

CURVAS DE LARGURA CONSTANTE E SUAS GENERALIZAÇÕES

Kelly Roberta Mazzutti Lübeck¹

1.- Colegiado de Matemática, CECE, UNIOESTE, 85870 650, Foz do Iguaçu, PR e-mail: kellyrobertaml@gmail.com

Resumo- O presente trabalho visa apresentar alguns problemas relacionados à convexidade, em especial aos ligados as Curvas Planas de Largura Constante e a generalização de algum destes conceitos para o espaço euclidiano tridimensional. Escolhemos abordar a teoria das curvas planas de largura constante, pois além do estudo das propriedades e teoremas que englobam estas curvas especiais apresentarem uma beleza e simplicidade nas suas argumentações, a teoria também se destaca nas várias relações que os conceitos de curvatura, índice de rotação e convexidade apresentam entre si. Para concluir, destacamos que dentre os casos de superfícies com largura constante, as que têm maior (ou menor) área são justamente as que possuem maior (ou menor) volume possibilitando, por fim, verificar que a superfície com largura constante com maior volume possível é a esfera.

Palavras-chave: Geometria Diferencial, Curvas de Largura Constante, Superfícies Convexas.

CURVES OF CONSTANT WIDTH AND THEIR GENERALIZATIONS

Abstract- This paper aims to present some problems related the convexity, in particular related the curves of constant width and the generalization of some of these concepts for the three-dimensional Euclidean space. We address the theory of plane curves of constant width, because the study of properties and theorems that involve these curves have a special beauty and simplicity in their arguments, the theory also highlights the various relationships that the concepts of curvature, rotation index and convexity presents. In conclusion, we highlight that among the cases of surfaces with constant width, with more area (or smaller) are precisely the that have higher (or lower) volume possible, finally, the surface with constant width the with largest possible volume is the sphere.

KeyWord: Differential Geometry, Curves of Constant Width, Convex Surfaces.

1. INTRODUÇÃO

Com relação a teoria de Curvas de Largura Constante e suas Generalizações serão apresentados, num primeiro momento, a definição de curva de largura constante, seguido de exemplos e o surpreendente teorema de Barbier, que diz que o comprimento de qualquer curva convexa, regular, fechada, simples e de largura constante λ é igual a $\pi\lambda$, ou seja, o mesmo comprimento de uma circunferência de diâmetro λ . Estaremos trabalhando com curvas planas, regulares por partes, fechadas, convexas, nas quais a distância entre quaisquer dois “pontos antípodas” é constante, ou seja, a distância em qual-

quer direção determinada pelos pontos da interseção das retas suportes com a curva é sempre a mesma. Também mostraremos curvas de largura constante a partir de curvas abertas que satisfazem determinadas características.

Numa segunda etapa, vamos explorar a generalização destes conceitos para o espaço tri-dimensional. Tais generalizações referem-se a Superfícies Ovais de Largura Constante, isto é, dizem respeito às superfícies para as quais para cada par de planos paralelos tangentes a superfície em dois pontos distintos, a distância entre eles é igual a Λ . Ainda, serão demonstradas algumas fórmulas que envolvem os conceitos de área, de

curvatura média total e de volume das superfícies ovais. Dentre estes resultados, mostraremos que a curvatura média total de uma superfície de largura constante Λ é dada por $2\pi\Lambda$.

Saliento, para os interessados, que o trabalho que será discutido aqui baseou-se nas idéias apresentadas nas referências bibliográficas, sendo que os livros de H. G. Eggleston contém um variado número de resultados sobre convexidade.

2. CURVAS DE LARGURA CONSTANTE

Consideremos, inicialmente, uma curva fechada, simples e regular por partes $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, ou seja, $\alpha'(s) \neq 0$, para todo $s \in [0, l]$, onde l é o comprimento para tal curva. Tomando α uma curva parametrizada por comprimento de arco temos, então, $\|\alpha'(s)\| = 1$ para todo $s \in [0, l]$. Dizemos que uma curva é simples se não tem auto-interseções, isto é, se $0 < s_0 < s_1 < l$ implica que $\alpha(s_0) \neq \alpha(s_1)$. Como ainda α é fechada e simples, temos $\alpha(0) = \alpha(l)$ e $\alpha'(0) = \alpha'(l)$.

