Synergismus Scyentifica UTFPR

XIII ERMAC

Mini Curso

FRACTAIS: MATEMÁTICA, ARTE E MÚSICA

Teodora Pinheiro Figueroa

Coordenação de Informática- COINF-UTFPR

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Pato Branco, setembro de 2009

Sumário

Introdução aos Fractais

Este minicurso tem como objetivo específico apresentar a real beleza e harmonia da matemática através dos fractais e a sua ligação com a arte e a música. Além disso, o objetivo global é apresentar os fractais aos estudantes dos cursos de ciências exatas e as possíveis aplicações dentro de várias áreas da ciência.

Os fractais surgiram da necessidade de representar certos fenômenos do universo, que não podiam ser representados pela geometria euclidiana.

A etimologia da palavra fractal provem do verbo latino frangere, que significa quebrar, esmigalhar, dilacerar, rachar, reduzir a partículas, de onde se deriva o adjetivo fractus, cujo sentido é o de algo diminuto, fragmentado. Fractais são figuras da geometria não-Euclidiana, cujo padrão pode repetir-se indefinidamente, gerando complexas figuras que preservam em cada uma de suas partes a propriedade de representar o todo, ou seja possuem a propriedade de auto-similaridade.

A idéia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns cientistas entre 1857 e 1913. Em 1872, Karl Weierstrass encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser contínua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferenciável. O gráfico desta função é chamado atualmente de fractal. Em 1904, Helge von Koch, não satisfeito com a definição muito abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica de uma função similar, atualmente conhecida como Koch snowflake (ou floco de neve de Koch), que é o resultado de infinitas adições de triângulos ao perímetro de um triângulo inicial. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro cresce, e fatalmente se aproxima do infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito.

Benoît Mandelbrot, um matemático polonês, foi responsável por criar o termo fractal, e autor de um dos fractais mais conhecidos, o conjunto de Mandelbrot.

Ruy Madsen Barbosa [1] comenta algumas notas históricas sobre Mandelbrot e os fatos que o levaram a decobrir a geometria fractal. Um deles está ligado ao seu trabalho na IBM- Centro de Pesquisas Thomas Watson, onde deparou-se com questões de ruidos nas linhas telefônicas utilizadas em redes de computadores. A aleatoriedade e a irregularidade dos ruidos afastavam os engenheiros da busca de soluções. Mandelbrot resolveu o problema empregando um trabalho antigo de Geoge Cantor, pensando em erros de transmissão como um desses conjuntos de Cantor. O outro fato refere-se as pesquisas em economia. Através de um estudo relativo ao preço de algodão correspondente a oito anos , aos quais acrescentou dados do Departamento de Agricultura, desde o início de 1900, verificou-se que as aberrações estatísticas dos preços, imprevisíveis, apresentavam uma ordem inesperada.

Benoit Mandelbrot chegou à fama e obteve honrarias, passando a ocupar vários cargos acadêmicos.

"A geometria fractal de Mandelbrot reflete uma natureza de irregularidades, de reentrâncias, saliências e depressões, de fragmentação". [1]

Capítulo 1

Fractais

1.1 Definição

Fractais são funções matemáticas, formas ou conjuntos caracterizados pela auto-semelhança, que são posteriormente transformados em imagens, animações ou música.

Segundo Mandelbrot: "Um conjunto é dito Fractal se a dimensão Hausdorff-Besicovitch deste conjunto for maior do que sua dimensão topológica".

1.2 Dimensão de Hausdorff

A literatura fornece diversas abordagens para se estimar a Dimensão fractal de um objeto ou imagem, no entanto a grande maioria delas se baseia na Dimensão de Hausdorff.

Para entender a Dimensão de Hausdorff considere uma linha de comprimento L e outra de comprimento u , de modo que $L > u$. Sobrepondo a linha u sobre a linha L até cobri-la completamente, encontra-se um valor $N = \frac{L}{u}$, que nada mais é do que uma medida da linha. Do mesmo modo que foi feito para a linha, pode-se medir um quadrado de lado L cobrindo-o com pequenos quadrados de lado u , obtendo-se a mesma relação $N = \frac{L^2}{u}$. [2] e [3].

