Fractais como Pontos Fixos de Funções Iteradas

Eunice C. dos Santos [1], **Kelly R. Mazzutti Lübeck** [2]
1.- Bolsista FPTI/ PDTA, Centro de Engenharias e Ciências Exatas (CECE), UNIOESTE, Foz do Iguaçu, PR e-mail: eunicectsantos@gmail.com **2.-** Centro de Engenharias e Ciências Exatas (CECE), UNIOESTE, Foz do Iguaçu, PR e-mail: kellyrobertaml@gmail.com

Resumo- Os conjuntos denominados Fractais por Benoit Mandelbrot por volta da década de 70, ameaçaram a base da matemática da época em que surgiram, pois como poderia, por exemplo, uma linha com certa característica ter dimensão maior do que um ou cobrir uma região plana? (Como é o caso das curvas de Koch e de Peano). Devido à indagações a respeito da estrutura matemática presente em cada fractal e a utilização dos mesmos nas mais variadas áreas, começamos a investigar a estrutura dos objetos em questão para assim propor uma forma de explorá-los através de conteúdos do ensino superior, visando não somente um contato com a teoria fractal mas também uma fixação de conceitos já estudados. Neste artigo, nosso objetivo é mostrar, que determinados fractais podem ser entendidos como pontos fixos de um sistema de funções iteradas para algum espaço métrico munido com uma métrica de Hausdorff.

Palavras-chave: Fractais, sistema de funções iteradas, ensino.

Fractals as Fixed Points of Iterated Functions

Abstract- The Sets called fractals by Benoit Mandelbrot around seventies threated the basis of mathematics in the epoch in which appeared, how could, for example, a line with certain characteristics have dimension larger than a one or cover a flat region? (As is the case of curve Koch's and of Peano). Due to questions regarding mathematics structure present in each fractal and the usefulness of them in several areas, we began to investigate the structure of the objects in question, in order to propose a way to exploit them through the content of higher education aiming not only a contact with the fractal theory but also a fixation of concepts already studied. In this article we aim to show that some fractals can be understood as fixed points of a system of iterated functions for certain metrics spaces equipped with a metric of Hausdorff.

KeyWord: Fractals, system funcion interated, education.

1. INTRODUÇÃO

Entre o final do século XIX e início do século XX, começou a notar-se certos conjuntos bizarros do ponto de vista euclidiano e conjuntos tais que a geometria euclidiana mostrou-se muitas vezes ineficaz nas suas classificações, como o próprio Benoit Mandelbrot, matemático francês que designou o nome Fractais para essas monstruosidades, dizia: "Núvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, um latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta."

Quando vemos um novelo de linha a uma distância grande, vemos apenas um ponto, ente adimensional pela geometria euclidiana, ao nos aproximarmos dele vemos um objeto de dimensão três, mas se nos aproximarmos ainda mais, nos deparamos com um objeto de dimensão equivalente a da reta no plano euclidiano. A linha espichada teria dimensão um, mas envolta de si mesma torna se um ente tridimensional. Essa foi a idéia de Mandelbrot para explicar a questão da dimensão nos fractais.

Os fractais até hoje não possuem uma definição formal, pois até agora não houve uma que abrangesse ou classificasse todos todos os diferentes tipos (e somente) os fractais. Mandelbrot tentou definir como fractais os objetos em que sua dimensão de Hausdorff ou dimensão fractal fosse estritamente maior que a dimensão topológica, porém existe fractais tais como a curva de Peano que "furam" essa definição (essa curva em particular, possui dimensão de Hausdorff e dimensão topológica iguais) o que forçou o reconhecimento de fractais como conjuntos constituídos de três características principais: a dimensão, a complexidade infinita e auto-similaridade.

A teoria fractal está diretamente ligada a dimensão fractal, ou dimensão de Hausdorff. Essa dimensão pode ser calculada observando casos específicos: consideremos um segmento de reta de comprimento l, um quadrado e um cubo de arestas l.

Dividimos o segmento obtendo 4^1 partes iguais, cada uma com comprimento $\frac{1}{4}l$;

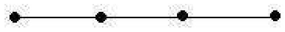

Figura 1: Segmento l.

No quadrado dividimos cada lado em 4 partes iguais obtendo 4^2 partes, cada qual com área igual a $(\frac{1}{4})^2 l^2$;

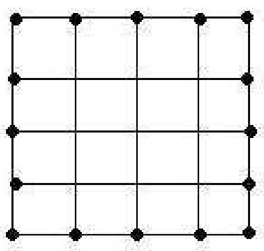

Figura 2: Quadrado de aresta l.