Definição 2.1 *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, então o número $\|\alpha''(s)\| = k(s)$ chama-se curvatura de α em s .*

Assim nos pontos, em que $k(s) \neq 0$, temos um vetor $n(s)$ unitário bem definido, pela equação $\alpha''(s) = k(s)n(s)$. Denotando $\alpha'(s) = t(s)$ tem-se que o vetor $n(s)$ é ortogonal a $t(s)$. Deste modo, temos uma base do \mathbb{R}^2 descrita pelos vetores $\{t(s), n(s)\}$. Como α foi parametrizada por comprimento de arco, se α não admitir pontos singulares de ordem 1, então

$$t'(s) = k(s)n(s).$$

Analogamente, se α não admitir pontos singulares de ordem 2, então tem-se

$$n'(s) = -k(s)t(s),$$

seguindo-se as fórmulas de Frenet para uma curva plana. (Observe que a torção é zero).

Definição 2.2 *Dizemos que uma curva $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é convexa se, para todo $s_0 \in [0, l]$, a função definida por $h(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), n(s_0) \rangle$ não mudar de sinal.*

Equivalentemente, dizemos que uma curva é convexa se em cada ponto $\alpha(s_0)$ a curva estiver contida em um dos semi-planos determinados pela reta tangente a α , no ponto s_0 .

Considere, agora, α uma curva fechada. Dizemos que uma reta l é uma reta suporte para esta curva se l têm a seguinte propriedade: α está contida num dos semi-planos definidos por l , e l toca a curva α . Notemos que em cada direção \vec{v} há exatamente duas retas suportes de α (pois o traço de α é fechado) e a distância entre estas retas é dita a largura λ de α na direção \vec{v} (conforme a Figura 1).

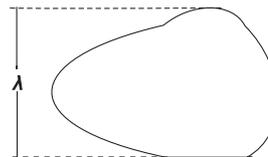


Figura 1: Largura λ da curva, na direção de um vetor perpendicular as retas tracejadas.

Definição 2.3 *Uma curva α tem largura constante se for fechada, e a largura em todas as direções for a mesma.*

Exemplo 2.1 O círculo é a curva mais conhecida que têm largura constante. De fato, o diâmetro do círculo é igual a sua largura.

Aparentemente, temos uma falsa impressão de que esta é a única curva de largura constante. A seguir veremos um exemplo um pouco mais sofisticado de uma curva que tem largura constante. Antes, investigaremos alguns resultados.

Lema 2.1 *Seja α uma curva de largura constante, l_1, l_2 retas suportes de α , paralelas, e α_1, α_2 pontos que pertencem a $\alpha \cap l_i, i = 1, 2$. Então a reta $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ é ortogonal a l_1 e l_2 .*

Demonstração: Seja λ_1 a largura de α . Suponhamos por absurdo que $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ não seja ortogonal a l_1 . Do fato da distância entre l_1 e l_2 ser igual λ_1 , como $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ não é ortogonal a l_1 segue imediatamente do Teorema de Pitágoras que $|\alpha_2 - \alpha_1| > \lambda_1$. Consideremos agora a largura λ_2 de α na direção $\alpha_2 - \alpha_1$, temos que $\lambda_2 \geq |\alpha_2 - \alpha_1|$. Daí $\lambda_2 > \lambda_1$ e então α tem duas larguras distintas em direções distintas, implicando que α não tem largura constante, o que é uma contradição. Portanto, $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ é ortogonal a l_1 e l_2 .

Corolário 2.1 *Seja l uma reta suporte de uma curva α de largura constante, então $\alpha \cap l$ consiste de único ponto. Em particular, α é convexa.*

Demonstração: Consideremos l_1 a outra reta suporte de α , paralela a l e α_1 o ponto da interseção de l_1 e α . Então pelo Lema 1, qualquer ponto de $l \cap \alpha$ está na perpendicular a l_1 que passa por α_1 . Como a interseção de 2 retas ortogonais é um único ponto, $\exists! x \in \alpha \cap l$.

Agora, suponhamos por absurdo que α não é convexa, então existem pontos de α que estão nos dois semi-planos determinados pela reta suporte. Mas para isto aconteça deve existir $\alpha_1, \alpha_2 \in \alpha \cap l$, o que contradiz a hipótese e completa a demonstração.

