. and Ikeda, T. (1996). Fuzzy modeling and control of chaotic systems, *Proc. IEEE* pp. 209–212.

Yen, J. and Langari, R. (1998). *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information*, Prentice Hall Ed., New Jersey.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control* **8**: 338–353.

Zadeh, L. A. (1968). Fuzzy algorithms, *Information and Control* **12**: 94–102.

Zadeh, L. A. (1973). Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process, *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics* **3**(1): 28–44.

Zadeh, L. A. (1984). Making computers think like people, *IEEE Spectrum* **30**: 26–32.

Zadeh, L. A. (1988). Fuzzy logic, *Computer* **21**(4): 83–93.

Zadeh, L. A. (1996). Fuzzy logic = computing with words, *IEEE Trans. on Fuzzy Systems* **4**(2).

Zadeh, L. A. (1997). Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **90**: 111–127.

Zadeh, L. A. (2002). Toward a perception-based theory of probabilistic reasoning with imprecise probabilities, *Journal of Statistical Planning and Inference* **105**: 233–264.

Zadeh, L. A. (2005). Toward a generalized theory of uncertainty (gtu) – an outline, *Information Sciences* **172**: 1–40.