No cubo, repartimos novamente cada aresta em 4 partes iguais obtendo (4) partes iguais de volume igual a $(\frac{1}{4})^3 l^3$;

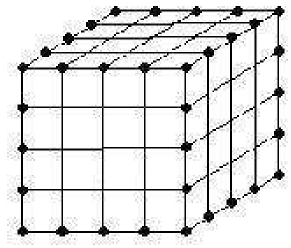

Figura 3: Cubo de aresta l.

Definindo então:
s: o fator de contração (a razão pela qual dividimos cada segmento);
k: a quantidade de subconjuntos originados pelo fator de contração e d: a dimensão.

Para o segmento de dimensão 1 temos: $s = \frac{1}{d}$ e $k = (\frac{1}{s})^1$, para o quadrado de dimensão 2: $s = \frac{1}{4}$ e $k = s = (\frac{1}{s})^2 = 4^2$ e no cubo, de dimensão 3: temos $s = (\frac{1}{4})$, $k = (\frac{1}{s})^3$.

Generalizando, para uma dimensão d teremos $k = \frac{1}{s^d}$, ou seja, $k = (\frac{1}{s})^d$. Aplicando logaritmo em ambos os lados obtemos que a dimensão de Hausdorff para conjuntos auto-similares é dada por $d = \frac{\ln k}{\ln \frac{1}{s}}$, entendendo-se que um conjunto fechado e limitado no plano euclidiano IR^2 é dito auto-similar se pode ser descrito da forma $S = S_1 \bigcup S_2 \bigcup S_3 \bigcup ... \bigcup S_k$ onde $S_1, S_2, S_3, ..., S_k$ são conjuntos não-sobrepostos, cada um dos quais é congruente a S pelo mesmo fator de contração s, $0 < s < 1$. Dessa forma, cada conjunto é uma pequena cópia do conjunto todo.

Para a construção de todo esse conceito e até mesmo para chegarmos a conclusão empírica descrita acima - do cálculo da dimensão fractal - foi necessária uma imersão na teoria fractal e, seguindo os passos de Alves[1], estamos estudando para poder concluir que a definição dessa dimensão, através de provas e conceitos matemáticos, coincide com a estabelecida pela construção feita anteriormente.

Neste trabalho, percorreremos a teoria para concluírmos que um fractal é um ponto fixo de um sistema de funções iteradas em um espaço métrico munido com uma certa métrica de Hausdorff.

[1]Alves, C.M.F.S.J., autora da dissertação de mestrado ***Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino não Universitário*** da Universidade de Lisboa.

2. RESULTADOS

Mas qual é a tal métrica de Hausdorff? Para definirmos tal métrica é preciso definir, sobre um espaço métrico completo[2] (X, d), onde X é um conjunto qualquer e d uma métrica associada a ele, o espaço de todos os subconjuntos compactos[3] de X, que notaremos por $\mathcal{H}(X)$. Note que os elementos dentro desse espaço são todos conjuntos e então para $\mathcal{H}(X)$ definimos a métrica abaixo.

Definição: Sendo (X, d) um espaço métrico (e. m.) completo e dados A e B pertencentes a $\mathcal{H}(X)$, a distância de Hausdorff entre A e B é dada por $h(A, B) = max\{d(A, B, d(B, A)\}$.

Demonstra-se que essa distância assim definida é uma métrica em $\mathcal{H}(X)$. Então, dado um espaço métrico completo (X, d) existe associado a ele um e. m. com métrica de Hausdorff que passará a ser denotado por $(\mathcal{H}(X), h(d))$.

Através dessas e de outras definições, lemas e teoremas (os quais omitiremos suas provas devido à extensão das mesmas) conclui-se que um fractal é um subconjunto compacto e não vazio de um espaço métrico completo. Oservamos, também, que será sobre o espaço $(\mathcal{H}(X), h(d))$ que aplicaremos as funções iteradas, ou seja, sobre os conjuntos compactos.

Definição: Seja $f : X \to X$ uma aplicação de um espaço métrico nele próprio, diz-se que x_f é ponto fixo de f se $f(x_f) = x_f$.