Proposição 2.1 *Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva C^2 de largura constante λ , então $k(s) \geq \frac{1}{\lambda}$, para todo $s \in [0, L]$.*

Demonstração: Com efeito, seja α_1 um ponto de α e l_1 a reta tangente a α em α_1 . Tomemos l_2 a outra reta suporte de α , paralela a l_1 , e α_2 o ponto da interseção de α com l_2 . Consideremos agora o círculo de centro

α_2 e raio λ . Afirmamos que todo ponto de α está no círculo.

De fato, suponha por absurdo que existe $\alpha_3 \in \alpha$ que esteja fora do círculo, logo $|\alpha_2 - \alpha_3| > \lambda$ e, portanto, na direção de $\overline{\alpha_2\alpha_3}$ temos uma largura maior que λ , o que contradiz a hipótese. Portanto α está contida no interior do círculo. Sendo α_2 é centro do círculo, isso implica que $k(s) \geq \frac{1}{\lambda}$, para todo $s \in [0, L]$, daí segue o resultado.

Para os tópicos que iremos tratar a seguir, necessitamos introduzir alguns fatos gerais sobre curvas planas. Para isto definiremos indicatriz tangente e o índice de rotação, como segue:

Definição 2.4 *Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow IR^2$ uma curva em IR^2 parametrizada por comprimento de arco. A indicatriz tangente $t : [0, L] \rightarrow IR^2$ dada por $t(s) = (x'(s), y'(s))$, é uma curva cujo traço está contido num círculo unitário de raio 1.*

Observação 2.1 Notemos que o vetor tangente da indicatriz é dado por $t'(s) = kn$, conforme as fórmulas de Frenet. Se denotarmos por $\theta(s)$ o ângulo que $t(s)$ faz com o eixo Ox , teremos $t(s) = (\cos \theta(s), \sin \theta(s))$ e, assim, $t'(s) = \theta'(s)(-\sin \theta(s), \cos \theta(s)) = \theta'(s)n(s)$. Então $\theta'(s) = k(s)$ e deste modo temos que $\theta(s) = \int_0^s k(r)dr$. Do fato de α ser fechada, temos que θ é um múltiplo inteiro I de 2π , ou seja,

$$\int_0^L k(s)ds = \theta(L) - \theta(0) = 2\pi I.$$

Definição 2.5 *Seja α uma curva de classe C^2 fechada e regular. Chamamos de índice de rotação de α ao inteiro $I = \frac{\theta(L) - \theta(0)}{2\pi}$.*

Devemos observar, entretanto, que para curvas fechadas e convexas o índice de rotação é 1. (Para detalhes veja ARAÚJO).

Teorema 2.1 (Teorema de Barbier) *O comprimento de qualquer curva convexa, regular, fechada, simples e de largura constante λ é igual a $\pi\lambda$.*

Demonstração: Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow IR^2$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, sendo orientada positivamente. Agora pela observação acima, temos que o índice de rotação da curva α é igual a 1. Consideremos então a extensão periódica $\tilde{\alpha}$ de α , definida em IR de modo que

$$\tilde{\alpha}(s + nL) = \alpha(s), \forall s \in [0, L], \forall n \in IN.$$

Seja θ uma determinação diferenciável do ângulo que a indicatriz tangente de $\tilde{\alpha}$, $t(s)$, faz com o eixo Ox . Do fato do índice de rotação ser igual a 1, temos

$$\theta(s + L) - \theta(s) = 2\pi, \forall s \in IR.$$

Daí pela Observação 2.1 obtemos,

$$\theta'(s) = k(s), \forall s \in IR.$$

Sabemos que a curva é estritamente convexa, ou seja, $k(s) > 0$ e, portanto, θ é estritamente crescente. Então, θ possui inversa diferenciável. Agora, para cada $s \in IR$ considere a aplicação

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(s) + \lambda n(s),$$

onde n é o normal unitário relacionado a $\tilde{\alpha}$. Assim, segue-se que $\bar{\alpha}$ é diferenciável, periódica e, para todo $s \in IR$, $\tilde{\alpha}(s)$ e $\bar{\alpha}(s)$ são chamados de pontos antípodas. Agora necessitaremos do seguinte resultado para darmos prosseguimento a demonstração do teorema enunciado.

