

# EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK NO CONTEXTO DE ASSIMILAÇÃO DE DADOS

Patrícia Sánez Pacheco

Depto. de Matemática-Setor de Ciências Exatas, UFPR, Centro Politécnico-Jd das Américas, Curitiba - PR,  
e-mail: spacheco@ufpr.br

**Resumo-** Na área de oceanografia, métodos de assimilação de dados são usados para melhorar a previsão fazendo uso de modelos numéricos e dados coletados por diferentes meios. Dentre os mais empregados estão os métodos de interpolação estatística e variacionais. Ambos procuram resultados que minimizem a variância com o valor verdadeiro. Outro método usado com restrições, devido à complexidade numérica para sua realização é o Filtro de Kalman. No método apresentado neste trabalho é considerada a probabilidade de transição dos erros do modelo e dos dados, considerando que são regidas pela equação de Fokker-Planck, para superar estas dificuldades.

**Palavras-chave:** Filtro de Kalman, Equação de Fokker-Planck, Assimilação de Dados.

## FOKKER-PLANCK EQUATION ON DATA ASSIMILATION CONTEXT

**Abstract-** In oceanography, data assimilation are used to improve prevision, using numerical model and data collected by several forms. Among the most used are the statistic interpolation and variational methods. Both of them search results that minimize the variance with the truth value. Another method used with restriction is de Kalman Filter. In this work is considered the transition probability error model and data, considering that are dominated by the Fokker-Planck equation to surpass these difficulties.

**KeyWord:** Kalman Filter, data assimilation, Fokker-Planck equation.

### 1. INTRODUÇÃO

Os primeiros trabalhos em assimilação de dados oceanográficos em modelos globais foram realizados por Bennet, 1987 [2], Miller, 1985 [10], Moore, 1987 [11]. Porém, grande sucesso em aplicações oceanográficas foi obtido por Derber e Rosati, 1989 [4], que empregaram interpolação estatística nos seus experimentos no Oceano Pacífico. Nesta abordagem, no cálculo da análise (resultado do modelo após assimilação) são necessárias as matrizes de covariâncias dos erros do modelo e das observações. A matriz de covariância dos erros do modelo foi fixada a priori, tal que as correlações na direção vertical não são consideradas e as correlações horizontais são idênticas em cada nível do modelo, apesar de depender da latitude e da distância relativa entre o ponto da observação e o da análise. A matriz de covariância dos erros das observações é suposta diagonal e constante, logo somente são usadas as variâncias. Na região equatorial, as covariâncias dos erros do modelo dependem da direção, tendo em vista

as características da dinâmica equatorial. O método foi aplicado em cada passo de tempo visando produzir pequenos incrementos de correção do modelo e assim evitar instabilidades numéricas e dinâmicas. Isto é um exemplo de que uma série de aproximações e ajustes são necessários para a plena realização do método em aplicações na oceanografia e meteorologia. Isto faz com que os métodos percam a otimalidade desejada.

Outro método investigado, mas com severas restrições para sua realização é o Filtro de Kalman-Bucy, 1961 [9] e suas versões como por exemplo o Filtro de Kalman Extendido (Evensen, 1994 [5]) e o Filtro de Kalman por conjuntos (Evensen, 2003 [6]). A principal diferença entre estes métodos está na forma em que é calculada a matriz de covariância dos erros do modelo. Por exemplo, no método de Filtro de Kalman por conjuntos esta matriz é calculada em forma estatística, através de pequenas perturbações na condição inicial é construído um conjunto de previsões que são analisadas para produzir informação sobre as covariâncias dos erros do modelo.

Os filtros de Kalman utilizam as equações prognósticas do modelo, para prever a matriz de covariância dos erros da análise. O algoritmo do filtro de Kalman clássico é segmentado em dois blocos, um previsor e outro diagnóstico no qual a análise é obtida. O filtro de Kalman Estendido é uma extensão linear de primeira ordem do filtro de Kalman para modelos não lineares. Este é obtido por linearização dos operadores dinâmicos e de medições ao redor da estimação mais recente. A principal dificuldade é a inversão de matrizes da ordem  $N$ , onde  $N$  é o número de graus de liberdade do modelo discreto envolvidas no processo de assimilação, comumente encontrado com  $O(10^6 - 10^8)$ .

Estudos aplicados com modelos mais complexos são relativamente recentes, por exemplo, Tanajura e Belyaev, 2002 [12], Evensen, 2004 [7].