Definição: Uma transformação $f : X \to X$ diz-se uma contração se existe uma constante s, com $0 \leq s < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y)$, $\forall\ x, y \in X$. (s é chamado de fator de contração).

Assumiremos que se f, g são contrações de fator de contração s, t respectivamente então a composta $f \circ g$ é uma contração de fator st.

Agora passamos para os conceitos ligados ao Sistema de Funções Iteradas.

Definição: Seja f uma transformação num espaço métrico. As iteradas sucessivas de f são transformações $f^n : X \to X$ definidas por:

$f^0(x) = x$
$f^1(x) = f(x)$
$\cdots$
$f^{(n+1)}(x) = f(f^n(x))(x), n = 1, 2, ...$

É verdade, também, que se $f : X \to X$ é uma contração de fator s, então f^n é uma contração de fator s^n, e que se f é contração então existe um único ponto fixo x_f. A medida que n cresce, as funções f^n aproxima-se do ponto fixo de f (como função constante). Dessa forma, não importa qual aplicação tomarmos que o número de interações que fizermos, sempre resultará em um único ponto.

Para termos um fractal, vamos trabalhar com várias contrações ao mesmo tempo, lembrando é claro que estas funções iteradas podem ser tomadas sobre o espaço métrico $(\mathcal{H}(X), h(d))$. Para isso, recorremos ao seguinte teorema.

Teorema: Seja (X, d) um e.m., seja $\{\widetilde{w}_n : n = 1, 2, ..., N\}$ um conjunto de contrações em $(\mathcal{H}(X), h(d))$ cada uma delas com seu respectivo fator de contração $s_n, n = 1, 2, ..., N$. Seja $W_N : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ tal que $W_N(B) = \widetilde{w}_1(B) \cup \widetilde{w}_2(B) \cup ... \cup \widetilde{w}_N(B)$, $\forall B \in \mathcal{H}(X)$. Então $W_N(B)$ é uma contração em $\mathcal{H}(X)$ com fator de contração $s = \max\{s^n : n = 1, 2, ...N\}$.

Assim, um Sistema de Funções Iteradas (SFI), nada mais é do que um e.m. no qual se define um conjunto finito de contrações $w_n : X \to X$ com os respectivos fatores de contração $s_n, n = 1, 2, ...N$. Denota-se esse sistema por $\{X; w_n, n = 1, 2, ..., N\}$ e seu fator de contração é $s = \max\{s : n = 1, 2, ..., N\}$.

W, é uma contração no e.m. completo $(\mathcal{H}(X), h(d))$. Diz-se que o ponto fixo de W é o ponto fixo do SFI.

Definição: Seja (X, d) um e.m. completo e $\{X; w_n, n = 1, 2, ..., N\}$ um SIF em X, constituído por N contrações , cada um com o respectivo fator de contração s_n . O ponto fixo deste SIF é chamado de *Fractal*.

3. CONCLUSÕES

A definição de fractal apresentada acima, não é também uma definição exata de fractais, uma vez que inclui conjuntos que não são comumente classificados como fractais como, por exemplo, um intervalo em IR. Essa definição inclui apenas uma classe de fractais, ou seja, aqueles que podem ser

[2] Espaço completo: Seja (X, d) um espaço métrico. Diz -se que X é completo se para cada sequência de Cauchy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de elementos de X, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$.

[3] Espaço compacto: Seja (X, d) um espaço métrico e A um subconjunto de X. Diz -se que A é compacto se toda sequência de elementos de A admite pelo menos uma subsequência com limite em A.

representados como pontos fixos de um SFI.

Este trabalho é uma amostra da pesquisa que estamos realizando onde pretendemos mesclar a teoria fractal aos conteúdos estudados no ensino superior para, assim, fixá-los melhor ou mesmo introduzir conteúdos de nível de pós-graduação, possibilitando um contato, mesmo que breve, com essa teoria que é reconhecida como uma importante ferramenta para descrever/interpretar certos eventos naturais, e até mesmo artificiais.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. F.S. Jordão. **Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas E Aplicações oo Ensino não Universitário**. Universidade de Lisboa. Disponível em:http://www.fractais.net Acesso em: 13 dez. 2008.

BARBOSA, R.M. **Descobrindo a Geometria Fractal para a Sala de Aula**: Coleção Tendências em Educação Matemática. ed. Autêntica: Belo Horizonte. 2005.

LIMA,E.L. **Espaços Métricos**: Projeto Euclides. IMPA: Rio de Janeiro. 2007;