

Aspectos Matemáticos do Método dos Elementos de Contorno e Transformada de Fourier Aplicados ao Operador Diferencial de Laplace

Luiz Carlos Facundo Sanches¹, Euclides Mesquita²

1.- Departamento de Matemática, FE, UNESP, 15385-000, Ilha Solteira, SP, e-mail: luiz@mat.feis.unesp.br

2.- Departamento de Mecânica Computacional, FEM, UNICAMP, 13083-970, Campinas, SP, e-mail: euclides@fem.unicamp.br

Resumo- O presente trabalho discute alguns aspectos matemáticos da aplicação da transformada de Fourier como técnica alternativa ao Método dos Elementos de Contorno (MEC) tradicional. O chamado Fourier-MEC generaliza a metodologia padrão e pode ser aplicado em todos os casos onde os coeficientes do operador diferencial parcial de um determinado problema são constantes. A idéia principal consiste em evitar a transformada inversa de Fourier de uma solução fundamental desconhecida, trabalhando diretamente com a transformada de Fourier desta solução. O esquema em questão é baseado no teorema de convolução e de Parseval. Com a aplicação destes dois teoremas e mais algumas considerações sobre os conceitos da teoria de distribuições podem ser determinadas Equações Integrais de Contorno (EIC) equivalentes para o domínio transformado de Fourier. Este novo procedimento leva equações matriciais semelhantes às aquelas obtidas via MEC padrão, ou seja, todas as variáveis, vetores e matrizes do Fourier-MEC apresentam a mesma configuração se comparados com a metodologia tradicional.

Palavras-chave: Elementos de Contorno, Fourier, Equações Integrais, Convolução, Teoria de Distribuição.

Mathematic Aspects of Boundary Element Method and Fourier Transform Applied to Laplace-operator

Abstract- An alternative method recently developed via the Fourier transform generalizes the Boundary Element Methods (BEM) to the so-called Fourier-BEM. This approach is available for all cases as long as the differential operator is linear and has constant coefficients. The scheme is possible for all variants of the BEM. Via convolution and Parseval's theorem, which states the equivalence of energy terms in the original space and in the Fourier space, the idea is to avoid the inverse Fourier transform of the fundamental solution and to work directly with the Fourier transformed fundamental solution. No inverse transform and no fundamental solution in the original space are required. Alternative boundary integral equations (BIE) can be established in the Fourier transformed domain. A Galerkin approach lead to matrices identical to those obtained via the standard BIE and does not require a second integration. The elements and shape functions also can be transformed to the Fourier domain. In this work, the method is presented and then applied to Laplace-operator. A heat equation example will be analyzed to demonstrate the equivalence between traditional BEM and Fourier BEM.

KeyWord: Boundary Element, Fourier, Integral Equations, Convolution, Distribution Theory.

1. INTRODUÇÃO

O MEC é usado na resolução numérica de problemas de contorno (ou fronteira) e de valor inicial. Ao contrário do Método dos Elementos Finitos (MEF), ele requer apenas a discretização do contorno do problema. Como no MEF, as equações integrais básicas do MEC podem ser derivadas dos conhecidos resíduos ponderados. Elas consistem de integrais de convolução ponderadas com distribuições de Dirac (método das colocações) ou por funções polinomiais (método de Galerkin). Na formulação convencional, por exemplo, em Hall (1994), Bonnet (1999), McLean (2000) o método das colocações requer dupla integração enquanto que o método de Galerkin demanda apenas uma única integração. Ao mesmo tempo em que apresenta matrizes simétricas e melhores propriedades de convergência, como mostrado em Frangi & Bonnet (1998). Uma desvantagem marcante está relacionada ao fato de que a aplicação do MEC pelos métodos citados anteriormente demanda o conhecimento explícito da chamada solução fundamental. O conhecimento desta solução é ponto crucial na resolução matemática de problemas de engenharia através da formulação tradicional do MEC. Para ser utilizado de forma eficiente, o mesmo necessita de um estado auxiliar conhecido, de forma a viabilizar a síntese das EICs. Cada tipo de problema ou operador matemático necessita de uma solução auxiliar, ou seja, a solução fundamental. A obtenção destas soluções fundamentais é da ótica das formulações clássicas do MEC uma etapa essencial para o desenvolvimento dos métodos de contorno. Em muitos casos, estas soluções nem sempre são conhecidas e não é possível utilizar o MEC da forma usual.