Na formulação proposta por Belyaev, [12] é considerada uma equação estocástica que modela os erros do modelo. A dinâmica do erro como um processo estocástico pode, equivalentemente, sob certas hipóteses, ser formulada pela representação de Langevin. Considerando que este processo é markoviano, a equação estocástica dos erros é modelada mediante uma função de densidade de transição, a qual representa a probabilidade para que o sistema passe de um estado atual a um estado seguinte (Jazwinski, 1970 [8]). A dinâmica desta densidade de probabilidade é governada pela equação de Fokker-Planck.

## 2. DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Seja  $\mathbf{x}^t(t, \mathbf{r})$ , denotando o estado de um sistema, por exemplo  $\mathbf{x}^t(t, \mathbf{r}) = (T^t(t, \mathbf{r}), S^t(t, \mathbf{r}), u^t(t, \mathbf{r}), v^t(t, \mathbf{r}))$  denotando temperatura, salinidade e componentes  $u$  e  $v$  de velocidade respectivamente, " $T^t, S^t, v^t, u^t$ " denota o valor verdadeiro,  $t$  o tempo e  $\mathbf{r}$  a coordenada espacial. Em modelos numéricos oceânicos, coordenadas de tempo e espaço serão geralmente membros de uma grade discreta quadri-dimensional. O desenvolvimento do estado do sistema é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^f}{\partial t} = \mathcal{M}(t, \mathbf{x}^f), \quad (1)$$

aqui,  $\mathbf{x}^f$  denota a predição e  $\mathcal{M}$  é o operador do modelo contínuo, em geral, um operador não linear, que pode conter derivadas parciais. Pode-se supor que não existem erros no processo de modelagem, porém existem erros na predição de  $\mathbf{x}^t$ . Isto pode ser devido a que existem flutuações no processo para o qual nenhuma relação existe, ou seja, o valor verdadeiro  $\mathbf{x}^t$  satisfaz a equação de evolução do modelo exceto por um ruído concebido como um processo Gaussiano estacionário com média zero. Pode ser suposto que o verdadeiro valor  $\mathbf{x}^t$  satisfaz também a equação:

$$\frac{\partial \mathbf{x}^t}{\partial t} = \mathcal{M}(t, \mathbf{x}^t) + \eta(t), \quad (2)$$

onde  $\eta(t)$  descreve influências aleatórias que flutuam rapidamente, e portanto são não correlacionadas para

diferentes instantes de tempo. Fisicamente  $\eta(t)$  considera as deficiências do modelo.

O erro de previsão do modelo no instante  $t$  e no ponto  $\mathbf{r}$  é dado por:

$$\theta^f(t, \mathbf{r}) = \mathbf{x}^f(t, \mathbf{r}) - \mathbf{x}^t(t, \mathbf{r}).$$

Se  $\mathcal{M}$  é linear, isto é,  $\mathcal{M}(t, \theta) = \mathcal{M}(t)\theta$ , o erro também evolui segundo o modelo de acordo com:

$$\frac{\partial \theta^f}{\partial t} = \mathcal{M}(t)\theta^f + \eta(t)$$

e

$$E(\eta(\tau, \mathbf{r}_1)\eta^T(t, \mathbf{r}_2)) = \begin{cases} \mathbf{Q}(|r_{12}|) & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases}$$

onde  $E$  denota a esperança,  $|r_{12}| = \text{dist}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , para dois pontos arbitrários do domínio. Isto significa que  $\eta$  não é correlacionado no tempo, mas sim no espaço. Assumamos também que:

$$E\theta^f(0, \mathbf{r}) = 0, \quad \mathcal{M}(0, \theta^f) = 0.$$

Se  $\mathcal{M}$  não é linear, é suposto que erro evolui de acordo a seguinte equação diferencial estocástica:

$$d\theta^f = f(t, \theta^f)dt + G(t, \theta^f)dB \quad (3)$$

onde  $B$  é um movimento browniano. As funções  $f$  e  $G$  são calculadas de acordo com o modelo. Os valores das observações são considerados perfeitos, isto é, a matriz de covariância de erro observacional  $R(t) = 0$  e a matriz  $H$  de interpolação dos pontos do modelo para os pontos onde há observação é considerada sem erros. A proposta é considerar a análise ou variável assimilada pela seguinte expressão:

$$\mathbf{x}^a(t, \mathbf{r}) = \mathbf{x}^f(t, \mathbf{r}) + \int_0^t \sum_{i=0}^{J(\tau)} \alpha(\tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i) d\tau, \quad (4)$$

onde  $\mathbf{r}_i$  são os pontos onde há observação e  $J(\tau)$  é o número de observações no instante  $\tau$ , considerando que ao longo do tempo, medições da variável de estado:

$$\mathbf{y}^o(\tau) = \{\mathbf{y}^o(\tau, \mathbf{r}_i(\tau)), \quad i = 1, \dots, J(\tau)\},$$

no instante  $\tau$ , são consideradas. Nota-se que devido as observações serem consideradas perfeitas para os pontos onde há observação, então:

$$\mathbf{y}^o(\tau) - H(\tau)(\mathbf{x}^f(\tau)) = \mathbf{x}^t(\tau) - H(\tau)(\mathbf{x}^f(\tau)) = \theta^f(\tau),$$

aqui  $\theta^f(\tau)$  representa o vetor de erros de observação, cuja dimensão é  $J(\tau)$ . Para simplificar a notação será usado:

$$\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t = \mathbf{x}^a(t, \mathbf{r}) - \mathbf{x}^t(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{x}^f - \mathbf{x}^t = \mathbf{x}^f(t, \mathbf{r}) - \mathbf{x}^t(t, \mathbf{r}).$$

Os valores de  $\alpha(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{r}_i)$  são determinados buscando a minimização do erro quadrático da análise em relação ao valor verdadeiro de acordo com:

$$E(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t) = 0, \quad (5)$$

$$E(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t)^2 \leq E(\omega - \mathbf{x}^t)^2 \quad \forall \omega \text{ estimacão de } \mathbf{x}^t, \quad (6)$$

isto é, a média da diferença entre o valor da análise e o valor verdadeiro é nula e  $\mathbf{x}^a$  é a função que minimiza  $E(\omega - \mathbf{x}^t)^2$ . Busca-se  $\alpha_i(t) = \alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i)$  que satisfaça 5-6. Para isso deriva-se  $E(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t)^2$  em relação a  $\alpha_i(t)$ . Logo aplicando o operador esperança e considerando a definição do erro:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t\}^2 &= \\ E\{[\theta^f(t, \mathbf{x})]^2 - 2[\theta^f(t, \mathbf{x}) \int_0^t \sum_{i=0}^{N(\tau)} \alpha_i(\tau) \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i) d\tau] \\ + [\int_0^t \sum_{i=0}^{N(\tau)} \alpha_i(\tau) \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i) d\tau]^2\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Diferenciando (7) em relação a  $\alpha_i(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_i(t)} E(\mathbf{x}^a - \mathbf{x}^t)^2 &= \\ = 2E\{-[\theta^f(t, \mathbf{r}) \int_0^t \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i) d\tau] \\ + [\int_0^t \sum_{i=0}^{N(\tau)} \alpha_i(\tau) \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i) d\tau] [\int_0^t \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i) d\tau]\}, \end{aligned}$$

igualando a zero, obtemos:

$$\begin{aligned} E[\theta^f(t, \mathbf{r}) \theta^f(t, \mathbf{r}_i)] \\ = E[\int_0^t \sum_{j=0}^{N(\tau)} \alpha_j(\tau) \theta^f(\tau, \mathbf{r}_j) d\tau] [\theta(t, \mathbf{r}_i)]. \end{aligned}$$

Denote a covariância cruzada entre duas variáveis aleatórias  $\theta^f(t, \mathbf{r})$  e  $\theta^f(\tau, \mathbf{r}_i)$  por:

$$\begin{aligned} K(t, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i) &= \text{Cov}[\theta^f(t, \mathbf{r}) \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i)] \\ &= E\theta^f(t, \mathbf{r}) \theta^f(\tau, \mathbf{r}_i) - E\theta^f(t, \mathbf{r}) E\theta^f(\tau, \mathbf{r}_i), \end{aligned}$$

dessa forma:

$$\begin{aligned} E[\theta^f(t, \mathbf{r}) \theta^f(t, \mathbf{r}_i)] &= \int_0^t \sum_{j=0}^{N(\tau)} \alpha_j(\tau) E[\theta^f(\tau, \mathbf{r}_j) \theta(t, \mathbf{r}_i)] d\tau \\ K(t, t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i) &= \int_0^t \sum_{j=0}^{N(\tau)} \alpha_j K(\tau, t, \mathbf{r}_j, \mathbf{r}_i) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Observa-se que do lado esquerdo tem-se a covariância do erro de predição entre qualquer coordenada espacial e o ponto onde há observação no instante  $t$  e do lado direito temos a covariância do erro de predição entre pontos onde há observação. A equação (8) é chamada de Wiener-Hopf.