Este processo leva a uma relação do tipo $N = \left(\frac{L}{u}\right)^p$ ou, aplicando-se logaritmo de ambos os lados:

$$D = \frac{ln(N)}{ln\left(\frac{L}{u}\right)}$$

onde D é a Dimensão Fractal de Hausdorff do objeto analisado. Para um objeto uniforme e compacto, D é um inteiro igual à dimensão topológica. Mas, para um fractal, tem-se que D é um número fracionário [2], [4] e [3].

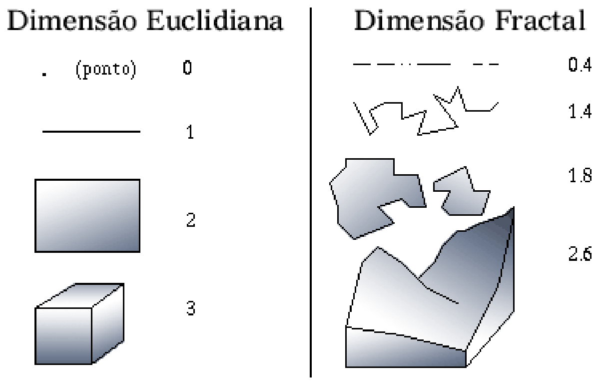


Figura 1.1: Dimensão fractal e dimensão euclidiana

1.3 Características da geometria fractal

Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma aparência consensual. Contudo, existem duas características muito freqüentes nesta geometria:

1. Complexidade Infinita: É uma propriedade dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores.

2. Auto-similaridade: Um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pequeno pedaço é similar ao todo. Visto em diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar.

A Curva de Koch, Figura 1.2 é um exemplo geométrico da construção de um fractal. Um mesmo procedimento é aplicado diversas vezes sobre um objeto simples, gerando uma imagem complexa. Cada pedaço da linha foi dividido em 4 pedaços menores idênticos ao pedaço original, cada um sendo 3 vezes menor que o tamanho original. Assim, usando um novo conceito de dimensão, os matemáticos calcularam a dimensão fractal deste objeto como sendo:

$$D = log(n.copias)/log(escala) = log(4)/log(3) = 1,26185$$

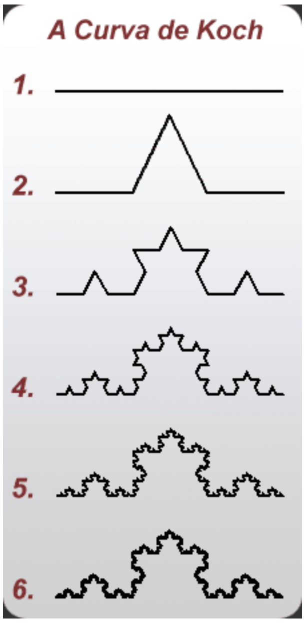


Figura 1.2: Curva de Koch

A Geometria Fractal pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos na natureza, onde não podem ser utilizadas as geometrias tradicionais. Nuvens, montanhas, turbulências, árvores, crescimento de populações, vasos sangüíneos e outras formas irregulares podem ser estudadas e descritas utilizando as propriedades dos fractais.

1.4 Aprendendo a construir famosos fractais

- Floco de Neve e Curva de von Koch

  A curva de Koch foi apresentada pelo matemático sueco Helge von Koch, em 1904, construindo-a a partir de um segmento de reta.

  Construção da Curva de Von Koch

  1. Considerar um segmento de reta;.
  2. Dividir o segmento em 3 segmentos iguais, substituindo-os por 4 congruentes;intermediário, por um triângulo equilátero sem o segmento intermediário (que seria sua base)
  3. Substituir cada um dos segmentos conforme a regra anterior, e assim sucessivamente e iterativamente.