Para contornar esta desvantagem, aplicamos o chamado Fourier-MEC que foi descrito inicialmente por Duddeck (2002). Em contraste com a metodologia tradicional, todas as variáveis e funções são escritas no espaço de Fourier. As novas matrizes, semelhantes às aquelas obtidas pelo MEC tradicional, são resolvidas diretamente, sem a necessidade de uma transformada inversa. O conceito de distribuições, convolução e teorema de Parseval são necessários para a obtenção das EICs simétricas de Galerkin. O novo algoritmo a ser gerado pelo Fourier-MEC é semelhante ao tradicionalmente conhecido pela literatura e boa parte da estrutura e das operações matemáticas podem ser aproveitadas. Assim, para demonstrar a equivalência entre os métodos, o modelo em questão será utilizado considerando o operador de Laplace, para a análise de problemas simples de Dirichlet da equação de Poisson.

2. O MEC TRADICIONAL

O MEC pode ser formulado através de relações de reciprocidade (ou pesos) que incluem todos os termos de contorno conhecidos e desconhecidos, isto é

$$\int_{\Omega} u \Delta \phi dy = \int_{\Omega} \Delta u \phi dy + \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial \phi}{\partial \nu} - \frac{\partial u}{\partial \nu} \phi \right) d\Gamma \quad (1)$$

Classicamente, para um domínio n – dimensional $\Omega \subset R^n$ com um contorno poliédrico $\partial \Omega$, a identidade de Somigliana pode ser determinada por meio de uma inversão do operador diferencial. Substituindo ϕ pela solução fundamental $U(x-y)$ e aplicando as propriedades de Dirac $\int_{\Omega} u(y) \delta(x-y) dy = u(x)$, encontramos

$$u(x) = \int_{\Omega} f(y) U(x-y) dy + \int_{\partial \Omega} [u(y) T(x-y) - t(y) U(x-y)] d\Gamma_y \quad (2)$$

A transição para uma EIC necessita de um processo limite de $x \rightarrow \partial \Omega$. Após este processo, o lado esquerdo da equação (2) é modificado por um fator κ que é igual a $1/2$ para contornos suaves, então

$$\kappa(x) u(x) = \int_{\Omega} f(y) U(x-y) dy + \int_{\partial \Omega} [u(y) T(x-y) - t(y) U(x-y)] d\Gamma_y \quad (3)$$

As variáveis de contorno são aproximadas pela soma de funções polinomiais η_m^u , η_m^t com coeficientes u_m e t_m

$$u(y) \approx \sum_m^{N^u} u_m \eta_m^u(y), \quad t(y) \approx \sum_m^{N^t} t_m \eta_m^t(y) \quad (4)$$

Estas variáveis representam valores conhecidos e desconhecidos do contorno. Uma ponderação adicional com estas funções leva a versão de Galerkin da equação (3)

$$\int_{\partial \Omega_x} \eta_j(x) \kappa(x) u(x) d\Gamma_x = \int_{\partial \Omega_x} \eta_j(x) \int_{\Omega} f(y) U(x-y) dy d\Gamma_x + \int_{\partial \Omega_x} \eta_j(x) \int_{\partial \Omega_y} [u(y) T(x-y) - t(y) U(x-y)] d\Gamma_y d\Gamma_x \quad (5)$$

