

## Casos de Congruência de Triângulos na Geometria Hiperbólica XIII ERMAC - 2009

Guilherme Baggio Ferla<sup>1</sup>, Carlos Alexandre Ribeiro Martins<sup>2</sup>

1.- Estudante do Curso Técnico em Geomensura, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, guilhermebaggioferla@hotmail.com,

2.- Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, carlos@utfpr.edu.br

**Resumo-** Com o advento da Geometria Hiperbólica inúmeros conceitos foram criados para facilitar o desenvolvimento de postulados e teoremas. A noção de ponto ideal fez surgir, por consequência, os triângulos generalizados que, semelhante aos triângulos da Geometria Euclidiana, também possuem casos de congruência. Algumas peculiaridades desses triângulos também são relatadas, como o caso de congruência Ângulo-Ângulo-Ângulo, que não é válido na Geometria Euclidiana.

**Palavras-chave:** Geometria Hiperbólica, Ponto Ideal, Triângulos Generalizados.

### Congruence of triangles in the Hyperbolic Geometry

**Abstract-** With the advent of the Hyperbolic Geometry many concepts had been created to facility the development of postulates and theorems. The notion of ideal point made to appear, in consequence, the general triangles, that, in same way of the triangles in the Euclidean Geometry, still have congruence cases. Some differences of these triangles also are shown, for example, the congruence case Angle-Angle-Angle, which is not valid in the Euclidean Geometry.

**KeyWord:** Hyperbolic Geometry, Ideal Points, General Triangles.

#### 1. INTRODUÇÃO

Este trabalho possui como objetivo apresentar os casos de congruência de triângulos generalizados. Estas figuras surgiram com o amadurecimento da Geometria Hiperbólica, ou também conhecida Geometria de Lobachevsky.

Inicialmente, os primeiros esforços necessários para explicar o espaço possuíam natureza empírica. Com o avanço geral das civilizações clássicas, os primeiros trabalhos indutivos foram realizados no objetivo de formalizar e estruturar a Geometria, entretanto, não mais aquela percebida como realidade concreta, mas a abstração desta. Decorre daí que a Geometria de Euclides representava a realidade de forma abstraída em conceitos e formas mais gerais, que poderiam ser tratados de maneira lógica.

Entretanto a noção de Geometria como expressão abstraída e geral da realidade concreta não vale diretamente para o surgimento das Geometrias Não Euclidianas, que nasceram das eventuais contradições internas do próprio sistema lógico. Mas, se este representava a realidade concreta em nível abstrato, como poderiam os matemáticos lidar com uma contradição no próprio

nível abstrato?

Algumas modificações de natureza metodológica foram necessárias com o desenvolvimento das novas Geometrias, e alguns confrontos teóricos foram inevitáveis.

**Postulado de Euclides** Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos (Figura 1).

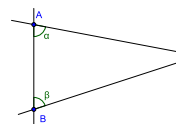


Figura 1: Com  $\alpha + \beta$  menor do que dois ângulos retos, então as retas se encontram.

Desde de a época de Euclides alguns matemáticos acreditaram que o postulado das paralelas teria sido um teorema que Euclides não conseguira provar, e ,portanto, teria o assumido como postulado. Muitos tentaram construir um postulado equivalente ao postulado de paralelas e transformar este num teorema passível de prova. O substituto mais conhecido é creditado a Playfair.

**Postulado de Playfair** Por um ponto fora de uma reta  $r$  pode-se traçar uma, e somente uma, reta paralela à reta  $r$ .

Apesar dos inúmeros trabalhos desenvolvidos sobre o caso das paralelas, algumas contradições foram surgindo. Ao assumir algum postulado que fosse equivalente ao postulado de Euclides com fins de provar este como teorema, os matemáticos não compreendiam que assumiam algo que, em suas premissas, já assumia o postulado das paralelas de Euclides como verdade.