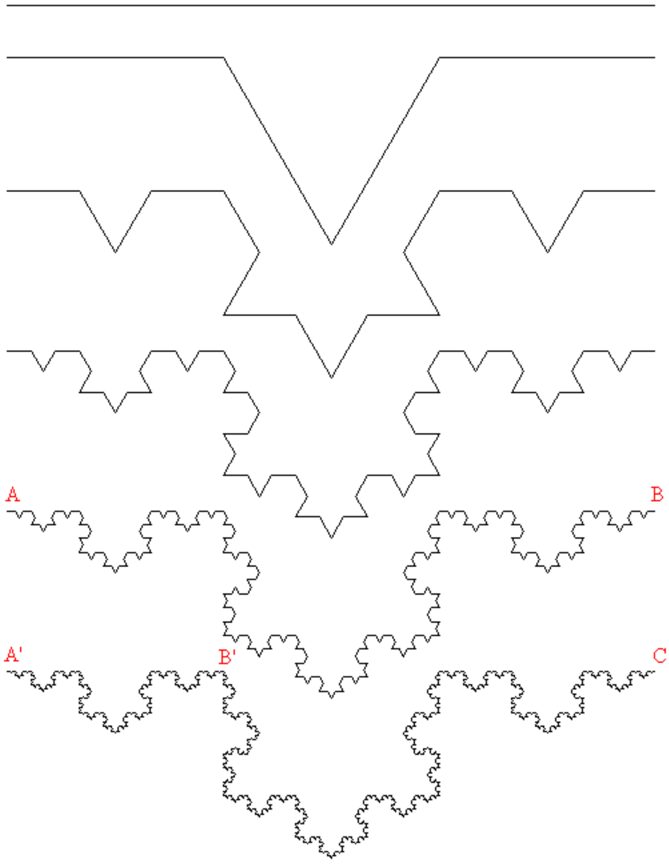


Figura 1.3: Ilha de Von Koch

Esta curva deu origem a um outro fractal, conhecido como floco de neve ou ilha de von Koch (modelo rudimentar da costa de uma ilha e muito semelhante a um floco de neve).

- Curva de Peano

A curva de Peano surgiu em 1890 e é construída por um processo análogo ao da curva de Koch, ou seja, por iteração gráfica.

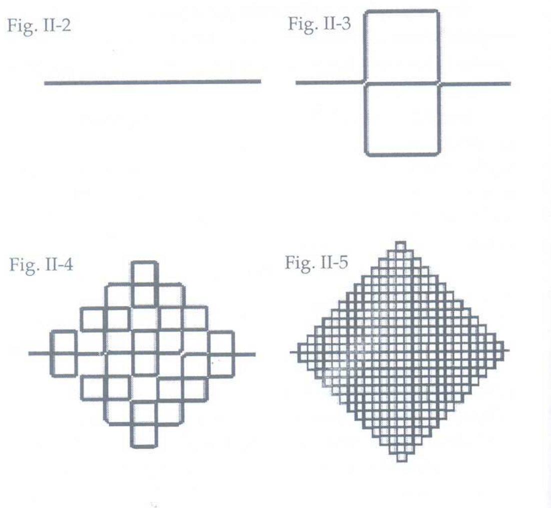
Trata-se de uma curva do tipo "plane filling", isto é, uma curva que passa, pelo menos uma vez, por todos os pontos de um quadrado.

O processo iterativo inicia-se com um segmento de reta.

Construção da Curva de Peano

1. Iniciar com um segmento de reta;
2. Substituir por uma curva de nove segmentos, conforme indicado na Fig. $II-3$, portanto em escala 1/3.

3. Substituir cada segmento anterior pela curva de nove segmentos (Fig. $II - 4$), e assim sucessivamente.



- O triângulo de Sierpinsky

O triângulo de Sierpinsky foi descoberto pelo matemático Waclav Sierpinsky (1882-1969).

É obtido através de um processo iterativo de divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos semelhantes.

Construção do triângulo de Sierpinski

1. Considerar inicialmente um triângulo equilátero;
2. Marcar os segmentos dos pontos médios formando 4 triângulos equiláteros;
3. Eliminar (remover) o central, o que pode ser codificado por exemplo, com cor preta e os outros com uma cor cinza;
4. Repetir em cada um dos triângulos não eliminados as construções 2 e 3;
5. Repetir a operação 4 sucessivamente.