O uso das aproximações (4) em (5) resulta em

$$\int_{\partial\Omega_x} \kappa(x) \eta_j u(x) d\Gamma_x = \int_{\partial\Omega_x} \eta_j(x) \int_{\Omega} f(y) U(x-y) dy d\Gamma_x +$$

$$- \sum_m^{N^u} \int_{\partial\Omega_x} \eta_j(x) \int_{\partial\Omega_y} u_m \eta_m^u(y) T(x-y) d\Gamma_y d\Gamma_x +$$

$$+ \sum_m^{N^t} \int_{\partial\Omega_x} \eta_j(x) \int_{\partial\Omega_y} t_m \eta_m^t(y) U(x-y) d\Gamma_y d\Gamma_x$$

(6)

Tradicionalmente o MEC pode ser formulado a partir da equação (6) e requer o conhecimento das soluções fundamentais relacionadas a U e T . Entretanto, uma alternativa a este procedimento será apresentada na próxima seção.

3. O FOURIER-MEC

3.1 Extensão do Domínio Ω para o Espaço R^n

A transformada de Fourier é definida em R^n , portanto torna-se necessário levar a equação (6) do domínio Ω para o espaço R^n . Define-se para isto uma distribuição conhecida como distribuição de Cutoff (Duddeck, 2002)

$$\chi(x) := \begin{cases} 1 & \dots & x \in \Omega \\ \kappa & \dots & x \in \partial\Omega \\ 0 & \dots & x \notin \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

Para contornos suaves, χ pode ser expresso por uma distribuição Heaviside multi-dimensional $H(\psi)$ definida por

$$\chi(x) = H(\psi(x)) \quad x \in R^n \quad (8)$$

ψ define o contorno $\partial\Omega$ como uma hipersuperfície. Domínios com contornos não suaves são definidos por somas e produtos destas distribuições Heaviside. Variáveis de campo, como por exemplo, incógnita u , força de volume f , sobre o domínio Ω , desaparecem fora deste. Isto pode ser descrito por

$$u(x) \rightarrow u_{\Omega} := \chi(x)u(x),$$

$$f(x) \rightarrow f_{\Omega} := \chi(x)f(x)$$

(9)

onde u e f são $C^2(R^n)$. Analogamente a equação (9), necessita-se aplicar a distribuição de Cutoff para as funções de forma. Elas são definidas para um elemento de referência

$$\chi_0(x) := H(x_1)H(1-x_1)\delta(x_2), \quad x \in R^2,$$

$$\chi_0(x) := H(x_1)H(1-x_1)H(x_2)H(1-x_2)\delta(x_3), \quad x \in R^3.$$

(10)

As funções de forma são obtidas pela multiplicação de uma função $C^\infty(R^n)$ $p_0(x)$, por exemplo, polinomial, com estas distribuições de Cutoff

$$\eta_0(x) := \chi_0(x)p_0(x) \quad (11)$$

Portanto, as variáveis conhecidas e desconhecidas sobre o contorno são aproximadas por

$$u(x) \approx \sum_m^{N^u} u_m \eta_m^u(x), \quad t(x) \approx \sum_m^{N^t} t_m \eta_m^t(x),$$

(12)

A EIC de Galerkin (6) pode agora ser redefinida. O fator κ está implicitamente definido por uma representação de distribuição, por exemplo, $\delta(x_1)H(x_1) = 1/2 \delta(x_1) = \kappa\delta(x_1)$, assim

$$\int_{R^n} \eta_j(x) u_{\Omega}(x) d(x) = \int_{R^n} \eta_j(x) \int_{R^n} f_{\Omega}(y) U(x-y) dy dx +$$

$$- \sum_m^{N^u} u_m \int_{R^n} \eta_j(x) \int_{R^n} \eta_m^u(y) T(x-y) dy dx +$$

$$+ \sum_m^{N^t} t_m \int_{R^n} \eta_j(x) \int_{R^n} \eta_m^t(y) U(x-y) dy dx$$

(13)

Fazendo-se uso das abreviações a seguir

$$\langle a(x), b(x) \rangle := \int_{R^n} a(x)b(x) dx$$

$$\langle a(x) * b(x) \rangle := \int_{R^n} a(y)b(x-y) dy \quad (14)$$

Definimos finalmente a EIC de Galerkin no espaço R^n , ou seja,

$$\langle \eta_j, u_{\Omega} \rangle = \langle \eta_j, f_{\Omega} * U \rangle - \sum_m^{N^u} u_m \langle \eta_j, \eta_m^u * T \rangle +$$

$$+ \sum_m^{N^t} t_m \langle \eta_j, \eta_m^t * U \rangle$$

(15)