Com a contradição gerada pelo Postulado das Paralelas de Euclides, a noção do problema das paralelas e a própria concepção de Geometria, enquanto representação das *verdades* do mundo real articuladas de maneira lógica em postulados e teoremas, foi reformulada. De fato, por meio de hipóteses que são ou não aceitas (conforme for necessário ao problema), a Geometria passa a tomar a dimensão que lhe for conveniente.

O material apresentado nesse trabalho é resultado das pesquisas realizadas no período de abril de 2008 à abril de 2009 durante o andamento da bolsa de Iniciação Científica Júnior, promovida pela Fundação Araucária.

O conjunto de teoremas e definições foi construído através da compilação de material disponível, que, por vezes, muito raro e escasso, dificultou o andamento das atividades. Além disso, muitas informações se encontravam desagregadas e autores diferiam a forma de trabalhar com triângulos generalizados e pontos ideais.

Primeiramente algumas considerações sobre o surgimento desta Geometria são tomadas com a apresentação do Postulado das Paralelas da Geometria Hiperbólica. Em seguida, a noção de ponto ideal é construída. Ao final, é tomada a construção de triângulos generalizados e dos respectivos casos de congruência.

## 2. RESULTADOS

A negação do Postulado das Paralelas de Euclides gerou inúmeras polêmicas entre os matemáticos. Entretanto, a construção da Geometria Hiperbólica só foi possível com o postulado de Lobachewsky, ou postulado das retas paralelas hiperbólicas, como foi conhecido posteriormente.

**Postulado** Por um ponto  $P$  fora de uma reta  $n$  dada, podem ser traçadas pelo menos duas retas  $m$  e  $m'$  que não encontram a reta  $n$  (Figura 2).

Com o desenvolvimento desse postulado, os matemáticos concluíram que na Geometria Hiperbólica

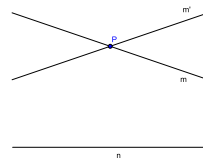


Figura 2: Postulado das paralelas hiperbólicas.

vale o seguinte teorema, que não será demonstrado.

**Teorema** Por um ponto  $P$  fora de uma reta  $n$  dada, podem ser traçadas infinitas retas que não encontram a reta  $n$ .

Com o amadurecimento da Geometria de Lobachewsky alguns autores nos legaram, no desenvolvimento de teoremas, a noção de *ponto ideal*, utilizado para simplificar a apresentação de enunciados.

Para a construção de pontos ideais serão adicionados dois pontos a cada reta no plano, os quais, situar-se-ão, um, antes de todos os seus pontos, e o outro, depois de todos eles. Estes pontos também serão chamados de pontos no infinito ou pontos ômega.

Construímos da seguinte forma: considere uma reta  $r$  que determina dois pontos ideais, cada um num determinado sentido de  $r$ , como ilustra da Figura 3. Tem-se portanto os pontos  $\Omega_-$  e  $\Omega_+$ . A idéia de agregar a um ponto ideal o sentido negativo e ao outro um sentido positivo assemelha-se ao papel dado aos pontos  $-\infty$  e  $+\infty$  da reta dos números reais. A isso designamos a função de generalizar a construção, uma vez que o ponto  $\Omega_-$  vem “antes” de todos os pontos de  $r$  e  $\Omega_+$  vem “depois” de todos os pontos de  $r$ . Entretanto, da mesma forma que os pontos  $-\infty$  e  $+\infty$  não são pontos da reta real,  $\Omega_-$  e  $\Omega_+$  não pontos no plano hiperbólico.

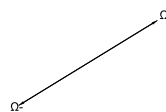


Figura 3: Pontos ideais adicionados às retas.

Esses pontos, então denominados pontos ideais, são generalizadores, justamente pela forma que estão construídos nas retas. Admite-se que são adicionados de tal modo que retas paralelas tenham um ponto ideal em comum na direção do paralelismo, ou seja, o mesmo ponto ideal é adicionado a retas paralelas. Dessa forma, cabe a seguinte definição.