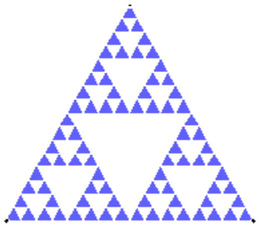


Figura 1.4: Triângulo de Sierpinsky

Pode-se generalizar o triângulo de Sierpinsky para uma terceira dimensão, obtendo-se assim a pirâmide de Sierpinsky.

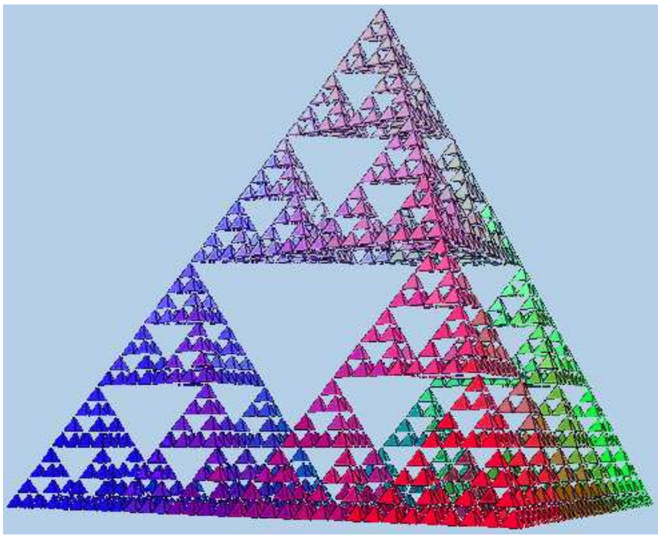


Figura 1.5: Pirâmide de Sierpinsky

Capítulo 2

Fractais e o caos

Alguns autores associam a teoria do caos com sistemas dinâmicos, ou seja, sistemas em movimento.Esta teoria se baseia em demosntrações matemáticas e teorias que tentam descrever processos em movimento, ou seja, sistemas matemáticos que se modificam com o tempo, tais como as bolsas de valores ou a distribuição genética de uma população.

O meteorologista norte-americano Edward Lorenz foi o primeiro a perceber que pequenas variações em uma situação inicial podem causar imensas deturpações a longo prazo. Ele chegou a essa conclusão após testar um programa de computador que simulava o movimento de massas de ar.

Em busca de uma resposta Lorenz digitou um dos números que alimentavam os cálculos da máquina com algumas casas decimais a menos, na expectativa de que o resultado tivesse poucas mudanças. No entanto, a pequena alteração transformou completamente o padrão das massas de ar. Segundo ele seria como se o bater das asas de uma borboleta no Brasil causasse, tempos depois, um tornado no Texas. Fundamentado em seus estudos, ele formulou equações que demonstravam o efeito borboleta. Origina-se assim a Teoria do Caos. Alguns cientistas concluíram também que a mesma imprevisibilidade aparecia em quase tudo, do número de vezes que o olho pisca até a cotação da Bolsa de Valores. Para reforçar essa teoria, na década de 1970 o matemático Benoit Mandelbrot notou que as equações de Lorenz coincidiram com as que ele próprio havia feito quando desenvolveu os fractais (figuras geradas a partir de fórmulas que retratam matematicamente a geometria da natureza, como o relevo do colo, etc.). A junção do experimento de Lorenz com a matemática de Mandelbrot indica que a Teoria do Caos está na essência de tudo, dando forma ao universo.

2.1 Caos nos Números

Pequenas diferenças numéricas no modelo de Lorenz produziram enormes diferenças no resultado final de sua simulação climática. Isto é o que costumamos chamar de dependência sensível das condições iniciais. Podemos ver isto, numericamente, no exemplo a seguir.

Considere a equação:

$$x_{n+1} = k.x_n.(1 - (x_n)^2)$$

onde x_{n+1} é o valor da iteração n, k é um valor constante e x_n é o valor da iteração anterior.