Lema 2.2 *Existe uma função diferenciável $h : IR \rightarrow IR$ tal que $\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha} \circ h(s)$ para qualquer $s \in IR$. Essa função é tal que $h(s + L) = h(s) + L$, e sua derivada é estritamente crescente e positiva em todos os pontos.*

Demonstração: Seja h dada por $h(s) = \theta^{-1}(\theta(s) + \pi)$. Então h é diferenciável e sua derivada é positiva (pois $\theta' = k > 0 \Rightarrow \theta^{-1} = \frac{1}{\theta} > 0$). Note que,

$$\theta \circ h(s) = \theta(s) + \pi,$$

pois

$$\theta \circ h(s) = \theta \circ \theta^{-1} = \theta(s) + \pi.$$

Assim, se t é a indicatriz tangente de $\tilde{\alpha}$, segue-se que

$$\begin{aligned} t(h(s)) &= (\cos(\theta \circ h(s)), \sin(\theta \circ h(s))) \\ &= (\cos(\theta + \pi), \sin(\theta + \pi)) \\ &= (-\cos(\theta), -\sin(\theta)) = -t(s). \end{aligned}$$

Então $t(h(s)) = -t(s)$, mas deste modo, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}(h(s))$ são pontos antipodais. Portanto,

$$\bar{\alpha}(s) = \tilde{\alpha}(h(s)).$$

Pelo Lema anterior, temos

$$\tilde{\alpha}(s) + \lambda n(s) = \tilde{\alpha}(h(s)).$$

Derivando a expressão, obtemos

$$t(s) + \lambda n'(s) = t(h(s))h'(s),$$

que pelas fórmulas de Frenet equivalem a

$$t(s) - \lambda k(s)t(s) = t(h(s))h'(s),$$

mas $t(h(s)) = -t(s)$, e portanto,

$$(1 - k(s))\lambda + h'(s)t(s) = 0.$$

Logo,

$$h'(s) = k(s)\lambda - 1.$$

Deste modo temos,

$$\begin{aligned} L &= h(L) - h(0) = \int_0^L h'(s)ds = \int_0^L (k(s)\lambda - 1)ds \\ &= \lambda \int_0^L k(s)ds - \int_0^L ds = 2\pi\lambda - L \end{aligned}$$

Portanto,

$$L = \pi\lambda.$$

Vamos, agora, descrever um exemplo não trivial de curva de largura constante. Este exemplo foi apresentado por Euler, num trabalho sobre curvas triangulares. Esta curva encontra-se descrita em (Voloch, 1987). Dizemos que uma curva é triangular se é uma curva que contém três cúspides, tendo uma única reta tangente em cada cúspide (conforme a Figura 2).

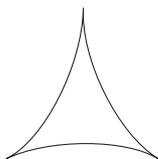


Figura 2: Curva triangular.

Definição 2.6 A curva $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma involuta para uma curva $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se $\alpha'(s)$ é ortogonal a $\beta'(s)$ e o vetor $\alpha(s) - \beta(s)$ é paralelo a $\beta'(s)$, para todo $s \in [0, l]$.

Teorema 2.2 (Euler) Uma involuta fechada de uma curva triangular $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, tem largura constante.

Demonstração: Com efeito, seja $\beta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$, parametrizada por comprimento de arco, e denotamos $\beta'(s) = t(s)$, ou seja, o vetor unitário tangente a $\beta(s)$. Então descreveremos a involuta pela equação $\alpha(s) = \beta(s) + x(s)t(s)$, onde determinaremos $x(s)$ de modo conveniente. Derivando a expressão acima temos

$$\alpha'(s) = \beta'(s) + x(s)t'(s) + x'(s)t(s). \quad (1)$$

Mas por hipótese, temos que $\alpha'(s)$ é ortogonal a $t(s)$, então $\langle \alpha'(s), t(s) \rangle = 0$. Agora, aplicando o produto interno na equação 1 com $t(s)$, obtemos

$$\langle \beta'(s), t(s) \rangle + \langle x'(s)t(s), t(s) \rangle = 0,$$

daí

$$x'(s) = -1,$$

e por integração concluímos que $x(s) = a_0 - s$, onde a_0 é constante. Assim, a equação da involuta é dada por

$$\alpha(s) = \beta(s) + (a_0 - s)t(s).$$

Notemos, que o parâmetro de a_0 , não possui valor único nos trechos da involuta, mas sabemos que seu parâmetro varia com continuidade, devida o fato da involuta ser uma curva fechada. Para percorrermos a involuta de P_0 a P_1 (conforme Figura 3), temos que o ponto $\beta(s)$ percorre a curva base de A até B ; mas ao ultrapassarmos P_1 , na involuta, o parâmetro a_0 deve ser alterado para garantir a continuidade dela. E assim por diante nos pontos $P_2, \dots, P_6 \equiv P_0$. Percebemos, assim, que ao longo de um reta tangente à curva