**Definição** Duas retas são paralelas se têm um ponto ideal em comum.

Muitos enunciados a seguir gozam da propriedade generalizadora dos pontos ideais. Na consequência disso, surge a noção de triângulos generalizados, formados por dois pontos ordinários e e um ponto ideal, ou dois pontos ideais e um ordinário, e até mesmo três pontos ideais. Semelhantes aos triângulos da Geometria Plana, os triângulos generalizados também possuem casos de congruência.

Os casos de congruência relatados neste trabalho serão restritos à triângulos com dois pontos ordinários e um ponto ideal. Um triângulo com três pontos ordinários será utilizado para demonstrar um caso especial de congruência na Geometria Hiperbólica.

Para o desenvolvimento dos próximos teoremas, considere os seguintes axiomas.

**Axioma de Pasch** Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos não colineares e seja  $m$  uma reta que não contém nenhum desses pontos; Se  $m$  corta o segmento  $AB$ , então ela também corta o segmento  $AC$  ou o segmento  $CB$ .

**Axioma de Dedekind** Suponha que o conjunto de todos os pontos de uma reta  $r$  está na união dos conjuntos não vazios  $C_1$  e  $C_2$ . Suponha ainda que nenhum ponto de  $C_1$  está entre dois pontos de  $C_2$  e vice-versa. Então existe um único ponto  $O \in r$  de forma que  $O$  esteja entre  $P_1$  e  $P_2$  se, e somente se,  $P_1 \in C_1, P_2 \in C_2$ , e  $O \neq P_1$  e  $O \neq P_2$ .

**Teorema 1** Sejam  $n$  uma reta e  $P$  um ponto não pertencente a  $n$ . Consideremos:

$\Gamma$ : conjunto das retas que passam por  $P$  e não intersectam  $n$ ;

$\Lambda$ : conjunto das retas que passam por  $P$  e intersectam  $n$ ;

Então, existem exatamente duas retas distintas  $m$  e  $m'$  de  $\Gamma$  que determinam no plano hiperbólico dois pares  $R_1$  e  $R_2$  de regiões angulares opostas pelo vértice  $P$  de modo que  $\Gamma = R_1$  e  $\Lambda = R_2$ .

**Demonstração** Baixe uma perpendicular a  $n$  passando por  $P$ , sendo  $Q$  o pé desta perpendicular. Agora trace uma reta perpendicular ao segmento  $PQ$  passando por  $P$ . Segue daí que essa reta é paralela a  $n$ .

Conforme a Figura 4, tome dois pontos,  $E$  e  $F$ , sobre essa reta, de tal modo que  $P$  esteja entre  $E$  e  $F$ . Considere o triângulo  $EFQ$ . Por consequência, todas as retas que passam por  $P$ , com exceção de  $EF$ , intersectam  $EF$ , e, por consequência, cortam o segmento  $EQ$  ou  $FQ$ .

Para fins de estudo, iremos nos restringir apenas a caso das retas que cortam o segmento  $EQ$ . Neste segmento cada ponto representa uma das retas que passa por  $P$ .

Esses pontos podem ser divididos em dois conjuntos:  $\Gamma$  e  $\Lambda$ , sendo o primeiro conjunto representando as retas que não intersectam  $n$  e o segundo conjunto representando as retas que intersectam  $n$ .

Toma-se nota:

- $\Gamma \cap \Lambda = \emptyset$

- $E \in \Gamma$

- $Q \in \Lambda$

Dado um ponto  $A$ , de forma que  $A \in \Lambda$ , então, por consequência,  $QA \subset \Lambda$ . A reta passando por  $P$  e  $A$  intercepta  $n$  em  $A'$ . Dado um triângulo  $PA'Q$ , toda reta que entra no triângulo pelo vértice  $P$  intercepta  $QA'$ .

De forma análoga suponha um ponto  $B \in \Gamma$ , então  $EB \subset \Gamma$ . Segue daí que qualquer reta que passa por  $P$  adentrando o triângulo  $PEB$  corta o segmento  $EB$ .

