

*Synergismus Scyentifica UTFPR*

*XIII ERMAC*

Mini Curso

TÓPICOS EM TERMOELASTICIDADE LINEAR

**Félix Pedro Quispe Gómez**

Departamento de Matemática - UFSC

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Pato Branco, setembro de 2009

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1 Derivada Fraca . . . . .	3
1.1.1 Noção de convergência em $C_0^\infty(I)$ . . . . .	3
1.1.2 Função Localmente Integrável . . . . .	4
1.1.3 Derivada fraca segundo Sobolev . . . . .	4
1.1.4 Derivada fraca segundo L. Schwartz . . . . .	4
1.2 Notações e terminologias . . . . .	5
<b>2 Termoelasticidade Linear</b>	<b>18</b>
2.1 Equações da Termoelasticidade. . . . .	19
2.2 Equações da Teoria Linear . . . . .	21
2.3 Relações Termodinâmicas . . . . .	23
2.4 Equações do Deslocamento e Temperatura . . . . .	27
<b>3 Sistemas Termoelásticos</b>	<b>29</b>
3.1 Decaimento Exponencial. . . . .	30
3.2 Método das Raízes Características . . . . .	38
3.3 Decaimento da Solução, ainda Dirichlet-Neumann . . . . .	40
3.4 Condição de Fronteira tipo Dirichlet-Dirchlet . . . . .	43
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# Introdução

O estudo das propriedades assintóticas em termoelasticidade inicia no de 1968, precisamente com Constantine Dafermos [4]. Nesse trabalho mostrou a estabilidade da solução do sistema termoelástico para corpos não-homogêneos e anisotrópicos. Antes de Dafermos resultados de existência de soluções fracas já tinham sido mostradas por J.-L. Lions [8].

Anos mais tarde George Dassios e Manoussos G. Grillakis (1984) [5] mostraram para corpos homogêneos e isotrópicos que ocupam todo  $\mathbb{R}^3$ , que o deslocamento se pode descompor em duas partes, uma solenoidal (conserva a energia) e a outra rotacional cuja energia decai com uma taxa polinomial. Isso implica que a energia decai uniforme para zero quando os dados iniciais são rotacionais e a energia se conserva quando os dados iniciais são solenoidais.

O resultado de Dassios e Grillakis foi melhorado por Muñoz Rivera [10] para materiais que ocupam o  $\mathbb{R}^n$ , particularmente para o caso de uma dimensão provou que a energia total decai com uma taxa polinomial. A situação é mais complicada quando se considera domínios limitados ou acotados, por causa das condições de contorno. Para esta situação é importante destacar o trabalho de Stan Chiriță [3] que mostra para corpos não homogêneos e anisotrópicos que a energia calorífica decai em média para zero e portanto, o sistema termoelástico possui as mesmas propriedades assintóticas que a equação da onda, isto é, equipartição da energia, mas não foram encontradas taxas para o decaimento.

Estudando a situação em todo  $\mathbb{R}^n$ , reparamos que não podemos esperar um decaimento da energia total do sistema termoelástico, embora para o caso unidimensional este decaimento é esperado, Muñoz Rivera [11] provou que para corpos unidimensionais limitados a energia decai exponencialmente para zero, o que significa que a dissipação provocada pela diferença de temperaturas é suficiente para que a solução tenha decaimento exponencial o que não acontece no caso de  $\mathbb{R}^n$  que afeta apenas a componente do deslocamento que é um gradiente (parte rotacional).

No trabalho de Liu e Zheng [9] observamos uma melhoria e mostra que o decaimento é dado na pela norma do semigrupo associado ao sistema termoelástico.

Finalmente, esta monografia esta dividida em três capítulos, no primeiro explanamos os preliminares sobre o que utilizaremos no seguintes. No segundo deduzimos as equações do sistema termoelástico em seus mínimos detalhes, concluímos com o terceiro explorando de maneira simples e didática os diversos processos que mostram o comportamento assintótico.

O autor agradece a comissão da organização do XIII ERMAC pela aceitação e a boa disposição para fazer todo o processo de esclarecimento sobre o encaminhamento do material e a logística sobre a produção do material impresso.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

### 1.1 Derivada Fraca

Seja  $I = ]0, L[$  um aberto fixado limitado de  $\mathbb{R}$ . Por *suporte* de uma função real  $\varphi$ , contínua em  $I$  entende-se como o fecho em  $I$  do conjunto de pontos de  $I$  onde  $\varphi$  não é nula. Simbolicamente, tem-se, por definição,

$$\text{supp}(\varphi) = \overline{\{\xi \in I : \varphi(\xi) \neq 0\}}^{\text{fecho em } I}$$

