Abordagem Analítica da Equação de Dispersão de Poluentes na Atmosfera

Daiane Pedó Socoloski [1], Solange Regina Cromianski [2], Janice Teresinha Reichert [3]

1.- Acadêmica do Curso de Matemática, UNOCHAPECÓ, 89809-000, Chapecó, SC e-mail: daiapedo@unochapeco.edu.br, **2.-** Acadêmica do Curso de Matemática, UNOCHAPECÓ, 89809-000, Chapecó, SC e-mail:sol1301@unochapeco.edu.br, **3.-** Professora da UTFPR, 85501-000, Pato Branco, PR e-mail: janice.reichert@gmail.com

Resumo- Neste trabalho é proposta uma solução analítica para uma versão simplificada da equação de dispersão de poluentes na atmosfera, também conhecida como de convecção e difusão. Isto é feito através do método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais. Após, utilizando o software Maple, apresentamos uma análise gráfica do comportamento da função solução.

Palavras-chave:
Equação de convecção-difusão, método de separação de variáveis.

Analytical Approach of the equation of dispersion of Pollutants in the Atmosphere

Abstract- This paper proposed an analytical solution to a version simplified equation of dispersion of pollutants in the atmosphere, also known as convection and diffusion. This is done by the method of separation of variables for partial differential equations. After, using the Maple software, we present a graphical analysis of the behavior of the function solution.

KeyWord: Convection-diffusion equation, method of separation of variables.

1. INTRODUÇÃO

Devido às grandes concentrações de poluentes na atmosfera impulsionadas pela globalização e pelas tecnologias, surge a nescessidade de se obter dados mais exatos referentes a poluição e seu comportamento.

Alguns modelos matemáticos são utilizados para descrever o comportamento da poluição na atmosfera. Estes modelos podem determinar a quantidade de poluentes existentes em uma determinada região ou verificar como os gases poluidores se dispersam na atmosfera.

Uma das equações matemáticas que é utilizada para descrever a dispersão de poluentes na atmosfera é a equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial (AP)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (BP)}{\partial x^2} \tag{1}$$

onde A e B são funções de x e t.

A equação (1) é de convecção e difusão, onde A representa a velocidade de convecção do meio e $\frac{\partial(BP)}{\partial x}$ o fluxo da densidade $P(x,t)$. Além disto, o termo A representa influências externas que direcionam o movimento das partículas. Se elas não existirem, isto é, se a probabilidade de deslocamento à esquerda e à direita for igual, então obtemos a equação de difusão:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 (BP)}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Se B não depende de x e t temos:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = B\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \tag{3}$$

onde B é chamado coeficiente de difusão. Pela última equação verificamos, também, que o fluxo do meio formado pelas partículas se processa de regiões de maior densidade para regiões de menor densidade.

A solução desta equação é obtida através do método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais em meio infinito, já que, neste caso não temos condições de contorno para o problema. A visualização gráfica da função solução é feita através do software Maple.

2. RESULTADOS

Procuramos uma solução analítica para a equação de difusão,

$$B\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \tag{4}$$

para $-\infty < x < +\infty$, com a condição inicial,

$$P(x,0) = f(x). \tag{5}$$

Resolvemos esta equação pelo método de separação de variáveis para equações diferenciais parciais, considerando,

$$P(x,t) = X(x)Y(t) \tag{6}$$

substituindo esta expressão na equação (4),

$$BX''(x)Y(y) = X(x)Y'(t), \tag{7}$$

supondo,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{B}\frac{Y'(t)}{Y(t)} = -\lambda^2, \lambda \in R, \tag{8}$$

temos duas equações diferenciais ordinárias,

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0, \tag{9}$$

$$Y'(t) - \lambda^2 BY(t) = 0. \tag{10}$$

A equação (10), é uma equação diferencial de primeira ordem linear, cuja solução é escrita como,

$$Y(t) = e^{-B\lambda^2 t}, \tag{11}$$

e a (9) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, a qual possui solução não trivial apenas no caso em que $\lambda \geq 0$, assim,

$$X(x) = a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)sen(\lambda x). \tag{12}$$

Logo a solução do problema pode ser escrita como,

$$P(x,t) = e^{-B\lambda^2 t}[a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)sen(\lambda x)], \tag{13}$$

utilizando o princípio da superposição na forma contínua,

$$P(x,t) = \int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-B\lambda^2 t}[a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)sen(\lambda x)]d\lambda. \tag{14}$$

Para $t = 0$ a solução representa a posição inicial $f(x)$ no meio $-\infty < x < \infty$. A aplicação da condição inicial resulta em,

$$f(x) = \int_{\lambda=0}^{\infty}[a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)sen(\lambda x)]d\lambda. \tag{15}$$

Esta equação é exatamente a fórmula de Fourier para uma função arbitrária $f(x)$, de onde os coeficientes $a(\lambda)$ e $b(\lambda)$ são dados por,

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos(\lambda x')dx' \tag{16}$$

$$b(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')sen(\lambda x')dx', \tag{17}$$

substituindo $a(\lambda)$ e $b(\lambda)$ na equação (15) temos,

$$f(x) = \int_0^{\infty}[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos(\lambda x')\cos(\lambda x)dx' + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')sen(\lambda x')sen(\lambda x)dx'], \tag{18}$$

fazendo uso das relações trigonométricas,

$$f(x) = \int_{\lambda=0}^{\infty}[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos\lambda(x-x')dx']d\lambda. \tag{19}$$