Para o caso vetorial, pode-se chegar à mesma equação. A nova variável de estado dos erros  $\theta$ , em nosso caso, está constituída pelos erros devido a temperatura, salinidade e componentes  $u$  e  $v$  da velocidade:

$$\begin{aligned} \epsilon_T(t, \mathbf{r}) &= T^f(t, \mathbf{r}) - T^t(t, \mathbf{r}), \\ \epsilon_S(t, \mathbf{r}) &= S^f(t, \mathbf{r}) - S^t(t, \mathbf{r}), \\ \epsilon_u(t, \mathbf{r}) &= u^f(t, \mathbf{r}) - u^t(t, \mathbf{r}), \\ \epsilon_v(t, \mathbf{r}) &= v^f(t, \mathbf{r}) - v^t(t, \mathbf{r}), \end{aligned}$$

e  $\theta(t, \mathbf{r}) = [\epsilon_T(t, \mathbf{r}), \epsilon_S(t, \mathbf{r}), \epsilon_u(t, \mathbf{r}), \epsilon_v(t, \mathbf{r})]^T$ . As igualdades anteriores estão associadas através de equações de conservação. Quando estamos no caso discretizado, estas variáveis estão ordenadas grade por grade e por variável no modelo numérico discreto, formando um único vetor de dimensão  $N$ :

Denote-se por:

$$\text{Cov}[\epsilon_{i1}(t, \mathbf{r}) (\epsilon_{i2}(\tau, \mathbf{r}_i))^T] = \langle \epsilon_{i1}(t, \mathbf{r}), (\epsilon_{i2}(\tau, \mathbf{r}_i))^T \rangle$$

onde  $i1, i2$  denota uma das variáveis  $T, S, u$  ou  $v$ . Se  $N$  é o número de pontos da grade e  $p$  o número de observações no instante  $\tau$  para as 4 variáveis tem-se matrizes de covariância da ordem  $(4N) \times (4p)$ . O número de pontos de grade do MOM3 é da ordem de  $N = 7 \times 10^4$  o que dá uma idéia do gasto computacional necessário.

Um problema que se apresenta nesta formulação é que seria necessário encontrar  $K$  para todos os pares de pontos da grade. Outro problema seria inverter matrizes o que é um proceso caro de se realizar. As condições iniciais não são conhecidas e se colocarmos valores arbitrários, isto influenciará no resultado final.

Neste trabalho é considerada somente a temperatura como processo difusivo, ela é tratada de forma independente das outras variáveis.

A covariância entre os erros da temperatura será calculada utilizando a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} P^f(t, \mathbf{r}, \mathbf{r}_i) \\ = E\theta^f(t, \mathbf{r}) \theta^f(t, \mathbf{r}_i) - E\theta^f(t, \mathbf{r}) E\theta^f(t, \mathbf{r}_i) \\ = \int_{\mathbb{R}^2} s_1 s_2 p(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 \\ - \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} s_1 p(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right\} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} s_2 p(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

onde  $p(t, s_1, s_2)$  é a função de probabilidade conjunta no instante  $t$  do par  $s_1 = \theta(t, \mathbf{r}_1)$  e  $s_2 = \theta(t, \mathbf{r}_2)$ . Para achar esta função será utilizada a equação de Fokker-Planck de acordo com o teorema a seguir, cuja demonstração é descrita em Jazwinski, [8].

**Teorema 0.1** *Seja  $p$  a probabilidade de transição do processo gerado por*

$$dX(t) = f(X(t), t)dt + G(X(t), t)dB(t). \quad (10)$$

e suponhamos que:

$$\frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial p f(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 [p G^2]}{\partial x^2},$$

existem e são contínuas, então para  $\tau$  e  $y$  fixos tal que  $\tau \leq t$  esta densidade de transição  $p(x, t; y, \tau)$  cumpre com a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial p(x, t; y, \tau)}{\partial t} = - \frac{\partial p(x, t; y, \tau) f(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 [p(x, t; y, \tau) G^2(x, t)]}{\partial x^2} \quad (11)$$