Definimos os seguintes conjuntos,

$$C(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é contínua em } I\}$$

$$C_0(I) = \{f \in C(I) : f \text{ tem suporte compacto em } I\}$$

$$C^1(I) = \{f \in C(I) : f \text{ é diferenciável e } f' \in C(I)\}$$

$$C^m(I) = \{f \in C^{m-1}(I) : f^{(m)} \in C(I)\}$$

$$C^\infty(I) = \bigcap C^m(I) \text{ para } m \in \mathbb{N} \text{ e } C_0^\infty(I) = C_0(I) \cap C^\infty(I)$$

#### 1.1.1 Noção de convergência em $C_0^\infty(I)$

Diz-se que uma sucessão  $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$  converge para  $\varphi$  em  $C_0^\infty$  quando foram satisfeitas as condições:

- i) Todas as  $\varphi_n$  possuem suportes contidos em um compacto fixo  $K$  de  $I$
- ii) A sucessão  $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$  converge para  $\varphi$  uniformemente em  $K$ , juntamente com suas derivadas de todas as ordens.

O espaço vetorial  $C_0^\infty(I)$ , munido da noção de convergência acima definida, será representada por:  $\mathcal{D}(I) = \mathcal{D}(0, L)$ .

### 1.1.2 Função Localmente Integrável

Dada uma função  $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dizemos que é localmente integrável em  $I$ , quando é integrável sobre cada compacto de  $I$ . Assim podemos definir o conjunto  $L^1_{Loc}(I)$  cuja apresentação é:

$$L^1_{Loc}(I) = \{u : I \rightarrow \mathbb{R} : \int_K |u(x)| dx < \infty \quad \forall K \subset I\}$$

O conjunto acima de todas as funções reais e localmente integráveis em  $I$  munido das operações de soma de funções e produto escalar por uma função constitui o espaço vetorial das funções localmente integráveis. No ano de 1936, S. L. Sobolev generalizou o conceito de derivada pontual proposta por Newton (1642-1727) e Leibnitz (1646-1717), para o conceito de derivada fraca considerando o espaço  $L^1_{Loc}(I)$ . Precisamente o citado conceito se deve S. L. Sobolev e foi assim,

### 1.1.3 Derivada fraca segundo Sobolev

Seja  $u \in L^1_{Loc}(I)$ . Então  $u$  é derivável no sentido fraco em  $I$  quando existe um  $v \in L^1_{Loc}$  tal que:

$$\int_I [u(x)\varphi'(x)] dx = - \int_I [v(x)\varphi(x)] dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

a função  $v \in L^1_{Loc}$  é denominada a derivada fraca de  $u$  e  $v = u'$ .

Sem dúvida foi importante esta definição introduzida por Sobolev, entretanto constatou-se um inconveniente: existência de funções de  $L^1_{Loc}(I)$  que não possuem derivada fraca em  $L^1_{Loc}(I)$ . Este inconveniente vem do fato de se exigir que a derivada seja uma função localmente integrável. Uma noção mais geral foi introduzida por L. Schwartz em 1945.

### 1.1.4 Derivada fraca segundo L. Schwartz

Diz-se que  $f \in L^2(I)$  possui derivada fraca se existe  $v \in L^2(I)$  satisfazendo a identidade:

$$\int_I [f(x)\varphi'(x)] dx = - \int_I [v(x)\varphi(x)] dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty$$

onde por notação  $v = f'$ .

## 1.2 Notações e terminologias

Consideremos  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado,  $L^2(I)$  o espaço de Hilbert real das funções quadrado integráveis em  $I$  com produto interno:

$$(u, v) = \int_I u(x)v(x)dx,$$

e a norma associada com o produto interno,

$$|u| = \left[ \int_I |u(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Seja  $m \geq 1$ , inteiro. O espaço de Sobolev  $H^m(I)$  de ordem  $m \geq 1$  sobre  $I$  é definido por indução, iniciando com  $m = 1$ ,

$$H^1(I) = \left\{ u \in L^2(I) : \exists g \in L^2(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = - \int_I g\varphi, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I) \right\}$$

para  $m \geq 2$

$$H^m(I) = \{f \in H^{m-1}(I) : f' \in H^{m-1}(I)\}.$$

O espaço  $H^m(I)$  esta dotado da norma:

$$\|u\|_{H^m(I)}^2 = |u|_{L^2(I)}^2 + \sum_{j=1}^m |D^j u|_{L^2(I)}^2$$

e do produto escalar,

$$(u, v)_{H^m(I)} = (u, v)_{L^2(I)} + \sum_{j=1}^m (D^j u, D^j v)_{L^2(I)} \quad \text{onde } D^j = \partial_j = \partial_{x_j}$$

Por  $H_0^m(I)$  consideremos o fecho das funções testes em  $H^m(I)$ , isto é:

$$H_0^m(I) = \overline{\mathcal{D}(I)}^{H^m(I)}$$

denotaremos ainda o dual de  $H_0^m(I)$  por  $H^{-m}(I) = [H_0^m(I)]'$ .