Pelo Axioma de Dedekind existe um ponto  $S$  que divide os conjuntos  $\Gamma$  e  $\Lambda$ . Suponha uma reta de tal forma que a intersecção desta reta com o segmento  $EQ$  seja um ponto  $S \in \Lambda$ . Mas então esta reta também intersecta  $n$  num ponto  $S'$ . Agora suponha um ponto no  $S_{QS'}$  fora do segmento  $QS'$ . Esta reta intercepta  $EQ$  em um ponto fora de  $QS$ , o que é absurdo, logo  $S \in \Gamma$ .

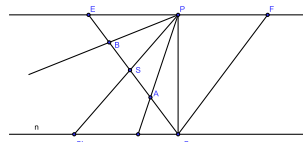


Figura 4: Teorema 1.

Se o tomarmos o caso do segmento  $FQ$  com construção análoga a anterior ter-se-á duas retas passando por  $P$  determinando, no plano hiperbólico, dois pares  $R_1$  e  $R_2$  de regiões angulares opostas pelo vértice  $P$  de modo que  $\Gamma = R_1$  e  $\Lambda = R_2$ , conforme a Figura 5, como se queria provar.

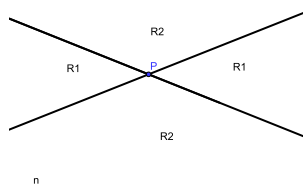


Figura 5: Teorema 1.

**Teorema 2** Se uma reta  $r$  penetra em um triângulo generalizado  $AB\Omega$  por um de seus vértices, então, ela corta o lado oposto a este vértice.

**Demonstração** Seja a reta  $r$  entrando em  $AB\Omega$  pelo vértice  $A$  conforme a Figura 6. Tome uma reta perpendicular  $AQ$  à reta que passa por  $B$  e  $\Omega$  e designe como  $\alpha$  o ângulo  $Q\hat{A}\Omega$ .

No primeiro caso seja  $B\hat{A}\Omega$  menor ou igual a  $\alpha$ , então pela proposição anterior,  $r$  irá cortar o lado  $B\Omega$ .

Tome a Figura 7 como referência. Nesse caso  $B\hat{A}\Omega$  é maior do que  $\alpha$ . Se  $r$  entra em  $AQ\Omega$ , pelo Teorema 1, r

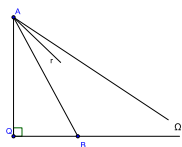


Figura 6: Primeiro caso do Teorema 2.

corta  $B\Omega$ . Se  $r$  entra em  $ABQ$ , pelo Axioma de Pasch,  $r$  intersecta  $BQ$ . Se  $r$  contém  $Q$ , então  $r \cap BQ = Q \neq \emptyset$ .

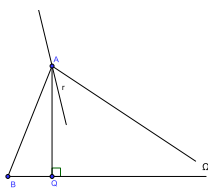


Figura 7: Segundo caso do Teorema 2.

No terceiro caso, suponha uma reta que entra pelo vértice ideal  $\Omega$  e passa por um ponto  $P$  dentro do triângulo generalizado. Pelo paralelismo no ponto  $A$ ,  $S_{AP}$  intercepta  $B\Omega$  num ponto  $Q$ . Por Pasch a reta que entra em  $\Omega$  e passa por  $P$  deve interceptar  $AB$  ou  $BQ$ , mas se  $S_{\Omega P}$  encontrar  $BQ$  então irá coincidir com  $B\Omega$ , logo só poderá interceptar  $AB$ , como segue na Figura 8.

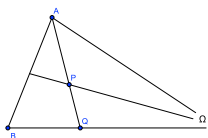


Figura 8: Terceiro caso do Teorema 2.

**Teorema 3** [Ângulo Externo] Um ângulo externo de um triângulo generalizado  $AB\Omega$  é sempre maior do que o ângulo interno que não lhe é adjacente.