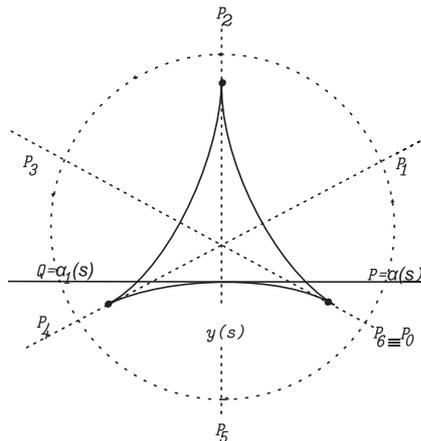


Figura 3: Involuta convexa.

base, denotando por PQ , a involuta é descrita por duas parametrizações,

$$\alpha(s) = \beta(s) + (a_0 - s)t(s)$$

e

$$\alpha_1(s) = \beta(s) + (a_1 - s)t(s),$$

respectivamente, a dois de seus ramos. Tais parametrizações correspondem a pares de pontos $P = \alpha(s)$ e $Q = \alpha_1(s)$ onde a reta tangente é cortada em dois pontos pela involuta. Como $\alpha(s) - \alpha_1(s)$ é ortogonal a $\alpha'(s)$ e $\alpha_1'(s)$ e

$$\begin{aligned} \alpha(s) - \alpha_1(s) &= \\ &= \beta(s) + (a_0 - s)t(s) - \beta(s) + (a_1 - s)t(s) \\ &= (a_0 - a_1)t(s) \\ &\Rightarrow |\alpha(s) - \alpha_1(s)| = |a_0 - a_1||t(s)| \\ &\Rightarrow |\alpha(s) - \alpha_1(s)| = |a_0 - a_1| \end{aligned}$$

temos que a largura da involuta é constante.

Observe, também, que vale

$$\begin{aligned} \langle \alpha(s) - \alpha_1(s), \alpha'(s) \rangle &= \\ &= \langle (a_0 - a_1)t(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle a_0 t(s), \alpha'(s) \rangle + \langle a_1 t(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= a_0 \langle t(s), \alpha'(s) \rangle + a_1 \langle t(s), \alpha'(s) \rangle = 0. \end{aligned}$$

Daí segue a ortogonalidade mencionada anteriormente. Analogamente, garantimos a ortogonalidade de $\alpha(s) - \alpha_1(s)$ com $\alpha_1'(s)$, donde segue-se o resultado.

Agora consideremos, $\alpha : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ um arco (aberto) de curva convexa, parametrizada por comprimento de arco, com “índice de rotação” (por abuso de linguagem) igual a $\frac{1}{2}$, ou seja, $t(L) = -t(0)$. E para cada ponto $\alpha(s)$ de α consideremos um ponto $\bar{\alpha}(s)$, traçado na direção da normal em $\alpha(s)$, distando $\lambda = \alpha(0) - \alpha(L)$ de $\alpha(s)$. Além disso, se $k(s) \geq \frac{1}{\lambda}$, para todo $s \in [0, L]$, e se tivermos que $L \leq \pi\lambda$. Então a união de $\alpha(s)$ e $\bar{\alpha}(s)$, é uma curva de largura constante, como indica o resultado abaixo.

O próximo resultado também nos permite criar uma variada lista de curvas de largura constante,

determinando-se, grosseiramente falando, meios arcos e completando-os com seus pontos antipodais. Uma maneira seria “achatar” um pólo de um semi-círculo e estendê-la através dos antipodais. Estas funções satisfazem o teorema e, portanto, representam uma curva de largura constante.