Identificando o espaço  $L^2(I)$  a seu dual obtemos que:

$$\mathcal{D}(I) \hookrightarrow H_0^m(I) \hookrightarrow L^2(I) \cong (L^2(I))' \hookrightarrow H^{-m}(I) \hookrightarrow \mathcal{D}'(I)$$

sendo que todas as inclusões são contínuas e densas. Ver Brezis [2].

**Teorema 1.1** (Desigualdade de Poincaré). *Suponhamos  $I$  limitado. Então existe uma constante  $C = C(|I|)$  tal que:*

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C|u'|_{L^2(I)} \quad \forall u \in H_0^1(I)$$

**Demonstração.** Para  $u \in H_0^1(I)$ ,  $u(x) = u(x) - u(0) = \int_0^x u'(\xi) d\xi$  então,

$$\begin{aligned} |u(x)| = |u(x) - u(0)| &\leq \int_0^x |u'(\xi)| d\xi = \left\{ \int_0^x d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^x |u'(\xi)|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (L - 0)^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_I |u'(\xi)|^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Elevando ao quadrado e integrando em  $I$  temos,

$$|u|_{L^2(I)} \leq C(|I|) |u'|_{L^2(I)}$$

somando  $|u'|_{L^2(I)}$  e utilizando a normas equivalentes em  $H^1(I)$ ,

$$\|u\|_{H^1(I)} = |u|_{L^2(I)} + |u'|_{L^2(I)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^1(I)}^2 = |u|_{L^2(I)}^2 + |u'|_{L^2(I)}^2$$

Em seguida temos,

$$\begin{aligned} |u|_{L^2(I)} + |u'|_{L^2(I)} &\leq \{C(|I|) + 1\} |u'|_{L^2(I)} \\ \|u\|_{H^1(I)} &\leq C(|I|) |u'|_{L^2(I)} \quad \forall u \in H_0^1(I) \end{aligned}$$

assim sendo, provamos o que desejavamos. □

**Observação 1:** *Na demonstração anterior observa-se que:*

$$|u|_{L^2(I)} \leq C(|I|) |u'|_{L^2(I)}$$

Existe ainda outra versão da Desigualdade de Poincaré,

**Teorema 1.2.** *Se  $\Omega$  é limitado (pelos menos uma direção), se  $w \in H^1(\Omega)$  é tal que  $w|_{\Gamma_o} = 0$  onde  $\Gamma_o \subset \partial\Omega$ , então,*

$$\int_{\Omega} |w|^2 dx \leq c_p \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$$

*Se  $w \in H^1(\Omega)$  e  $\int_{\Omega} w dx = 0$  então:*

$$\int_{\Omega} |w|^2 dx \leq c_p \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx.$$



**Demonstração.** Veja esta demonstração em Adams [1]. □

Mostraremos uma segunda prova da desigualdade de Poincaré,

**Teorema 1.3.** *Dada a função  $w$  que possui média nula, isto é,  $\int_0^L w(y) dy = 0$ , então*

$$\int_0^L |w(x)|^2 dx \leq L \int_0^L |\partial_x w|^2 dx$$

**Demonstração.** Sejam  $x$  e  $y$  dois pontos arbitrários em  $[0, L]$ , então,

$$|w(x) - w(y)| = \left| \int_y^x \partial_x w dx \right| \leq \sqrt{L} \left( \int_0^L \partial_x w dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por outro lado

$$w(x) - w(y) = \int_y^x \partial_x w ds,$$

integrando de 0 até  $L$  temos,

$$\begin{aligned} w(x)L - \int_0^L w(y) dy &= \int_0^L \int_y^x \partial_x w ds dy \\ w(x)L &= \int_0^L \int_y^x \partial_x w ds dy. \end{aligned}$$

Aplicando a propriedade da média nula e tomando valor absoluto na identidade anterior temos

$$\begin{aligned} |w(x)L| &\leq \int_0^L \int_y^x |\partial_x w| ds dy \quad \forall x, y \in ]0, L[ \\ &\leq \int_0^L \int_0^L |\partial_x w| dx dy = L \int_0^L |\partial_x w| dx \\ &\leq L\sqrt{L} \left( \int_0^L |\partial_x w|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Quadrando e logo integrando com relação a  $x$

$$\begin{aligned} \int_0^L |w(x)|^2 L^2 dx &\leq \int_0^L L^2 L \left( \int_0^L |\partial_x w|^2 dx \right) dx \\ \int_0^L |w(x)|^2 dx &\leq L \int_0^L |\partial_x w|^2 dx \end{aligned}$$

