Synergismus scyentifica **UTFPR, Pato Branco, 04 (2) . 2009**
13[o] *Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - XIII ERMAC*

Um Estudo da Aplicação Normal de Gauss

Anderson B. Lopes[1], Fernando Luis dos Reis[2], Orientadora: Dr[a]. Kelly Roberta Mazzutti Lübeck[3]

1.- Centro de Engenharias e Ciências Exatas, CECE, UNIOESTE, Foz do Iguaçu, PR e-mail: ander.tk@gmail.com, **2.-** Centro de Engenharias e Ciências Exatas, CECE, UNIOESTE, Foz do Iguaçu, PR e-mail: fer_nando_reis@hotmail.com **3.-** Centro de Engenharias e Ciências Exatas, CECE, UNIOESTE, Foz do Iguaçu, PR e-mail: kellyrobertaml@gmail.com

Resumo- A aplicação normal de Gauss apresenta uma teoria fundamental no estudo das superfícies regulares, pois através desta aplicação linear podemos obter inúmeras propriedades das superfícies em uma vizinhança de um ponto p qualquer. Resumidamente, com a aplicação de Gauss é possível medir o quão rapidamente uma superfície regular S se afasta de seu plano tangente T_pS, nas proximidades de um ponto p desta superfície. Isto é feito através do cálculo da taxa de variação em p de um campo vetorial normal unitário na vizinhança de p. É interessante lembrarmos que, dada uma parametrização X de uma superfície regular em um ponto $p \in S$, podemos escolher para cada ponto $X(U)$, um vetor unitário $N(q)$, que é uma aplicação diferenciável sobre vizinhanças locais ou sobre toda a superfície, se esta for orientável. Com a derivada de N, dN_p, sera possível merdir o quanto N se afasta de $N(p)$ em uma vizinhança de p. No caso das curvas, esta medida é dada por um número, a curvatura. Além disso, este diferencial é uma aplicação linear auto-adjunta, e servirá para apresentarmos a segunda forma fundamental de S em p.

Palavras-chave: Superfícies Regulares, Aplicação normal de Gauss, Segunda Forma Fundamental.

A Study of the Normal Application of Gauss

Abstract- The normal application of Gauss presents a basic theory in the study of the regular surfaces, therefore through this linear application we can get innumerable properties of the surfaces in a neighborhood of a point p. With the application of Gauss is possible to measure how quickly a regular surface S moves away from its tangent plan T_pS, in the neighborhoods of a point p of this surface. That is made through the calculus of the tax of variation in p of a unitary normal vectorial field in the neighborhood of p. Is interesting to remember that, given a parametrization X of a regular surface in a point $p\, inS$, we can choose for each point $X(U)$, a normal unitary vector $N(q)$, that it is a diferential application on local neighborhoods or all the surface, if this will be thrust. With the derivative of N, dN_p, Will be possible measure how much N moves away from $N(p)$ in a neighborhood of p. In the case of the curves, this measure is given by a number, the bending. Moreover, this differential is a linear application auto-aid, and will help to present the second basic form of S in p.

KeyWord: Regular Surfaces, Normal Aplication of Gauss, Second basic Form.

1. INTRODUÇÃO

Para apresentarmos a Aplicação Normal de Gauss, devemos primeiramente explicitar o conceito de superfície regular em $\mathbb{R}^3$, que é obtida, a grosso modo, tomando-se partes do plano, deformando-as e colando-as entre si, de tal forma que tenha sentido falar em plano tangente nos pontos da figura resultante.

De maneira específica, pode-se dizer que um subconjunto S do $\mathbb{R}^3$ é uma superfície regular se, para cada ponto p em S, existe uma vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ e uma aplicação $X : U \to V \cap S$ de um aberto $U \in \mathbb{R}^2$ tal que esta aplicação seja diferenciavel, homeomorfa e que a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $q \in U$, $X(q) = p$, seja injetiva.

As superfícies regulares possuem uma série de propriedades bastante interessantes e, para se estabelecer determinadas relações entre elas é necessário a existência de planos tangentes, que serão denotado aqui por T_pS. Também é fácil notar que os vetores tangentes $\{\frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\}$ são linearmente independentes (consequência imediata da definição de superfície), gerando o próprio T_pS. Observada a existência do plano tangente, será apresentada agora uma importante estrutura associada a uma superfície. Trata-se da primeira forma fundamental. É interssente lembrar que sempre estarmos associando os pontos de T_pS a uma carta do $\mathbb{R}^2$, o que nos possibilita trabalhar sob as variáveis u e v.