**Demonstração** Seja um triângulo generalizado  $AB\Omega$  e um ponto  $C$  na semi-reta  $S_{AB}$  de forma que  $C$  não esteja contido no segmento  $AB$  como mostra a figura abaixo. Sendo  $C\hat{B}\Omega$  um ângulo externo no triângulo, quer provar-se que  $C\hat{B}\Omega > B\hat{A}\Omega$ .

Trace um segmento  $BD$  de forma que  $C\hat{B}D = B\hat{A}\Omega$ . Segue desta construção que a reta que passa por  $B$  e  $D$  não intercepta  $A\Omega$ , e, por consequência, o ponto  $D$  não pode estar dentro do triângulo  $AB\Omega$ , logo só poderá ficar fora do triângulo (Figura 9).

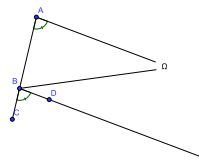


Figura 9: Teorema do Ângulo Externo num triângulo generalizado.

**Teorema 4** [Caso Lado-Ângulo de congruência de triângulos generalizados] Se  $AB = A'B'$ , e  $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ , então,  $AB\Omega = A'B'\Omega'$ .

**Demonstração** Tome a Figura 10 como referência. Suponha que tal congruência não aconteça e  $A\hat{B}\Omega > A'\hat{B}'\Omega'$ . Então, tome uma semi-reta  $S_{BC}$  tal que  $A\hat{B}C > A'\hat{B}'\Omega'$ . Como anteriormente demonstrado, se uma reta penetra num triângulo por vértice então conta o lado oposto, a semi-reta  $S_{BC}$  corta  $A\Omega$  num ponto  $D$ .

Seja  $D'$  um ponto em  $A'\Omega'$  de tal modo que  $A'D' = AD$ . Segue então que  $A'B'D' = ABD$ , mas então  $A'\hat{B}'D' = A\hat{B}D = A'\hat{B}'\Omega'$ , o que é absurdo.

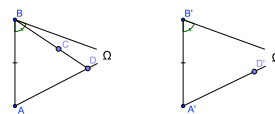


Figura 10: Caso Lado-Ângulo de Congruência.

**Teorema 5** [Caso Ângulo-Ângulo de congruência de triângulos generalizados] Se  $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$  e  $B\hat{A}\Omega = B'\hat{A}'\Omega'$ , então,  $AB\Omega = A'B'\Omega'$ .

**Demonstração** Tome a Figura 11 como referência. Suponha, por absurdo, que  $AB > A'B'$ , então, seja um ponto  $C$  em  $AB$ , tal que  $AC = A'B'$ . Considere a reta  $C\Omega$ . Pelo primeiro caso de congruência  $AC\Omega = A'B'\Omega'$ . Por consequência  $A\hat{C}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ , mas, por hipótese,  $A'\hat{B}'\Omega' = A\hat{B}\Omega$ , então o triângulo  $CB\Omega$  possui um ângulo externo igual a um ângulo interno não adjacente, o que é absurdo.

**Teorema 6** [Caso Triângulo Isósceles de congruência de triângulos generalizados] Todos os triângulos generalizados isósceles com bases de mesma medida são congruentes entre si, ou seja, se  $AB = A'B'$ ,  $A\hat{B}\Omega = B\hat{A}\Omega$  e  $A'\hat{B}'\Omega' = B'\hat{A}'\Omega'$ , então,  $AB\Omega = A'B'\Omega'$ .

**Demonstração** Segue, de imediato, provar que  $A\hat{B}\Omega = A'\hat{B}'\Omega'$ . Suponha, por absurdo, que tal não ocorra, e assumamos, sem perda de generalidade, que

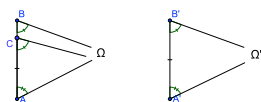


Figura 11: Caso Ângulo-Ângulo de Congruência.