Teorema 2.3 *Seja $\alpha : [0, L] \rightarrow IR^2$ uma curva de classe C^2 , simples, não fechada, parametrizada por comprimento de arco. Suponha que $\alpha'(0) = -\alpha'(L)$, $\alpha(L) - \alpha(0) \perp \alpha'(0)$ e que $k(s) \geq \frac{1}{\lambda}$, se $s \in [0, L]$, onde $\lambda = |\alpha(L) - \alpha(0)|$. Então $L < \pi\lambda$ e existe uma extensão $\bar{\alpha} : [0, \pi\lambda] \rightarrow IR^2$ de α (isto é, $\bar{\alpha}(s) = \alpha(s)$, $s \leq L$) tal que $\bar{\alpha}(s)$ é uma curva de largura constante λ .*

Demonstração: Como $\lambda k(s) \geq 1$, daí

$$\int_0^L \lambda k(s) ds \geq L$$

e como, $t(0) = -t(L)$, segue-se que

$$\int_0^L k(s) ds = \pi,$$

logo $\pi\lambda \geq L$. Supomos que vale a igualdade anterior, ou seja, $L = \pi\lambda$, assim $k(s) = \frac{1}{\lambda}$ para todo $s \in [0, L]$ e α é um semicírculo de raio λ . Então $|\alpha(0) - \alpha(\pi\lambda)| = 2\lambda$, contrariando a hipótese. Portanto $L < \pi\lambda$.

Agora para construirmos a extensão, definimos a seguinte função,

$$\psi(s) = L + \int_0^s (\lambda k(r) - 1) dr.$$

Deste modo, segue que $\psi'(s) = \lambda k(s) - 1$, $\psi(0) = L$ e

$$\psi(L) = L + \int_0^L \lambda k(r) - 1 dr = L + \pi\lambda - L = \pi\lambda.$$

Assim temos que a função $\psi : [0, L] \rightarrow [L, \pi\lambda]$ é contínua e sobrejetiva. Se $y \in [L, \pi\lambda]$, $y = \psi(s)$ definimos $\bar{\alpha}(y) = \alpha(s) + \lambda n(s)$. Ainda por hipótese, $\alpha(L) - \alpha(0) \perp \alpha'(0)$ e $\lambda = |\alpha(L) - \alpha(0)|$, obtemos que $\alpha(L) - \alpha(0) = \lambda n(0)$, assim

$$\bar{\alpha}(L) = \alpha(0) + \lambda n(0) = \alpha(L).$$

Portanto, $\bar{\alpha}$ é contínua. Ainda, tem-se que $(\alpha(0) - \alpha(L)) \perp \alpha'(L)$ e dessa forma

$$\bar{\alpha}(\pi\lambda) = \alpha(L) + \lambda n(L) = \alpha(0),$$

$\bar{\alpha}$ é fechada. E além disso, $\bar{\alpha}$ é diferenciável, pois é soma de funções diferenciáveis e,

$$\bar{\alpha}(\psi(s)) = \alpha(s) + \lambda n(s).$$

Derivando esta expressão segue-se que $\bar{\alpha}'(\psi(s))\psi'(s) = -t(s)(-1 + k(s))$, logo $\bar{\alpha}'(\psi(s)) = -t(s)$.

Obtemos também que $\bar{\alpha}$ é convexa, pois

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\psi(s))'' &= (\bar{\alpha}'(\psi(s))\psi'(s))' \\ &= (-t(s)\cdot(-1 + \lambda k(s)))' \\ &= -t'(s)\cdot(-1 + \lambda k(s)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -k(s)n(s)(1 - \lambda k(s)) \\ \Rightarrow \bar{\alpha}(\psi(s))'' &= \bar{\alpha}'(\psi(s))\cdot(1 - \lambda k(s))^2 \\ \Rightarrow \bar{\alpha}''(\psi(s)) &= \frac{k(s)}{1 - \lambda k(s)}(-n(s)) \end{aligned}$$

Portanto,

$$k(\psi(s)) = \frac{k(s)}{\lambda k(s) - 1} \geq 0.$$

Temos, assim, que as retas suportes em $\alpha(s)$ e $\bar{\alpha}(\psi(s))$ são paralelas, pois ambas as retas são paralelas a $t(s)$, e são ortogonais a $\alpha(s) - \bar{\alpha}(\psi(s)) = -\lambda n(s)$, claramente do fato de $n(s) \perp t(s)$. Também, elas distam uma da outra $|\alpha(s) - \bar{\alpha}(\psi(s))| = \lambda$, o que completa a demonstração.

3. GENERALIZAÇÕES NO ESPAÇO TRI-DIMENSIONAL

Vamos, agora, trabalhar com o conceito de largura constante no espaço tri-dimensional. Para tanto, considere-mos *superfícies ovais*, ou seja, superfícies compactas no IR^3 com curvatura estritamente positiva em todos os pontos.