e logo obtemos a desigualdade de Poincaré. □

Neste trabalho utilizaremos os espaços  $H_0^1(I)$ ,  $H^1(I)$ ,  $H^2(I)$  e

$$V = H_0^1(I) \cap H^2(I) = \{u \in H^2(I) : u(0) = u(L) = 0\}$$

Não confundir com o espaço:

$$H_0^2(I) = \{u \in H^2 : u(0) = u'(0) = 0; \quad u(L) = u'(L) = 0\}$$

As normas em  $H^1(I)$  e  $H^2(I)$  são:

$$\|u\|_{H^1(I)}^2 = |u|_{L^2(I)}^2 + |u'|_{L^2(I)}^2 \quad \forall \quad u \in H^1(I)$$

$$\|u\|_{H^2(I)}^2 = |u|_{L^2(I)}^2 + |u'|_{L^2(I)}^2 + |u''|_{L^2(I)}^2 \quad \forall \quad u \in H^2(I)$$

A norma em  $V$ . Seja  $V$  é um subespaço de  $H^2(I)$  portanto podemos introduzir o produto interno e a norma de  $H^2(I)$  em  $V$

**Proposição 1.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado. Então a aplicação,  $|\cdot|_v : \rightarrow \mathbb{R}$  onde,*

$$|u|_v = |u''|_{L^2(I)}$$

define em  $V = H_0^1(I) \cap H^2(I)$  uma norma equivalente a norma em  $H^2(I)$ .

**Demonstração.** Provaremos a existência de constantes  $C_1, C_2 > 0$  tais que,

$$C_1 \|u\|_{H^2(I)} \leq |u''|_{L^2(I)} \leq C_2 \|u\|_{H^2(I)} \quad \forall u \in V$$

A segunda desigualdade resulta imediatamente, para demonstrar a primeira, temos que para cada  $w \in L^2(I)$ , o lema de Lax-Milgram garante a existência de uma função  $u \in H_0^1(I)$ , solução de problema de autovalores e autovetores,

$$\begin{aligned} -u'' &= w & \text{em} & \quad I \\ u &= 0 & \text{em} & \quad x = 0, \quad x = L \end{aligned}$$

Há um teorema de regularidade de Agmon-Nirenberg, afirmando a existência de uma função solução  $u \in H^2(I)$ . Ver Lions [8].

Demonstra-se que  $Au = -u''$  é uma aplicação linear contínua e bijetora de  $H_0^1(I) \cap H^2(I)$  em  $L^2(I)$ , logo do teorema do gráfico fechado, conclui-se que,

$$C_1 \|u\|_{H^2(I)} \leq |u''|_{L^2(I)}$$

demonstrando o lema. □

Finalmente o espaço  $V = H_0^1(I) \cap H^2(I)$  com produto escalar

$$(u, v)_V = \int_I u_{xx}(x)v_{xx}(x)dx$$

assim  $V$  dotado com esse produto escalar é um espaço de Hilbert. As seguintes definições serão importantes:

**Imersão Compacta.** Sejam  $V$  e  $H$  espaços de Hilbert tal que  $V \subset H$ . Diremos que a imersão de  $V$  em  $H$  é *compacta* se de toda a sucessão  $\{u_v\} \subset V$ , limitada em  $V$ , podemos extrair uma subsucessão que converge na topologia de  $H$ .

**Notação:**  $V \hookrightarrow H$ .

**Imersão Contínua.** Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados tal que  $E \subset F$ . Diz-se que  $E$  está contido em  $F$  com imersão contínua se existe  $C > 0$  tal que

$$\|u\|_F \leq C\|u\|_E \quad \forall u \in E$$

**Notação:**  $E \hookrightarrow F$ .

A seguir introduziremos alguns resultados de compacidade, cuja demonstração se encontra em Brezis [2].

**Teorema 1.4** (Rellich-Kondrashov). *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado. Então a imersão de  $H^1(I)$  em  $L^2(I)$  é compacta, isto é,*

$$H^1(I) \hookrightarrow L^2(I) \quad \text{imersão compacta.}$$

**Corolário.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado. Então a imersão de  $H_0^1(\Omega)$  em  $L^2(\Omega)$  é compacta, isto é,*

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{imersão compacta.}$$

**Proposição 2.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado. Então a imersão de  $H_0^2(I) \cap H^2(I)$  em  $L^2(I)$  é compacta, isto é,*

$$H_0^2(I) \cap H^2(I) \hookrightarrow L^2(I) \quad \text{imersão compacta.}$$

**Demonstração.** Temos que  $H_0^2(I) \cap H^2(I) \cap H_0^1(I)$  e as normas,  $\|u\|_{H^2(I)}$  e  $|\partial_x^2 u|_{L^2(I)}$  são equivalentes em  $V = H_0^1(I) \cap H^2(I)$ .

$$\|u'\|_{L^2(I)}^2 \leq \|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2 + \|u''\|_{L^2(I)}^2 = \|u\|_{H^2(I)}^2$$

utilizando  $C_1\|u\|_{H^2(I)} \leq |\partial_x^2 u|_{L^2(I)}$  prova-se que  $\|u\|_{H_0^1(I)} \leq C\|u\|_V$ .

