

Problema de Plateau, superfícies de curvatura média constante e algumas aplicações

Ari João Aiolfi

Departamento de Matemática - UFSM, CEP 97105-900, Santa Maria, RS.
e-mail: ari.aiolfi@smail.ufsm.br

Resumo- Tratamos de alguns aspectos relativos a superfícies de curvatura média constante, dentre elas as superfícies mínimas, no que se refere a caracterização de tais superfícies, a problemas de Dirichlet associados a equação das superfícies de curvatura média constante e possíveis aplicações. Citamos também alguns resultados recentes e problemas em aberto envolvendo superfícies de curvatura média constante com bordo prescrito, em especial sobre superfícies duplamente conexas de curvatura média constante com bordo prescrito.

Palavras-chave: Curvatura média constante, Superfícies duplamente conexas, Problema de Plateau, Problema de Dirichlet .

Plateau's problem, constant mean curvature surfaces and some applications

Abstract- We treat of some aspects relative to constant mean curvature surfaces, among them the minimal surfaces, in what refers on the characterization of such surfaces, on the Dirichlet's problems associated to constant mean curvature surface and possible applications. We also cite some recent results and open problems about constant mean curvature surfaces with prescribed boundary, in special on doubly connected surfaces of constant mean curvature with prescribed boundary.

KeyWord: Constant mean curvature, doubly connected surfaces, Plateau's problem, Dirichlet's problem.

1. INTRODUÇÃO

Superfícies de curvatura média constante, em especial as superfícies mínimas, têm sido investigadas há muito tempo pelos matemáticos. O termo "superfície mínima" provém do Cálculo das Variações com o significado de ser a superfície regular de menor área dentre aquelas que estendem um determinado bordo prescrito (consequentemente tal superfície terá curvatura média nula em todos os seus pontos), e adotado posteriormente para todas as superfícies regulares do espaço euclidiano com curvatura média constante igual a zero. Superfícies mínimas podem ser visualizadas intuitivamente como segue: ao mergulharmos um arame fino com o formato de uma curva fechada em uma solução de água e sabão, e retirarmos cuidadosamente tal arame da solução, surgirá em geral uma lâmina fina de sabão em forma de uma superfície regular que tem o tal contorno de arame como bordo. A película de sabão que aparece está em

equilíbrio estável sob a ação da tensão superficial do líquido que forma a película, e como a pressão em cada ponto exercida pela superfície sobre o ambiente age na direção normal à superfície e proporcional a sua curvatura média no ponto, o fato da superfície estar em equilíbrio implica que a pressão (e consequentemente a curvatura média) se anula em todos os seus pontos, donde tal superfície é mínima. Diretamente relacionado ao exposto acima está o clássico problema formulado por Plateau que pode ser formulado como segue: dada uma curva fechada em \mathbb{R}^3 , existe ao menos uma superfície mínima cujo bordo seja tal curva? Outra pergunta que cabe no contexto é: dada uma curva fechada em \mathbb{R}^3 e dado $H > 0$, existe ao menos uma superfície de curvatura média constante H que tem tal curva como bordo? Abordamos tais indagações no contexto específico em que o bordo prescrito possui projeção injetiva sobre um plano, donde podemos atacar o problema via resolução de um problema de Dirichlet para a equação das superfícies

de curvatura média constante. Além disso, tratamos da seguinte questão: dadas duas curvas de Jordan γ_1 e γ_2 em planos paralelos π_1 e π_2 respectivamente, e dado $H \geq 0$, existe uma superfície de curvatura média constante H que tem tais curvas como bordo? Mostraremos que podemos responder positivamente a esta última indagação em alguns contextos específicos e também discutiremos a conjectura exposta em [6] relacionada com a esta questão.

2. RESULTADOS

Dados duas curvas de Jordan γ_1 e γ_2 em planos paralelos π_1 e π_2 de \mathbb{R}^3 respectivamente, e dado $H \geq 0$, sob hipóteses envolvendo a classe de diferenciabilidade e a geometria de γ e γ^* , bem como a distância entre os planos π_1 e π_2 , estabelecemos alguns resultados que garantem a existência e unicidade de superfícies mergulhadas de curvatura média constante H que tem por bordo tais curvas, e que estão contemplados nos trabalhos [1] e [2].

Para o caso de uma curva fechada γ em \mathbb{R}^3 que possui projeção injetiva γ^* sobre um determinado plano π e $H \geq 0$ dado, citamos alguns resultados clássicos, como os contidos em [3], [5] e [7] onde podemos garantir a existência e unicidade de gráficos de curvatura média constante H sobre o domínio limitado Ω de π cujo bordo é γ^* . Observamos que tais problemas, no caso de γ ser de classe $C^{2,\alpha}$, se resumem a solucionar um problema de Dirichlet que pode ser posto como segue: mostrar a existência e unicidade de soluções do sistema

$$\begin{cases} u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \\ Q_H(u) := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) + 2H = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases} \quad (1)$$

onde $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ é tal que o gráfico de φ é γ .

3. CONCLUSÕES

Superfícies de curvatura média constante têm despertado o interesse de matemáticos há gerações e permanecem atraindo adeptos nos dias atuais, dentre eles engenheiros de diversas áreas. Ressaltamos que, em muitos casos, faz-se necessário um bom conhecimento da teoria relacionada a equações diferenciais parciais elípticas para solucionar problemas relacionados a este tópico, e citamos [4] como a principal referência na área.

Referências

- [1] AIOLFI, A.; FUSIGER, P.: Some existence results about radial graphs of constant mean curvature with boundary in parallel planes, **Ann. Glob. Anal. Geom.**, v. 34, p. 415-430, 2008
- [2] AIOLFI, A.; FUSIEGER, P.; RIPOLL, J.: A note on doubly connected surfaces of constant mean curvature with prescribed boundary, **Ann. Glob. Anal. Geom.**, v. 29, p. 145-156, 2006
- [3] ESPÍRITO-SANTO, N.; RIPOLL, J.: Some existence and nonexistence theorems for compact graphs of constant mean curvature with boundary in parallel planes, **J. Geom. Anal.**, vol 11, n. 4, p. 601-617, 2001
- [4] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S.: **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, 2nd ed, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1983.
- [5] RIPOLL, J.: Some existence results and gradient estimates of solutions of the Dirichlet problem for the constant mean curvature equation in convex domains, **J. Diff. Equat.**, v. 181, p. 230-241, 2002
- [6] ROS, A.; ROSENBERG, H.: Constant mean curvature surface in a half-space of \mathbb{R}^3 with boundary in the boundary of the half-space, **J. Diff. Geom.**, v. 44, p. 807-817, 1996
- [7] SERRIN, J.: The Problem of Dirichlet for quasilinear elliptic equations with many independent variables, **Philos. Trans. Roy. Soc. London**, Ser A v. 264, p. 413-496, 1969