Com condição inicial:

$$\lim_{t \rightarrow \tau} p(x, t; y, \tau) = \delta(x - y). \quad (12)$$

Se  $p(x, t; y, \tau)$  é suposto bem comportado (diferenciável) no infinito, as condições de contorno são:

$$p(\infty; y, t) = p(-\infty; y, t) = 0. \quad (13)$$

Este teorema descreve a probabilidade de transição, porém o interesse está na probabilidade conjunta. Como é notado no apêndice este teorema pode ser utilizado para descrever a evolução da função de densidade de probabilidade do estado  $x = (x_1, x_2)^T$  no teorema:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial [p f_i]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 [p (GG^t)_{ij}]}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (14)$$

Se  $x_1 = \theta(t, \mathbf{r}_1) = s_1$  e  $x_2 = \theta(t, \mathbf{r}_2) = s_2$ , o teorema é válido para saber como evolui a probabilidade conjunta  $p(t, s_1, s_2)$ . Isto é utilizado no presente trabalho.

Para resolver a equação para a probabilidade conjunta  $p(t, s_1, s_2)$  são necessários o conhecimento do vetor  $f$  e da matriz  $G$ .

O cálculo numérico do vetor deriva  $f$  e da matriz de difusão  $G$  é realizado como segue: Os valores das medições são interpoladas temporalmente para passos correspondente à discretização do modelo. No caso deste trabalho, o tamanho dos intervalos entre uma medição e outra é maior que os do modelo, isto é, o número de passos de tempo do modelo ( $n_{mod}$ ) no período em que é feita assimilação é maior que os das observações ( $n_{mod} \gg n_{med}$ ), no entanto, poderia ocorrer o contrário. Para o cálculo aproximado de  $f$  consideremos  $h = t_{n+1} - t_n$  entre dois passos onde houve observação. Seja denotado como:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= (u_i, u_j)^T = (\theta(t_{n+1}, \mathbf{r}_i), \theta(t_{n+1}, \mathbf{r}_j))^T; \\ \bar{s} &= (s_i, s_j)^T = (\theta(t, \mathbf{r}_i), \theta(t, \mathbf{r}_j))^T, \end{aligned}$$

para dois pontos de grade arbitrários  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_j$ . Temos:

$$f(t, \zeta) = \frac{1}{h} E(\bar{u} - \bar{s} | \bar{s}(t) = \zeta).$$

Para  $h$  pequeno, a aproximação de  $f$  no instante  $t_n$ :

$$f(t_n, \bar{s}) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{u} - \bar{s}) p(\bar{u} | \bar{s}) d\bar{u}, \quad (15)$$

onde  $p(\bar{u} | \bar{s})$  indica a probabilidade condicional de  $\bar{u}$  dado  $\bar{s}$ . Considerando que os erros não podem ser muito grandes e a probabilidade condicional é limitada, podemos limitar os erros dentro de um intervalo finito  $[-L, L]$ , com  $L > 0$ . Logo:

$$f(t_n, s_i, s_j) = \frac{1}{h} \int_{-L}^L \int_{-L}^L \left[ \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s_i \\ s_j \end{pmatrix} \right] p(\bar{u} | \bar{s}) d\bar{u}, \quad (16)$$

Para cada passo de assimilação deve-se achar  $f_n$  e  $G_n$ . Para isso, considere os erros em relação ao modelo:

$$\begin{aligned} s_i &= T_n(\mathbf{r}_i) - \langle T_n \rangle, \\ s_j &= T_n(\mathbf{r}_j) - \langle T_n \rangle, \\ u_i &= T_{n+1}(\mathbf{r}_i) - \langle T_{n+1} \rangle, \\ u_j &= T_{n+1}(\mathbf{r}_j) - \langle T_{n+1} \rangle, \end{aligned}$$

onde  $\langle T_n \rangle$  é o promedio espacial aritmético da temperatura entre todos os pontos da grade no instante  $t_n$ , e  $T_n(\mathbf{r})$  é a temperatura dada pelo modelo no instante  $t_n$  no ponto  $\mathbf{r}$ . O espaço de fase considerado neste trabalho é limitado em  $\Omega = [-6.5, 6.5] \times [-6.5, 6.5]$ , isto é  $L = 6.5^\circ C$  pois espera-se que a variabilidade do erro no oceano em relação ao erro médio não exceda a  $6.5^\circ C$  em valor absoluto. A discretização da integral em 16 é feita pelo método do trapézio. O vetor de deriva pode ser aproximado por:

$$f(t_n, s_i, s_j) = \frac{1}{h} \sum_{l \in \hat{I}} \sum_{k \in \hat{K}} [\bar{u}^* - \bar{s}] p(\bar{u} \in I | \bar{s} \in J)$$

onde  $J = J_i \times J_j$  e  $I = I_k \times I_l$  denotam produtos cartesianos,  $\bar{u}^*$  denota o ponto médio do intervalo especificado,  $\hat{K} = \{1, \dots, n_k\}$ ,  $\hat{I} = \{1, \dots, n_l\}$  e  $n_k, n_l$  denotam o número de elementos da partição, respectivamente,  $p(\bar{u} \in I | \bar{s} \in J)$  indica probabilidade de  $\bar{u}$  estar no intervalo  $I$ , dado que  $\bar{s}$  está no intervalo  $J$ .

De forma similar, é calculada a aproximação da matriz de difusão  $G$ :

$$G_h(t_n, s_i, s_j) = \frac{1}{h^2} \sum_{l \in \hat{I}} \sum_{k \in \hat{K}} [\bar{u}^* - \bar{s}] [\bar{u}^* - \bar{s}]^T p(\bar{u} \in I | \bar{s} \in J).$$

Foi considerada a técnica de histograma para achar  $p(\bar{u} \in I | \bar{s} \in J)$ . Para isso, denotemos por:

$$\begin{aligned} J_n &= \{(i, j) \mid (T(t_n, \mathbf{r}_i), T(t_n, \mathbf{r}_j)) \in J_i \times J_j\}, \\ J_{n+1} &= \{(i, j) \in J_n \mid (T(t_{n+1}, \mathbf{r}_i), T(t_{n+1}, \mathbf{r}_j)) \in I_l \times I_k\} \end{aligned}$$

onde  $J_n$  é o conjunto de índices tal que em  $t_n$  o erro da temperatura esteve no intervalo  $I_k$  e  $J_{n+1}$ , o subconjunto de índices de  $J_n$  tal que num instante posterior  $t_{n+1}$  o erro da temperatura esteve no intervalo  $I_l$ . Para dois intervalos fixos  $I_k$  e  $I_l$ , denote-se por  $p_n = \text{card}(J_n)$  e  $p_{n+1} = \text{card}(J_{n+1})$  as cardinalidades (ou, neste caso, número de elementos) dos conjuntos  $J_n$  e  $J_{n+1}$  respectivamente. Logo, a probabilidade condicional é calculada por:

$$p(\bar{u} \in I_k | \bar{s} \in I_l) = \frac{p_{n+1}}{p_n}.$$

O método direções alternadas (ADI) foi considerado para resolver esta equação com uma variante para acelerar a convergência. Na equação de Fokker-Planck o vetor  $f$  de deriva e a matriz  $G$  de difusão são constantes através da integração no intervalo  $t_n$  a  $t_{n+1}$ .

$p^{n+1}$  é calculado em forma iterativa,  $p$  em cada intervalo de tempo  $[t_n, t_{n+1}]$  é a condição inicial, isto é,  $p = p^n$ . A função  $\delta$  de Dirac é aproximada por:

$$\delta(s_1, s_2) \simeq \frac{1}{2\pi k^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2k}(s_1^2 + s_2^2)\right)$$

para algum parâmetro  $k$  pequeno. O algoritmo consiste em calcular numericamente no MOM3 os valores de  $T_n$ , em  $t \in [t_n, t_{n+1}]$ . Calcular campos com média zero no instante  $t_n$ . Calcular  $f(t_n)$ ,  $G(t_n)$  utilizando os campos do modelo e a técnica de histograma. Calcular  $p(t, \bar{s})$  utilizando a equação de Fokker-Planck. Calcular a covariância entre os pontos de observação. Calcular a covariância entre pontos da grade e pontos de observação usando interpolação linear. Calcular o vetor  $\alpha$ . Determinar a estimativa de  $T_n$ .