Comparando as equações (15) e (19) os coeficientes estão relacionados por,

$$[a(\lambda)\cos(\lambda x) + b(\lambda)sen(\lambda x)] = = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos\lambda(x-x')dx', \tag{20}$$

de onde, a solução da equação (14) será,

$$P(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-B\lambda^2 t}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\cos\lambda(x-x')dx'd\lambda. \tag{21}$$

Além disto,

$$\int_{\lambda=0}^{\infty} e^{-B\lambda^2 t}\cos\lambda(x-x')d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4Bt}}\exp[-\frac{(x-x')^2}{4Bt}], \tag{22}$$

o que faz com que solução da equação (21) seja,

$$P(x,t) = \frac{1}{[4\pi Bt]^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\exp[-\frac{(x-x')^2}{4Bt}]dx' \tag{23}$$

Como exemplo para esta situação podemos considerar o problema de determinar a distribuição de partículas $P(x,t)$ considerando que a equação geral seja,

$$2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial P}{\partial t} \quad -\infty < x < \infty, \tag{24}$$

com a condição inicial,

$$P(x,0) = \begin{cases} 40, & -3 < x < 3 \\ 0, & x \notin (-3,3) \end{cases} \tag{25}$$

Como vimos na resolução anterior,

$$P(x,t) = \frac{1}{[4\pi Bt]^{\frac{1}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x')\exp[-\frac{(x-x')^2}{4Bt}]dx'. \tag{26}$$

Aplicando a condição de contorno $P(x,0) = 40$, para $-3 < x < 3$ e utilizando que $B = 2$, teremos,

$$P(x,t) = \frac{1}{[8\pi t]^{\frac{1}{2}}}\int_{-3}^{3} 40\exp[-\frac{-(x-x')^2}{8t}]dx'. \tag{27}$$

Fazendo a mudança de variável,

$$u = \frac{x-x'}{\sqrt{8t}}, \tag{28}$$

teremos que,

$$\int 40\exp[-\frac{-(x-x')^2}{8t}]dx' =$$
$$-\sqrt{8t}\int 40\exp(-u^2)du, \quad (29)$$

que pode ser integrada com o auxílio do Maple.

Logo

$$P(x,t) = \frac{1}{(8\pi t)^{\frac{1}{2}}}20\sqrt{8t}erf(\frac{x-x'}{\sqrt{8t}})|_{x'=-3}^{x'=3} \quad (30)$$
$$= 20erf(\frac{x-x'}{\sqrt{8t}})|_{x'=-3}^{x'=3}. \quad (31)$$

De onde,

$$P(x,t) = 20(erf(\frac{x-3}{\sqrt{8t}}) - erf(\frac{x+3}{\sqrt{8t}})), \quad (32)$$

onde $erf(x)$ é definida como,

$$erf = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{(-t)^2}dt. \quad (33)$$

A solução $P(x,t)$ é encontrada no software Maple com o comando,

$$plot3d(20*erf(\frac{(x-3)}{sqrt(8*t)}) - 20*erf(\frac{(x+3)}{sqrt(8*t)}),$$
$$x = -3..3, t = 0..20),$$

resultando no seguinte comportamento gráfico,

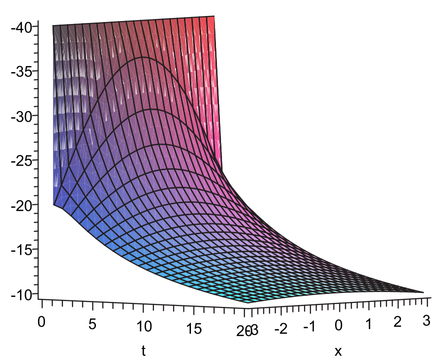

Figura 1:

2. CONCLUSÕES

O método de separação de variáveis se aplica perfeitamente para o caso particular da equação de dispersão de poluentes em meio infinito. Para o problema mais geral, com a dependência convectiva é necessário a utilização de outros métodos de solução, como métodos numéricos para equações diferencias parciais ou ainda métodos analíticos como os conhecidos por LTP_N ou LTS_N. Além disto, o software Maple é muito útil em situações como a apresentada neste problema, tanto para a resolução das integrais que aparecem no problema bem como na visualização gráfica da função solução.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C.; FERREIRA Jr.,W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações**: Editora Harbra, São Paulo, 1988. BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C.

Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno: Editora LTC, Rio de Janeiro, 2006.

INCROPERA, F. P. **Fundamentos de Tranferência de Calor e de Massa**: Editora LTC, Rio de Janeiro, 2008.

ÖZISIK, M.N. **Heat conduction**: John Wiley, New York, 1980.

ROSS, S. **Differential Equations**: 3 nd ed., John Wiley & Sons, New York, 1984.

TADEU, B. F. **Modelagem Matemática do Escoamento e da Dispersão de Poluentes na Microescala Atmosférica**, 1998. Disponível em: *http://150.162.24.1/sinmec/artigos/bocon−tese.pdf*. Acesso em: 10*ago*.2008.

ZILL. D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**: Pioneira Thomson Learning, São Paulo, 2003.