Exemplo

Adote $k = 2,5$ e o valor inicial $x_0 = 0,700000000$. Neste caso n vale 0 e o próximo valor será:

$$x_{0+1} = k.x_0.(1 - (x_0)^2)$$

substituindo o valor de x_0, teremos

$$x_1 = 2,5 * 0,700000000 * (1 - 0,7000000002)$$

Fazendo o cálculo, $x_1 = 0,892500000$. Agora, itere! n vale 1, sendo o próximo valor:

$$x_{1+1} = k.x_1.(1 - (x_1)^2)$$

Substituindo o valor de x_1 temos:

$$x_2 = 2,5 * 0,8925 * (1 - 0,89252)$$

Logo, $x_2 = 0,453933867$

Prosseguindo os cálculos com o auxílio do computador, você pode encontrar as 50 primeiras iterações.

Refaça seus cálculos, porém agora não use 0,700000000 como valor inicial, mas 0,700000001. Na mesma planilha encontre as cinquenta primeiras iterações.

Compare as duas tabelas. Nota-se diferença apenas na última, penúltima ou no máximo na antepenúltima casa decimal. É primordial notar que esta diferença, embora oscilante, aumenta com n, ou seja, a cada iteração a diferença tende a aumentar.

A Figura 2.1 mostra o gráfico dos valores encontrados para os dois valores iniciais versus o valor da iteração.

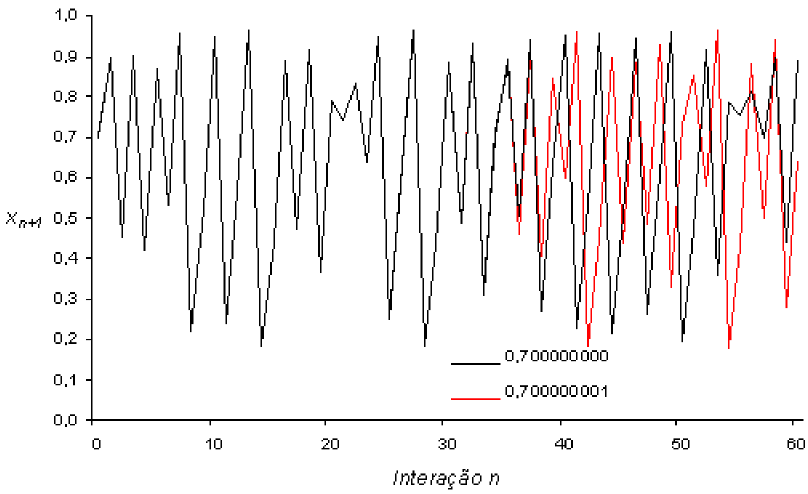


Figura 2.1: Caos nos números

Note que até a iteração 35, aproximadamente, não há diferença notável entre os valores. A partir daí a diferença começa a se tornar evidente, até que os valores se tornam radicalmente diferentes. Esta é a dependência sensível das condições iniciais, efeito borboleta ou caos.

2.2 Aplicações

Ao contrário do que se pensava no passado, sistemas simples nem sempre produzem comportamentos igualmente simples. Fruto desta nova realidade científica, a Teoria do Caos estende suas ramificações nos mais diversos campos do conhecimento científico.

Várias patologias cardíacas nada mais são que a falta de regularidade nas batidas do coração. Taquicardia, batidas ectópicas, ritmos de Wenckebach, várias são as irregularidades, entre as quais a mais preocupante é a fibrilação. Este é um caso interessante: geralmente cada componente individual do coração cumpre sua função normalmente; porém, o coração como um todo não apresenta a coordenação periódica contração-distensão. O órgão se contorce freneticamente e sangue não é bombeado.

Pesquisadores têm estudado a dinâmica do coração, bem como condições de suspensão e indução da fibrilação. Isto tem permitido a criação de equipamentos desfibriladores mais eficientes.

O câncer ainda é uma moléstia a ser vencida. Além de novas terapias, os cientistas estudam novas formas de diagnóstico para que a identificação de tumores seja precisa e cada vez mais prematura. Bem, uma das diferenças entre células sadias e doentes está nos diferentes padrões de crescimento de cada tipo. O exame destes padrões, utilizando recursos de geometria fractal, pode ser a chave para a criação de um sistema de detecção do câncer por computador.