### 3. CONCLUSÕES

Experimentos numéricos foram realizados. Para fazer uma comparação dos resultados obtidos fazendo uso do método abordado neste trabalho, foram usados dois métodos de assimilação, o de Bergthorsson e Döös (B&D), o de correções sucessivas ou SCM (Daley, [3]). Os experimentos foram realizados sob as mesmas condições com o modelo de circulação oceânica global Modular Ocean Model do NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration, EUA). Foram utilizados dados do projeto PIRATA do mês de março de 1999. Após esse período, a integração foi continuada sem assimilação. Foi possível avaliar os resultados objetivamente somente nos pontos onde houve observação. Os métodos B&D e SCM apresentaram resultados muito semelhantes, produzindo uma melhoria na representação da temperatura da camada de mistura com um aumento da temperatura de larga-escala, como esperado, tendo em vista a forma dos pesos usados nos métodos. Entretanto, isto não alterou o campo de velocidades. Após a interrupção do processo de assimilação com os esquemas B&D e SCM realizado em março de 1999, a simulação permaneceu com melhoras significativas em relação à temperatura gerada pela integração de controle por meses. O filtro de Kalman usando a equação de Fokker-Planck produziu melhorias no campo de temperatura localizadas ao redor dos pontos dos dados observacionais e isto provocou padrões irrealistas tanto na temperatura como no campo de velocidades. Um dos principais motivos pelos quais o método não produziu boas análises foi a pouca quantidade de dados utilizados no experimento com dados do PIRATA. Foram usados dados de apenas nove bóias. Caso houvessem mais dados, a matriz de covariância dos erros de previsão do modelo calculados nos pontos onde há observação teria uma dimensão maior e, ainda, mais informações sobre as covariâncias estariam disponíveis no domínio de interesse. O método de direções alternadas utilizado não garantiu a condição da probabilidade calculada ter integral igual a um. Para manutenção desta propriedade, uma normalização foi utilizada, mas certamente isto impôs erros na estimativa das covariâncias dos erros de previsão do modelo.

### 4. AGRADECIMENTOS

Ao GFDL/NOAA pelo modelo MOM3 e ao Center for Ocean-Land-Atmosphere Studies (COLA/IGES) pelo GrADS. Parte deste trabalho foi suportado pela Universidade Corporativa da PETROBRAS bolsa do CENPES/PETROBRAS. Este trabalho foi parte do projeto PRONEX CNPq-FAPERJ LNCC - Laboratório Nacional de Computação Científica.

## Referências

- [1] BELYAEV, K. P.; TANAJURA, C. A. S.; O'BRIEN, J.J., **A data assimilation method used with an ocean circulation model and**

**its application to the tropical Atlantic**, *Applied Mat. Modelling*, v. 25, pp.655-670, 2001.

- [2] BENNET, A. F.; BUDGELL W. P.; **Ocean data assimilation and the Kalman filter: Spatial regularity**, *J. Phys. Oceanogr.*, vol. 17, No. 10, pp. 1583-1601, 1987.
- [3] DALEY, R., **Atmospheric Data Analysis**. 1st. Cambridge University Press 1991.
- [4] DERBER, J.; ROSATI, A., **A Global Oceanic Data Assimilation System**, *Journal of Physical Oceanography*, v. 19, n.9, pp.1337-1347, 1989.
- [5] EVENSEN, G., "Using the extended Kalman filter with a multilayer quasi-geostrophic ocean model", *J. Geophys. Res.*, vol. 97(C11), pp. 17905-17924, 1992.
- [6] EVENSEN, G., "The Ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation", *Ocean Dynamics*, vol. 53, pp. 343-367, 2003.
- [7] EVENSEN, G., "Sampling strategies and square root analysis schemes for the EnKF with Correction", *Ocean Dynamics*, v.54, pp.539-560, 2004.
- [8] JAZWINSKI, A., **Stochastic processes and filtering theory**. New York Academic Press, 1970.
- [9] KALMAN, R.; BUCY, R., "New results in linear filtering and prediction theory", *Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Eng.*, v. 83, pp. 95-198, 1961.
- [10] MILLER, R. N., **Toward the application of the Kalman filter to regional open ocean modeling**, *J. Phys. Oceanogr.*, v. 16, pp. 72-86, 1985.
- [11] MOORE, A.M.; COOPER N.S; ANDERSON, D.L.T., **Initialization and data assimilation in models of the Indian Ocean.**, *J. Phys. Oceanogr.*, v. 17, pp.1965-1977, 1987.
- [12] TANAJURA C.A.; BELYAEV, K., "On the oceanic impact of the data assimilation method in coupled-ocean-land atmosphere model". *Ocean Dynamics* v. 52 pp123-132, 2002.