Tendo em vista que o produto interno canônico do $\mathbb{R}^3$ induz em cada plano tangente T_pS de uma superfície regular S um produto interno, para cada dois vetores w_1 e w_2 de T_pS em $\mathbb{R}^3$ dizemos que $< w_1, w_2 >_p$ em T_pS é o produto interno induzido do $\mathbb{R}^3$.

A esse produto interno associamos uma forma quadrática $I_p(w) =< w, w >_p= ||w^2|| \geq 0$, que é chamada a *Primeira Forma Fundamental* da superfície $S \subset \mathbb{R}^3$, em $p \in S$. Comos observamos a primeira forma é meramente a expressão de como a superfície S herda o produto interno natural do R^3 e, com esta definição é possível tratar de vários conceitos referents a uma superfície, como a medida da distância ente dois pontos, a área de uma região da superfície e o ângulo entre dois caminhos (associados aos seus vetores tangentes).

Em T_pS cada vetor v é combinação linear de $\{X_u, X_v\}$, logo a primeira forma fundamental é dada por

$$\begin{aligned} I_p(v) &= < v, v >_p \\ &= < aX_u + bX_v, aX_u + bX_v > \\ &= a^2 < X_u, X_u > +2ab < X_u, X_v > + \\ &\quad b^2 < X_v, X_v > \end{aligned}$$

onde $< X_u, X_u >= E$, $< X_u, X_v >= F$, $< X_v, X_v >= G$.

Feito um rápido estudo da primeira forma fundamental será abordado, agora, o estudo da Aplicação Normal de Gauss que também representa um dos pontos fundamentais no estudo das superfícies regulares, pois através da derivada desta aplicação diferenciável podemos obter inúmeras propriedades das superfícies em uma vizinhança de um ponto p qualquer.

Resumidamente, com a aplicação de Gauss é possível medir o quão rapidamente uma superfície regular S se afasta de seu plano tangente T_pS, nas proximidades de um ponto p desta superfície, donde surge os conceitos de curvatura para superfíície. Isto é feito através do cálculo da taxa de variação em p de um campo vetorial normal unitário na vizinhança de p (derivada da aplicação de Gauss).

É interessante lembrarmos que, dada uma parametrização $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to S$ em $p \in S$, sempre é possível escolher para cada ponto $p = X(q) \in X(U)$ um vetor unitário $N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q), q \in X(U)$, que é a aplicação diferenciavel de gauss $N : X(U) \to \mathbb{R}^3$ sobre vizinhanças locais (ou sobre toda a superfície, se esta for orientável).

Não é difícil provar que a aplicação dN_p é auto-adjunta. Este fato nos permite associar à dN_p uma outra forma quadrática Q em T_pS, dada por $Q(v) = < dN_p(v), v >, v \in T_pS$. Esta forma, com o sinal trocado é chamada de *Segunda Forma Fundamental* de S em p, que pode ter os coeficietes obtidos de maneira analoga aos da primeira forma.

$$\begin{aligned} II_p(u) &= - < u, dN_p v > \\ &= a^2 < X_u, N_u > -ab < X_u, N_v > - \\ &\quad ab < X_v, N_u > -b^2 < X_v, N_v > \\ &= a^2 < N, X_{uu} > +2ab < N, X_{uv} > + \\ &\quad b^2 < N, X_{vv} > \end{aligned}$$

onde

$$< N, X_{uu} >= e \quad < N, X_{uv} >= f \quad < N, X_{vv} >= g$$

A primeira e a segunda forma fundamental definem, por meio de um quociente, a *função curvatura normal* $K_n : T_pS \to \mathbb{R}$ dada por

$$K_n(v) = \frac{II_p(v)}{I_p(v)} = \frac{a^2e + 2abf + b^2g}{a^2E + 2abF + b^2G}$$

onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental e e, f, g são os coeficientes da segunda forma fundamental.

A curvatura normal $K_n : T_pS^* \to \mathbb{R}$, associa a variação de curvas na superfície a um número real , e uma importante observação a ser feita refere-se ao fato de que a curvatura normal independe do comprimento do vetor w, ou seja, $K_n(\lambda w) = K_n(w)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (depende apenas da direção do vetor). Basta observarmos que

$$\begin{aligned} K_n(\lambda v) &= \frac{\lambda[(u')^2e + 2(u')(v')f + (v')^2g]}{\lambda[(u')^2E + 2(u')(v')F + (v')^2G]} \\ &= \frac{II_p(v)}{I_p(v)} \\ &= K_n(v) \end{aligned}$$

Podemos dizer que K_n aplicada sobre $v \in T_pS$, $|v| = 1$, é o comprimento da projeção do vetor α'' sobre $N(p)$ (aqui α representa uma curva coordenada na superfície cuja derivada é $\alpha' = v$), com um sinal dado pela orientação N de S em p.