O Grupo de Pesquisa em Visão Cibernética do Instituto de Física de São Carlos (IFSC), da Universidade de São Paulo (USP), estuda as propriedades e as aplicações dos fractais. Este estudo tem permitido aos cientistas a caracterização da complexidade das células nervosas e neurônios. O grupo também aplica os conceitos de dimensão fractal no estudo de partículas de aerossol (solução na qual partículas sólidas ou líquidas estão dispersas em um gás). A complexidade de uma partícula de um aerossol determina suas características aerodinâmicas. Um aerossol constituído por partículas mais lisas apresentará menor viscosidade para escoamento dentro de tubulações. Já um aerossol composto por partículas mais rugosas apresentará fluxo mais errático, permitindo maior possibilidade de choque com as paredes nas quais é injetado. Por exemplo, é interessante que um aerossol usado para transporte de medicamentos via inalação apresente fluxo bastante irregular, aumentando assim a sua efetividade da assimilação, através de choques, pelas paredes dos alvéolos pulmonares. Assim, fica clara a importância de caracterizarmos de modo objetivo e efetivo a rugosidade dessas partículas, o que pode naturalmente ser feito utilizando-se a dimensão fractal.

Na Biologia, a equação não-linear $x_{n+1} = k.x_n.(1 - x_n)$ é utilizada amplamente na des-crição populacional de vários tipos de animais em diferentes habitats.

Capítulo 3

Fractais e Arte

A arte fractal é expressiva, criativa e complexa. O despertar e desenvolver do senso estético pode ser explorado com o tema fractal, apreciando o belo e a regularidade nas suas próprias irregularidades.

A Arte fractal é criada utilizando-se funções matemáticas chamadas fractais e transformando os resultados dos cálculos em imagens, animações, música ou outro tipo de mídia. Imagens fractais são os gráficos resultantes dos cálculos, e animações são seqüências desses gráficos.

Existem quatro categorias relevantes de arte fractal, baseada no tipo de matemática envolvida no processo, onde o nome normalmente aparece associado ao do matemático que a desenvolveu:

1. Aquela onde cada ponto do gráfico pode ser determinado pela aplicação interativa de uma função simples (Exemplos são o conjunto de Mandelbrot, o fractal de Lyapunov e o fractal do navio queimando);

2. Aquela onde existe uma regra de substituição geométrica (Exemplos incluem a poeira de Cantor, o triângulo de Sierpinski, a esponja de Menger e o floco de neve de Koch);

3. Aquela criada com sistemas fractais interativos (Exemplo, as chamas fractais);

4. Aquela gerada por processos com razão aleatória, em vez de processos deterministas (Como as paisagens fractais)

Fractais dos quatro tipos tem sido utilizados como base de arte e animação digital. Começando com detalhes bidimensionais, os fractais encontram aplicações artísticas variadas, como gerar texturas, simulação de vegetação e confecção de paisagens. Podem então evoluir para representações tridimensionais complexas.

Capítulo 4

Música Fractal

A música fractal, tal como os fractais, é o resultado de um processo repetitivo no qual um algoritmo é aplicado múltiplas vezes para elaborar a sua anterior produção. Numa perspectiva mais ampla, todas as formas musicais, tanto a nível micro como a nível macro podem ser elaboradas por este processo.

Nos dias de hoje, os fractais têm fornecido resultados extremamente interessantes, por isso cada vez mais se pesquisa em busca de novas músicas. De fato, a música fractal tem atraido entusiastas e apreciadores.

Uma ligação entre as artes musicais e a natureza foi descoberta em 1975 quando Voss e Clark descobriram que uma grande variedade de música de diferentes períodos históricos e culturais, segue a mesma regra:

$1/f$ (f= frequência), tal como em muitos fenómenos naturais. Isto não só promove uma ligação entre as artes musicais e a natureza como também tem uma grande importância no estabelecimento de princípios, pelos quais se vai reger a beleza e o bom gosto. Este fenómeno $1/f$ existe algures entre aquilo que é rigorosamente previsível e os fenómenos aleatórios - a maioria dos músicos concordaria até que a melhor música não é demasiado previsível, nem demasiado imprevisível.

Assim, uma aplicação visível de que música, natureza e Matemática são três áreas extremamente interligadas, é o fato dos fractais poderem ser convertidos em música, apesar deste ser um processo muito longo e complicado.