Com a notação anterior temos que,

$$H_0^1(I) \cap H^2(I) \hookrightarrow H_0^1(I)$$

Pelo corolário anterior e fazendo a composição com o resultado anterior:

$$H_0^1(I) \cap H^2(I) \hookrightarrow H_0^1(I) \hookrightarrow L^2(I) \quad \text{imersão compacta.}$$

assim se prova a proposição.  $\square$

**Proposição 3.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado. Então a imersão de  $H_0^2(I) \cap H^2(I)$  em  $H_0^1(I)$  é compacta, isto é,*

$$H_0^1(I) \cap H^2(I) \hookrightarrow H_0^1(I) \quad \text{imersão compacta.}$$

**Demonstração.** Seja  $\{u_{xx}^n\}_{n \geq 1} \subset H_0^1(I) \cap H^2(I)$ , limitada. Pela equivalência de normas,  $\{u^n\}_{n \geq 1}$  é limitado em  $L^2(I)$ , pela Proposição 2,  $\{u^n\}_{n \geq 1}$  é limitado em  $H_0^2(I)$ . Utilizando o Corolário do Teorema 1.4, existe uma subsucessão:

$$\{u^v\}_{v \geq 1} \subset \{u^n\}_{n \geq 1} \subset H_0^1(I) \cap H^2(I)$$

tal que  $u \in L^2(I)$  e

$$u^v \rightarrow u \quad \text{em} \quad L^2(I).$$

assim temos que a subsucessão  $\{u^v\}_{v \geq 1}$  é limitada  $L^2(I)$ .

Agora provaremos que  $\{u^v\}_{v \geq 1}$  é de Cauchy em  $H_0^1(I)$ :

$$\begin{aligned} |u^v - u^\mu|_{H_0^1(I)}^2 &\leq |u_{xx}^v - u_{xx}^\mu|_{L^2(I)} |u^v - u^\mu|_{L^2(I)} \\ &\leq C |u^v - u^\mu|_{L^2(I)} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \mu, v \rightarrow \infty \end{aligned}$$

assim se prova a proposição.  $\square$

**Lema 1.5.** *Seja  $E$  o espaço de Banach, reflexivo e  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$  limitada em  $E$ . Então existe uma subsucessão  $\{x_v\}_{v \geq 1} \subset \{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$ , tal que*

$$x_v \rightharpoonup x \quad \text{fraco em } E$$

**Demonstração.** Ver o texto de Brezis [2].  $\square$

### Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg

**Lema 1.6** (Prolongamento). *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado, onde  $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ . Dada qualquer função  $u \in C^m(\tilde{I})$  então existe  $U \in C_0^m(\mathbb{R})$  tal que  $U = u$  em  $I$  e:*

$$|U|_{W^{m,p}(\mathbb{R})} \leq C |u|_{W^{m,p}(I)}$$

onde  $C$  é uma constante que independe de  $u$ .

**Demonstração.** Também pode ser encontrada no texto de Brezis [2].  $\square$

**Lema 1.7.** *Sejam  $q$  e  $r$  números no intervalo  $1 \leq q, r \leq \infty$ ,  $j$  e  $m$  inteiros quaisquer satisfazendo  $0 \leq j < m$ . Se  $u \in C_0^m(\mathbb{R})$ ,*

$$|D^j u|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C |D^m u|_{L^r(\mathbb{R})}^\alpha |u|_{L^q(\mathbb{R})}^{1-\alpha}$$

onde

$$\frac{1}{p} = j + \alpha \left( \frac{1}{r} - m \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q} \quad \forall \quad \alpha \in \left( \frac{j}{m}, 1 \right)$$

**Demonstração.** A demonstração completa pode ser consultada no texto de Brezis [2].

**Lema 1.8.** *O espaço  $C_0^m(I)$  é denso em  $L^q(I)$ ,  $1 \leq q < \infty$ .*

**Demonstração.** A demonstração pode ser consultada em Brezis [2].  $\square$

**Lema 1.9.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado,  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então existe uma sucessão  $\{u_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$ , tal que  $u \in W^{1,p}(I)$ ,*

$$u_n \Big|_I \rightarrow u \quad \text{em} \quad W^{1,p}(I).$$

**Demonstração.** Esta demonstração será encontrada no texto de Brezis [2].  $\square$

A seguir o teorema mais importante desta seção.