Uma superfície S é *estritamente convexa* se, para cada $p \in S$, a intersecção do plano tangente $\{p\} + T_p S$ com S se reduzir ao ponto p , ou seja, $S \setminus \{p\}$ estiver toda contida no mesmo semi-espaço aberto, em que $\{p\} + T_p S$ divide o IR^3 .

Consideramos S^2 a esfera unitária do IR^3 .

Proposição 3.1 *Qualquer oval S é estritamente convexa.*

Demonstração: Para cada $p \in D$ fixado a aplicação $h_p(q) = \langle N(p), q - p \rangle$ tem sinal constante, só se cancelando em p . Caso contrário, h_p assume um mínimo e um máximo em pontos $q_0, q_1 \in S \setminus \{p\}$. Com isto temos que dois dos vetores $N(p), N(q_0)$ e $N(q_1)$ são iguais, uma vez que $T_{q_0} S$ e $T_{q_1} S$ são ortogonais a $N(p)$.

Isto contraria o fato de N ser um difeomorfismo (pois superfícies ovais são difeomorfas à esfera, donde $N : S \rightarrow S^2$ é um difeomorfismo).

Equivalentemente a Definição 2.2 percebemos que $\langle N(p), q - p \rangle > 0$ para quaisquer $p, q \in S$ sempre que se tem $\langle N(p_0), q - p_0 \rangle > 0$ para algum $p_0 \in S$. Basta observar que h_p tem sinal constante.

Seja S uma superfície compacta e convexa, $p \in S$, $A_S(p)$ a área da projeção ortogonal de S em $T_p S^2$ e $A(S)$ a área da superfície S . Então é possível provar que

$$A(S) = \frac{1}{\pi} \int_{S^2} A_S(p) d\sigma.$$

Esta relação representa uma das fórmulas de Cauchy e detalhes da sua demonstração podem ser obtidos em (Eggleston, 1958).

Definição 3.1 *Uma superfície oval S têm largura constante Λ se, para cada par de pontos paralelos,*

tangentes a S em dois pontos distintos, a distância entre eles for igual a Λ .

Corolário 3.1 Se S tiver largura constante Λ então $A(S) \leq \pi\Lambda^2$, com igualdade se, e só se, S for uma esfera.

Demonstração: Como S possui largura constante a sua projeção ortogonal no plano tangente T_pS^2 , indicada por $S(p)$, é limitada por uma curva de largura constante Λ , que terá um perímetro de $\pi\Lambda$ segundo o Teorema 2.1 (de Barbier).

Da desigualdade isoperimétrica¹ temos que:

$$A_S(p) \leq \frac{\pi\Lambda^2}{4} \quad (1)$$

havendo igualdade se, e somente se, $S(p)$ é um disco de raio $\frac{\Lambda}{2}$. Da fórmula de Cauchy para a área e de (1) obtemos:

$$A(S) \leq \frac{1}{\pi} \int_{S^2} \frac{\pi\Lambda^2}{4} d\sigma = \pi\Lambda^2,$$

com igualdade se, e só se, cada projeção ortogonal $S(p)$ for um disco de raio $\frac{\Lambda}{2}$, donde S é uma esfera.

Analogamente ao caso anterior das curvas de largura constante, vamos também trabalhar com os pontos antipodais numa superfície S que têm largura constante Λ , ou seja, definimos o antípoda $\mathcal{A}(p)$ de $p \in S$ por

$$\mathcal{A}(p) = p + \Lambda N(p).$$

Observe que $\mathcal{A} : S \rightarrow S$ é um difeomorfismo que satisfaz $\mathcal{A}^2 = id$.

Para a família S_t de superfícies paralelas² a S , ou seja, $S_t = \{p - tN(p) : p \in S\}$ e $\Phi(u, v)$ uma parametrização de S , obtemos

$$\Phi^t(u, v) = \Phi(u, v) - tN(u, v).$$

Dessa forma,

- $\Phi_u^t \times \Phi_v^t = \Phi_u \times \Phi_v - t\{\Phi_u \times N_v + N_u \times \Phi_v\} + t^2\{N_u \times N_v\},$
 $= (1 + 2tH + t^2K)\{\Phi_u \times \Phi_v\}$
- $A(t) = \int_S (1 + 2tH + t^2K) d\sigma = A + 2Mt + 4\pi t + 4\pi t^2,$
- $V(t) = V + \int_0^t A(s) ds = V + At + Mt^2 + \frac{4\pi}{3} t^3,$

onde A, M e V representam a área, a curvatura média total e o volume de S , respectivamente.