2. RESULTADOS

Como exemplo vamos calcular a curvatura normal do cilindro cujas equações paramétricas são dadas por $X(u,v) = (r\cos u, r\sin u, v)$. Os coeficientes da primeira e segunda formas fundamentais são dados por

$$\begin{array}{rcl} X_u & = & (-r\sin u, r\cos u, 0) \\ X_v & = & (0,0,1) \\ X_{uu} & = & (-r\cos u, -r\sin u, 0) \\ X_{vv} & = & (0,0,0) \\ X_{uv} & = & (0,0,0) \end{array}$$

Como o vetor normal unitário é dado por $N(q) = \dfrac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q) = (\cos u, \sin u, 0)$, temos

$E =< X_u, X_u >\Rightarrow E = r^2$
$F =< X_u, X_v >\Rightarrow F = 0$
$G =< X_v, X_v >\Rightarrow G = 1$

$e =< N, X_{uu} >\Rightarrow e = -r$
$f =< N, X_{uv} >\Rightarrow f = 0$
$g =< N, X_{vv} >\Rightarrow g = 0$

Portanto,

$$K_n(v) = K - n(aX_u + bX_v) = \frac{-a^2 r}{a^2 r^2 + b^2}.$$

Observe também que $K_n \leq 0$ visto que r é positivo, pois é o raio do cilindro, e os fatores quadráticos a^2 e b^2 são sempre maiores ou iguais a zero.

Quando a função curvatura normal é definida sobre o círculo unitário, isto é, $v \in T_pS$ e $|v| = 1$ ela assume um máximo e um mínimo. O máximo da curvatura normal k_1 e o mínimo da curvatura normal k_2 são chamados *curvaturas principais* da superfíicie S em p. As direções correspondentes são chamadas *direções principais* em p.

Tendo em mãos estas definições podemos definir duas novas curvaturas, à saber a *Curvatura Gaussiana* e a *Curvatura Média*. O determinante de dN_p é chamado de Curvatura Gaussiana K, de S em p e o negativo da metade do traço de dN_p é chamado a Curvatura Média, de S em p. Em termos das curvaturas principais k_1 e k_2, podemos escrever

$$K = k_1 k_2, \qquad H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Para o exemplo anterior podemos encontrar as curvaturas máxima (k_1) e mínima (k_2). Vimos que

$$K_n = \frac{-a^2 r}{a^2 r^2 + b^2} \leq 0$$

donde 0 é o valor máximo desta função, pois se $v = (0,1) = 0 \cdot X_u + 1 \cdot X_v$ temos a igualdade. Assim, $k_1 = 0$.

Observamos também que

$$\frac{a^2 r}{a^2 r^2 + b^2} \leqslant \frac{1}{r} \Rightarrow -\frac{1}{r} \leqslant \frac{-a^2 r}{a^2 r^2 + b^2} = K_n(v)$$

que nos formece seu valor mínimo quando $v = (1,0)$ e, assim obtemos $k_2 = -\dfrac{1}{r}$.

Com estas informações a Curvatura Gaussiana e a Curvatura Média são dadas por

$$K = 0 \text{ e } H = -\frac{1}{2r}$$

Existem ainda muitos aspectos que pretendemos explorar com relação aos tópicos abordados acima, desde a classificação dos pontos de uma superfície (elíptico, hiperbólico e umbílico), as equações de Weingarten e, até mesmo, ao clássico Teorema Egregium de Gauss.

3. CONCLUSÕES

Pode-se observar que na Teoria da Geometria Diferencial das superfícies a Aplicação Normal de Gauss ocupa um lugar significativo e muitas propriedades podem ser obtidas através de um estudo da mesma. Com este estudo podemos estender os conceitos do cálculo até as estruturas locais das superfícies apresentadas, possibilitando a obtenção de um leque de recursos bastante uteis.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, P.V. **Geometria Diferencial**: Coleção Matemática Universitária. Volume 1. ed. IMPA: Rio de Janeiro. 1998.

do CARMO, M. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**: Coleção Textos Universitários. Volume 1. ed. SBM: Rio de Janeiro. 2005.

TENENBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial** Volume 1 ed. UnB: Brasília. 1990.

VALLADARES, R. **Introdução à Geometria Diferencia**: Geometria Diferencial. Volume 1. ed. UFF: Niterói. 1979.