3.2. Transformada de Fourier da EIC de Galerkin

A transformada de Fourier de dimensão n , $\mathcal{F}(\phi) = \hat{\phi}$ é definida como sendo

$$\hat{\phi}(\hat{x}) = \int_{R^n} \phi(x) e^{-i(x, \hat{x})} dx, \quad \langle x, \hat{x} \rangle = \sum_j^n x_j \hat{x}_j \quad (16)$$

onde $i = \sqrt{-1}$. O símbolo $\hat{}$ caracteriza um objeto transformado e $\mathcal{F} \leftrightarrow$ denota a passagem de uma expressão no estado original para estado transformado. A base do Fourier-MEC são dois teoremas bem conhecidos da transformada de Fourier, o primeiro é o teorema de Parseval que estabelece a invariância do trabalho (ou energia)

$$\int_{R^n} u(x) \phi(x) dx = \frac{1}{2\pi^n} \int_{R^n} \hat{u}(\hat{x}) \hat{\phi}(-\hat{x}) d\hat{x} \quad (17)$$

O segundo é o teorema da convolução,

$$u(x) * \phi(x) \quad \mathcal{F} \leftrightarrow \quad \hat{u}(\hat{x}) \hat{\phi}(\hat{x}) \quad (18)$$

A aplicação destes dois teoremas na equação (15) leva às seguintes equivalências

$$\langle \eta_j, u_\Omega \rangle = \frac{1}{2\pi^n} \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{u}_\Omega(\hat{x}) \rangle \quad (19)$$

$$\langle \eta_j, f_\Omega * U \rangle = \frac{1}{2\pi^n} \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{f}_\Omega(\hat{x}) \hat{U}(\hat{x}) \rangle \quad (20)$$

$$\langle \eta_j, \eta_m^u * T \rangle = \frac{1}{2\pi^n} \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{\eta}_m^u(\hat{x}) \hat{T}(\hat{x}) \rangle \quad (21)$$

$$\langle \eta_j, \eta_m^t * U \rangle = \frac{1}{2\pi^n} \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{\eta}_m^t(\hat{x}) \hat{U}(\hat{x}) \rangle \quad (22)$$

Finalmente, a EIC para o Fourier-MEC é dada por

$$\begin{aligned} \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{u}_\Omega(\hat{x}) \rangle &= \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{f}_\Omega(\hat{x}) \hat{U}(\hat{x}) \rangle + \\ &- \sum_m^{N^u} u_m \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{\eta}_m^u(\hat{x}) \hat{T}(\hat{x}) \rangle + \\ &+ \sum_m^{N^t} t_m \langle \hat{\eta}_j(-\hat{x}), \hat{\eta}_m^t(\hat{x}) \hat{U}(\hat{x}) \rangle \end{aligned} \quad (23)$$

sendo que neste caso é necessário apenas uma única integração sobre R^n e não mais a dupla integração definida em (6).

4. RESULTADOS

Vamos considerar um domínio plano bidimensional $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ que está aquecido por uma fonte estacionária interior f . Por conveniência, a condutividade K do material tem um valor unitário. A temperatura no contorno é considerada nula. Matematicamente, isto leva a um problema de Dirichlet da equação de Poisson:

$$\Delta u(x) = -f(x), \quad x \in \Omega; \quad (24)$$

$$u(x) = u_\Gamma = 0, \quad x \in \Gamma.$$

Devido a sua simplicidade, este caso pode ser considerado um dos melhores para demonstrar a versatilidade do Fourier-MEC. O problema pode ser resolvido, por exemplo, dividindo o contorno em oito elementos lineares, dois de cada lado (Figura 1).