$\widehat{AB\Omega} > \widehat{A'B'\Omega}$ . Construindo os ângulos  $\widehat{ABC}$  e  $\widehat{BAD}$ , de forma que sejam iguais entre si e iguais a  $\widehat{A'B'\Omega}$ , ter-se-á que as semi-retas  $S_{AD}$  e  $S_{BC}$  se intersectam em um ponto  $E$  no interior do triângulo  $AB\Omega$  (Figura 12).

Marque um ponto  $E'$  em  $A'\Omega$  tal que  $A'E' = AE$ . Por consequência,  $ABE = A'B'E'$ . Desta forma,  $\widehat{A'B'E'} = \widehat{ABE}$ , mas  $\widehat{ABE} = \widehat{A'B'\Omega}$ , então  $E'$  deveria pertencer  $B'\Omega$ , o que é absurdo.

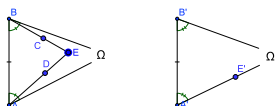


Figura 12: Caso Triângulo Isósceles de Congruência.

O último caso, mais peculiar pelo fato de não existir nos limites da Geometria Euclidiana, é o caso Ângulo-Ângulo-Ângulo. Para a construção desse teoremas tomemos o seguinte corolário.

**Corolário** A soma dos ângulos de todo quadrilátero é menor do que quatro ângulos retos.

**Teorema 7** [Caso de Congruência de Triângulos Generalizados Ângulo-Ângulo-Ângulo] Se os três ângulos de um triângulo são respectivamente iguais aos três ângulos de um outro triângulo, então os triângulos são congruentes.

**Demonstração** Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos de modo que  $\widehat{A} = \widehat{A'}$ ,  $\widehat{B} = \widehat{B'}$  e  $\widehat{C} = \widehat{C'}$ , conforme Figura 13. Suponha, por absurdo, que  $AB > A'B'$  e  $AC > A'C'$ , então seja  $D$  um ponto em  $AB$  e  $E$  um ponto em  $AC$  de forma tal que  $AD = A'B'$  e  $AE = A'C'$ . Por consequência  $ADE = A'B'C'$ . Admitindo, sem perda de generalidade, que  $AD < AB$  e  $AE < AC$ , ter-se-á que  $BDEC$  é um quadrilátero com a soma igual à quatro ângulos retos, o que é absurdo pelo corolário anterior.

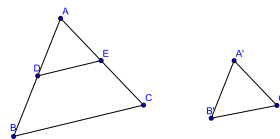


Figura 13: Caso de Congruência Ângulo-Ângulo-Ângulo.

### 3. CONCLUSÕES

O presente artigo traz uma noção básica da construção de triângulos generalizados e uma fração do conjunto de teoremas e definições tomadas ao longo do amadurecimento da Geometria Hiperbólica.

A existência do caso AAA de congruência é uma prova de que a Geometria Hiperbólica apresenta um comportamento distinto das outras, especialmente da Geometria Euclidiana, tomada, por muito tempo, como única expressão abstraída da realidade material perceptível ao homem.

### 4. AGRADECIMENTOS

À Fundação Araucária, que tornou possível este trabalho.

### REFERÊNCIAS

- ARCARI, I., *Um Texto de Geometria Hiperbólica*, Campinas, 2008.  
 BARBOSA, J.L.M., *Geometria Hiperbólica*, IMPA, Rio de Janeiro, 2007  
 CHANDRASEKHAR, T.R., *Non-Euclidean Geometry from Early Times to Beltrami*, New Delhi, 1987.  
 COOLIDGE, J.L., *The Elements of Non-Euclidean Geometry*, Oxford, 1909.  
 DEVITO, A.; FREITAS, A.K.; PEREIRA, K.C., *Geometrias Não-Euclidianas*, Campinas, 2006.  
 FIRER, M., *Geometria Hiperbólica: notas de aula*, UNESP, São Paulo, 2003.  
 LOBACHEVSKI, N.I., *The Theory of Parallels*. Traduzido por George Bruce Halsted, Chicago, 1914.  
 SMOGORSHEVSKI, A.S., *Acerca de la Geometría de Lobachevski*, Moscou: Editora MIR, 2 ed., 1984.