Do difeomorfismo $\mathcal{A} : S \rightarrow S$ definido acima, temos que $\tilde{\Phi} = \mathcal{A} \circ \Phi$ é outra parametrização de S , donde segue-se:

$$\tilde{\Phi}_u \times \tilde{\Phi}_v = (1 - 2H\Lambda + K\Lambda^2)\{\Phi_u \times \Phi_v\}.$$

¹Se α é uma curva fechada, simples, regular e de perímetro L , limitando uma região R de área A , então, $A \leq \frac{L^2}{4\pi}$, sendo que a igualdade só ocorre se α é uma circunferência.

²Observe que as superfícies paralelas S^t 'circunscrevem' S se $t > 0$ ou estão 'inscritas' em S caso $t < 0$.

Assim, para qualquer função contínua $f : S \rightarrow IR$ temos que

$$\int_S f d\sigma = \int_S (f \circ \mathcal{A})(1 - 2H\Lambda + K\Lambda^2) d\sigma. \quad (2)$$

Como S é uma superfície oval e, portanto, difeomorfa a esfera, sua curvatura total é 4π . Se tomarmos $f \equiv 1$ e aplicarmos em (2), teremos que

$$A = A - 2M\Lambda + 4\pi\Lambda \Rightarrow M = 2\pi\Lambda.$$

Portanto, ficou demonstrado que a curvatura média total de uma superfície de largura constante Λ é sempre dada por $2\pi\Lambda$.

Vamos, por fim, estabelecer uma fórmula que relaciona a área A de uma superfície de largura constante com o volume V da região limitada por ela.

Teorema 3.1 (de Blaschke) Se S for uma superfície de largura constante Λ então $V = \frac{1}{2}A\Lambda - \frac{1}{3}\pi\Lambda^3$.

Demonstração: Seja p_0 pertencente a uma região Ω limitada de S . O volume³ de Ω é dado por:

$$V = \frac{1}{3} \int_S \langle N(p), p_0 - p \rangle d\sigma(p).$$

Da equação (2) obtemos:

$$V = \frac{1}{3} \int_S \langle N(\mathcal{A}(p)), p_0 - \mathcal{A}(p) \rangle d\sigma(\mathcal{A}(p)).$$

Observe $M = 2\pi\Lambda$ onde M representa a curvatura média total da superfície S e Λ a sua largura constante.

Uma vez que $N(\mathcal{A}(p)) = -N(p)$ e $\mathcal{A}(p) = p + N(p)$ e pelas fórmulas de Minkowski⁴, temos:

$$\begin{aligned} V &= -V + \frac{1}{3}A\Lambda + \frac{2}{3} \left(\int_S H \langle p_0 - p, \cdot \rangle d\sigma \right) \Lambda - \frac{1}{3} \left(\int_S K \cdot \langle p_0 - p, N \rangle d\sigma \right) \Lambda^2 \\ &= -V + \frac{1}{3}A\Lambda + \frac{2}{3}A\Lambda - \frac{1}{3}M\Lambda^2 \\ &= -V + A\Lambda - \frac{2}{3}\pi\Lambda^3. \end{aligned}$$

4. CONCLUSÕES

Com os resultados obtidos podemos perceber que para as superfícies de largura constante Λ as que possuem maior (respectivamente, menor) área são, também, aquelas que possuem o maior (respectivamente, menor) volume (segundo o teorema de Blaschke).

Já, pelo Corolário 3.1 a área de uma superfície de largura constante é sempre menor ou igual a área de uma esfera, donde o volume máximo para superfícies de largura constante são dados pelas esferas.

³Para detalhes da fórmula veja (Lima, 1989).

⁴Para detalhes veja (Araujo, 1998) pág. 186.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, P.V. **Geometria Diferencial**: Coleção Matemática Universitária. Volume 1. ed. IMPA: Rio de Janeiro, 1998.

EGGLESTON, H.G. **Convexity**: Cambridge University Press, New York, 1958.

EGGLESTON, H.G. **Problems in Euclidean Space, Application of Convexity** Dover Publications, Inc., New York, 1957.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro., 1989.

VOLOCH, J. F. **Curvas de largura constante**, Matemática Universitária, SBM, n. 5, p.69-75, 1987.