**Teorema 1.10.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e limitado,  $u \in W^{m,r}(I) \cap L^q(I)$  e  $1 \leq r, q \leq \infty$ . Para qualquer inteiro  $j$ ,  $0 \leq j < m$  e para qualquer número  $\alpha$  no intervalo  $\frac{j}{m} \leq \alpha \leq 1$ , onde  $\frac{1}{p} = j + \alpha \left( \frac{1}{r} - m \right) + (1 - \alpha) \frac{1}{q}$  então:*

$$|D^j u|_{L^p(I)} \leq C |u|_{W^{m,r}(I)}^\alpha \cdot |u|_{L^q(I)}^{1-\alpha}$$

**Demonstração.** Seja  $u \in C^m(\tilde{I})$ , usando lema de prolongamento, existe  $U \in C_0^m(\mathbb{R})$  tal que  $U = u$  e

$$U_{W^{i,o}(\mathbb{R})} \leq C |u|_{W^{i,s}(I)}, \quad 0 \leq i \leq m, \quad 1 \leq s \leq \infty.$$

Utilizando o Lema 1.7 para  $U$ :

$$\begin{aligned} |D^j u|_{L^p(I)} &\leq C |D^m u|_{W^{m,r}(I)}^\alpha \cdot |u|_{L^q(I)}^{1-\alpha} \\ C |D^m u|_{L^r(I)}^\alpha |u|_{L^q(I)}^{1-\alpha} &\leq C |u|_{W^{m,r}(I)}^\alpha |u|_{L^q(I)}^{1-\alpha} \end{aligned}$$

temos:

$$|D^j u|_{L^p(I)} \leq C |D^m u|_{W^{m,r}(I)}^\alpha |u|_{L^q(I)}^{1-\alpha} \quad \forall u \in C^m(\tilde{I})$$

Suponhamos que  $u \in W^{m,r} \cap L^q(I)$  pelo Lema 1.8 e Lema 1.9 existe uma sequência denotada por  $\{u_j\}_{j \geq 1} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$  tal que

$$u_j|_I \longrightarrow u \quad \text{forte em } W^{m,r}(I)$$

em particular  $\{u_j\}_{j \geq 1} \cap C_0^\infty(\tilde{I})$  onde

$$u_j \longrightarrow u \quad \text{em } L^q(I)$$

Aplicando à  $u_i - u_h$ , onde  $h > i$  temos o seguinte resultado:

$$|D^j u_i - D^j u_h|_{L^p(I)} \leq C |u_i - u_h|_{W^{m,r}(I)}^\alpha |u_i - u_h|_{L^q(I)}^{1-\alpha}$$

como,

$$|u_i - u|_{W^{m,r}(I)} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad |u_i - u|_{L^q(I)} \rightarrow 0$$

então,  $|D^j u_i - D^j u_h|_{L^p(I)} \leq \varepsilon_i \rightarrow 0$ , quando  $i \rightarrow \infty$ , sempre que  $i, h > N$ .

Então  $\{D^j u_i\}_{i \geq 1}$  é uma sucessão de Cauchy em  $L^p(I)$ , existe  $D^j u \in L^p(I)$  tal que,

$$D_i^j \rightarrow D^j u \quad \text{forte em } L^p(I)$$

isto implica a existência de uma subsucessão,

$$D^j u_v \rightarrow D^j u(x) \quad \text{q. s. em } I, \text{ quando } v \rightarrow \infty$$

Utilizando o lema de Fatou,

$$\int_I |D^j u_i(x) - D^j u_h(x)|^p dx \leq \varepsilon_i$$

temos,

$$\int_I |D^j u_i(x) - D^j u(x)|^p dx \leq \liminf \int_I |D^j u_i(x) - D^j u_h(x)|^p dx \leq \varepsilon_i$$

quando  $h \rightarrow \infty$ , com  $i$  fixo.

Segue-se que:

$$\int_I |D^j u_i(x)|^p dx \rightarrow \int_I |D^j u(x)|^p dx \quad \text{quando } i \rightarrow \infty$$