Apesar de poder parecer muito estranho, desde há muito tempo que a música e a matemática se encontram associadas. Hoje em dia, os modernos computadores perpetuam essa ligação.

A primeira área em que a Matemática revela a sua influência sobre a música é na escrita das partituras. Depois, o andamento, o ritmo, a duração das notas, tudo isso se relaciona com estudos matemáticos. Também existem muitos instrumentos que têm formas e estruturas relacionadas com vários conceitos matemáticos. Pode ainda dizer-se que a música está relacionada com razões, curvas exponenciais, funções periódicas e ciências da computação.

Deste modo, pode-se concluir, que hoje em dia todos os músicos e matemáticos continuam a desempenhar papéis igualmente importantes na produção e na reprodução musical.

Existem três observações pertinentes que relacionam a música com os fractais:

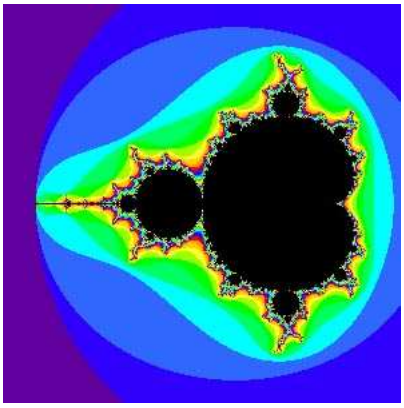
1. Uma das características dos fractais que foram encontrados com um relativo interesse musical é a auto-semelhança.

2. As técnicas analíticas da música clássica de Henrich Schenker refletem as partes de uma forma musical como estruturas auto-semelhantes.

3. Certos procedimentos composicionais que constroem o novo material musical através de transformações sistemáticas de certos materiais podem resultar em estruturas musicais claramente auto-semelhantes.

Existem vários métodos para converter imagens fractais em música. No entanto, este processo só pode ser feito com recurso a algum do mais avançado software e de tecnologia informática.

De uma forma resumida, pode dizer-se que um dos principais fractais e também aquele que é mais utilizado na criação de música fractal é o conjunto de Mandelbrot.



Antes de utilizar um software apropriado para converter imagens fractais em músicas é preciso passar a imagem do fractal para o programa que se deseja utilizar. Assim, este fractal pode ter um pedaço dele transferido para um quadrado no computador denominado de ”pixel”. Geralmente, cada ”pixel”tem cores separadas. Depois cada cor é transferida para uma nota numa escala musical. Usando estas cores como guias e procurando ao longo da imagem linha por linha, obtém-se uma canção.

Outro método é transferir notas baseadas na localização do ”pixel”no visor do computador, na ordem pela qual o fractal foi criado.

Estes são apenas dois dos métodos possíveis para a transformação de uma imagem fractal em música fractal, uma vez que existem outros processos.

Existem alguns músicos profissionais que usam a música fractal, como por exemplo, a ”New World Chaos”, uma banda de música fractal, ou a ”Omarzs Basement”, uma banda de jazz que em 1995 atuou na Austrália com uma música de 4 minutos em que a bateria, o baixo, a guitarra e o saxofone foram tocados por pessoas e o piano sintetizado foi tocado por um computador que tinha um programa fractal. Portanto, quando menos se esperar, a música fractal poderá ainda vir a desempenhar um papel na nossa sociedade igual ou até maior do que o do rock, do pop ou do jazz, entre outros estilos musicais.

Um dos compositores que mais se tem dedicado a este mundo maravilhoso é Phil Thompson, hoje o mais conceituado autor de música fractal.

Referências Bibliográficas

[1] Barbosa, R. M., *Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula*, Editora Autêntica, Belo Horizonte, (2005).

[2] Falconer, K. J., *Fractal Geometry: mathematical and applications*, John Wiley, New York, (1990).

[3] TRICOT, C., *Curves and Fractal Dimension*,Springer-Verlag., Australasia-Japan Joint Workshop, 2002. New York, 1995.

[4] SHROEDER, M., *Fractals, Chaos, Power Laws, Minutes from an infinite Paradise*, W. H. Freeman and Company, New York, 1996.

[5] GLEICK, J., *Caos, A Criaçao De Uma Nova Ciencia* , Editora Campus, 1989.