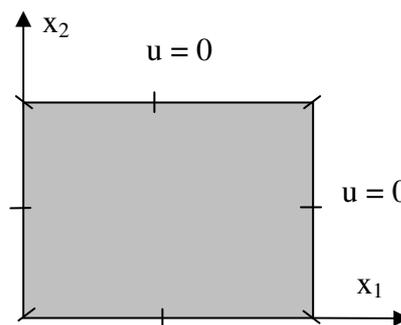


Figura 1. Domínio com oito elementos.

A solução fundamental e sua transformada de Fourier para o Laplaciano Δ são (Duddeck, 2002):

$$U = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad \mathcal{F} \leftrightarrow \quad \hat{U} = -\frac{1}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} \quad (25)$$

Tomamos como exemplo a integração da primeira sub matriz do MEC no espaço original, ou seja

$$\begin{aligned}
H_{II} &= \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} U(x_1 - y_1) dy_1 dx_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{1/2} \int_0^{1/2} \ln \sqrt{(x_1 - y_1)^2} dy_1 dx_1 \\
&= \frac{1}{8\pi} \int_0^{1/2} \left[\ln|x_1 - 1/2|^2 - 2 - 4x_1(\ln|x_1 - 1/2| - \ln|x_1|) \right] dx_1 \\
&= -\frac{1}{16\pi} (2\ln 2 + 3) = -0.0873 \quad (26)
\end{aligned}$$

A correspondente integração no espaço de Fourier leva ao mesmo valor, isto é

$$\begin{aligned}
H_{II} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \hat{\phi}_1(-\hat{x}) \hat{\phi}_1(\hat{x}) \hat{U}(\hat{x}) d\hat{x} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{-i(e^{i\hat{x}_1/2} - 1)}{\hat{x}_1} i(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1)}{\hat{x}_1} \frac{1}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} d\hat{x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^2} \frac{(e^{i\hat{x}_1/2} - 1)(e^{-i\hat{x}_1/2} - 1)}{\hat{x}_1^2} \frac{1}{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2} d\hat{x} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{R^1} \frac{(\cos(\hat{x}_1/2) - 1)}{\hat{x}_1^3} d\hat{x}_1 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{R^1} \frac{(\cos(\hat{x}_1/2) - 1)}{\hat{x}_1^3} d\hat{x}_1 \\
&= -\frac{1}{16\pi} (2\ln 2 + 3) = -0.0873 \quad (27)
\end{aligned}$$

Neste caso, a principal dificuldade do método apresentado se dá no tratamento das integrais singulares cujas características são bastante diferentes daquelas normalmente encontradas no MEC tradicional.

5. CONCLUSÕES

Apresentamos neste trabalho um método alternativo às técnicas de contorno tradicionais. O chamado Fourier-MEC (Duddeck, 2002) amplia a aplicação do MEC e pode ser usado em todos os casos onde os coeficientes do operador diferencial parcial são constantes. A idéia principal é trabalhar diretamente no espaço transformado de Fourier. Equações integrais equivalentes podem ser determinadas neste espaço. Isto leva a matrizes idênticas as obtidas no MEC tradicional. As funções de forma e os elementos de contorno presentes no MEC também podem ser transformados para o espaço de Fourier. Assim, uma implementação numérica semelhante à técnica padrão pode ser desenvolvida. Usamos como exemplo um problema de condução de calor, com base no operador diferencial de Laplace. Alguns resultados preliminares mostram boa

convergência entre os modelos tradicionais e a nova metodologia.

REFERÊNCIAS

BONNET, M. **Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids**, Wiley, New York, 1999.

DUDDECK, F. M. E. **Fourier-BEM: Generalization of Boundary Element Methods by Fourier Transform**. Lecture Notes in Applied Mechanics. Springer, 2002.

FRANGI, A.; BONNET, M. A Galerkin symmetric and direct BIE method for Kirchhoff elastic plates: formulation and implementation, **Int. J. Num. Meth. Engrg**, vol. 41, pp. 337-369, (1998).

HALL, W.S. **The Boundary Element Method**, Kluwer, Dordrecht, 1994.

MCLEAN, W. **Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations**, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.