Escrevendo o Lema 1.7 para  $u_i$  temos:

$$|D^j u_i|_{L^p(I)} \leq C |u_i|_{W^{m,r}(I)}^\alpha |u_i|_{L^q(I)}^{1-\alpha}$$

e das convergências fortes segue o resultado.  $\square$

**Notação.** Denota-se o espaço,  $\mathcal{H} = H_0^1(I) \times L^2(I) \times L^2(I)$  munido da seguinte norma:

$$\|\widehat{V}\|_{\mathcal{H}}^2 = \int_0^L |\partial_x u(x)|^2 dx + \int_0^L |v(x)|^2 dx + \int_0^L |\theta(x)|^2 dx$$

onde  $\widehat{V} = (u, v, \theta)^T$ . Com  $A$  denotamos o operador de  $L^2(I)$ , definido por,

$$Aw = -\partial_x^2 w; \quad \text{com domínio} \quad D(A) = H_0^1(I) \cap H^2(I) = V$$

onde  $I = ]0, L[$  e  $A$  é um operador autoadjunto e definido positivo em  $L^2(\Omega)$ . Denotamos por  $B$ , operador definido por,

$$Bw = \partial_x w, \quad \text{com domínio} \quad D(B) = H_0^1(I)$$

e outro operador  $\mathcal{U}: D(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ , onde

$$\mathcal{U} = - \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ A & 0 & \alpha B \\ 0 & \beta B & A \end{bmatrix}$$

com  $D(\mathcal{U}) = V \times H_0^1(I) \times V = E$ .

Definimos o operador,

$$\mathcal{B} = -(\alpha - \beta)^2 I + \mathcal{U}, \quad \text{com} \quad D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{U})$$

onde  $I$  denota o operador identidade em  $\mathcal{H}$ .

Além disso  $\mathcal{B}$  é um operador dissipativo, isto é,  $(\mathcal{B}\widehat{V}, \widehat{V}) \leq 0$  e também cumpre-se,

$$\left( (I - \mathcal{B})\widehat{V}, \widehat{V} \right) \geq \|\widehat{V}\|_{\mathcal{H}}^2$$

Com efeito para,  $\widehat{V} = (u, v, \theta)^T$  e utilizando desigualdade de Holder temos:

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}\widehat{V}, \widehat{V}) &= (\alpha - \beta) \int_0^L v(x)\theta_x(x) dx - \int_0^L \theta_x^2(x) dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 \int_0^L v^2(x) dx - \frac{1}{2} \int_0^L \theta_x^2(x) dx \\ &\leq \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 \|\widehat{V}\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \theta_x^2(x) dx \end{aligned}$$

isto implica,

$$(\mathcal{B}\widehat{V}, \widehat{V}) \leq -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 \|\widehat{V}\|_{\mathcal{H}}^2 - \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x \theta(x)|^2 dx$$

daqui prova-se nossa afirmação.  $\square$

Utilizamos as vezes a notação de derivada parciais da seguinte forma. Seja  $\theta_0$  uma função, sua derivada com respeito a  $x$  é  $\partial_x \theta_0$ , a segunda derivada é  $\partial_x^2 \theta_0$ , etc. A seguir desejamos mostrar que  $\text{Im}[(I - \mathcal{B})] = \mathcal{H}$  e será mostrado no seguinte Lema.

**Lema 1.11.** *Seja  $(f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{H}$ . Então existe  $\widehat{V} = (u, v, \theta) \in E = D(\mathcal{B})$  satisfazendo,*

$$\begin{aligned}\mu u - v &= f_1 \\ \mu v - \partial_x^2 u + \alpha \partial_x \theta &= f_2 \\ \mu \theta - \partial_x^2 \theta + \beta \partial_x v &= f_3\end{aligned}$$

onde  $\mu = 1 + (\alpha - \beta)^2$ .

**Demonstração.** Utilizamos o método de aproximação de Galerkin. Sejam  $w_1, w_2, \dots, w_m$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  os primeiros  $m$  autovetores e autovalores, respectivamente, do operador  $A$ . Seja  $V_m = [w_1, w_2, \dots, w_m]$  subespaço de dimensão finita gerado pelos  $m$  primeiros autovetores, ponhamos  $\mathcal{V}_m = V_m \times V_m \times V_m$ . Então o problema aproximado é dado por,

$$([I - \mathcal{B}]U^m, W_j)_{\mathcal{H}} = (F, W_j)_{\mathcal{H}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 3m \quad (1.1)$$

onde

$$U^m = (u^m, v^m, \theta^m)^T; \quad F = (f_1, f_2, f_3)^T; \quad U^m(x) = \sum_{j=1}^{3m} c_{j,m} W_j(x)$$

$\{W_i; i = 1, 2, \dots, 3m\}$  é uma base de  $\mathcal{V}_m = V_m \times V_m \times V_m$ .

Pelo

$$(\beta \widehat{V}, \widehat{V}) \leq -\frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 |\widehat{V}|^2 - \frac{1}{2} \int_0^L \theta_x^2(x) dx \quad (1.2)$$

temos que a matriz

$$(( [I - \mathcal{B}] W_i, W_j )_{\mathcal{H}})_{3m \times 3m}$$

é definida positiva e assim (1.1) tem uma única solução. Multiplicando (1.1) por  $c_{j,m}$  e somando em  $j = 1$  até  $j = m$  temos que:

$$([I - \mathcal{B}]U^m, U^m)_{\mathcal{H}} = (F, U^m)_{\mathcal{H}}$$

De (1.2) e anterior identidade existe uma constante  $C > 0$  tal que:



$$\|U^m\|_{\mathcal{H}} \leq C\|F\|_{\mathcal{H}} \quad (1.3)$$

$$\int_0^L |\theta_x^m(x)|^2 dx \leq C\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \quad (1.4)$$

denotando,

$$u^m(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_{im} w_i(x), \quad v^m(x) = \sum_{i=1}^m b_{im} w_i(x), \quad \theta^m(x) = \sum_{i=1}^m c_{im} w_i(x)$$

temos que o sistema (1.1) é equivalente a:

$$\mu \int_0^L u^m(x) w_j(x) dx - \int_0^L v^m(x) w_j(x) dx = \int_0^L f_1(x) w_j(x) dx \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L v^m(x) w_j(x) dx - \int_0^L u_{xx}^m(x) w_j(x) dx + \alpha \int_0^L \theta_x^m(x) w_j(x) dx \\ = \int_0^L f_2(x) w_j(x) dx \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L \theta^m(x) w_j(x) dx - \int_0^L \theta_{xx}^m(x) w_j(x) dx + \beta \int_0^L v_x^m(x) w_j(x) dx \\ = \int_0^L f_3(x) w_j(x) dx \end{aligned} \quad (1.7)$$

Multiplicando (1.5), (1.6) e (1.7) por  $-b_j \lambda_j$ ,  $a_j \lambda_j$  e  $c_j \lambda_j$  respectivamente e somando em  $j = 1$  até  $j = m$ , obtemos:

$$-\mu \int_0^L u_x^m(x) v_x^m(x) dx + \int_0^L |v_x^m(x)|^2 dx = - \int_0^L f_{1,x}(x) v_x^m(x) dx \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} -\mu \int_0^L v^m(x) u_{xx}^m(x) dx + \int_0^L |u_{xx}^m(x)|^2 dx - \alpha \int_0^L \theta_x^m(x) w_{xx}(x) dx \\ = - \int_0^L f_2(x) u_{xx}^m(x) dx \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L \theta^m(x) \theta_{xx}^m(x) dx + \int_0^L |\theta_{xx}^m(x)|^2 dx - \beta \int_0^L v_x^m(x) \theta_{xx}^m(x) dx \\ = - \int_0^L f_3(x) \theta_{xx}^m(x) dx \end{aligned} \quad (1.10)$$

De (1.3) e (1.8) obtemos a existência de  $C > 0$ , satisfazendo,

$$\int_0^L |v_x^m(x)|^2 dx \leq C\|F\|^2 \quad (1.11)$$

Das expressões (1.9), (1.10) e (1.11) obtemos a existência de  $C > 0$ , tal que:

$$\int_0^L |u_{xx}^m(x)|^2 dx + \int_0^L |\theta_{xx}^m(x)|^2 dx \leq C\|F\|^2 \quad (1.12)$$

Utilizando (1.12) resulta que existem subsucessões  $\{u^m\}_{m \geq 1}$  e  $\{\theta^m\}_{m \geq 1}$ , denotadas de tal maneira tal que:

$$u^m \rightharpoonup u \quad \text{fraco em } V \quad \text{e} \quad \theta^m \rightharpoonup \theta \quad \text{fraco em } V$$

Das (1.5), (1.6) e (1.7) e as convergências acima temos que  $u$ ,  $v$  e  $\theta$  satisfazem:

$$\begin{aligned} \mu \int_0^L u(x)w_j(x)dx - \int_0^L v(x)w_j(x)dx &= \int_0^L f_1(x)w_j(x)dx \\ \mu \int_0^L v(x)w_j(x)dx - \int_0^L \partial_x^2 u(x)w_j(x)dx + \alpha \int_0^L \partial_x \theta(x)w_j(x)dx &= \int_0^L f_2(x)w_j(x)dx \\ \mu \int_0^L \theta(x)w_j(x)dx - \int_0^L \partial_x^2 \theta(x)w_j(x)dx + \beta \int_0^L \partial_x v(x)w_j(x)dx &= \int_0^L f_3(x)w_j(x)dx \end{aligned}$$

com  $1 \leq j \leq m$ .

Como as combinações lineares finitas de autovetores é densa em  $L^2(I)$ , então conclui-se obtendo o requerido pelo Lema.  $\square$

**Observação 2:** Definimos por comodidade os conjuntos  $E$  e  $F$ , sendo

$$E = D(\mathcal{U}) = V \times H_0^1(I) \times V = H_0^1(I) \cap H^2(I) \times H_0^1(I) \cap H^2(I)$$

equipado com o seguinte produto interno e a norma

$$\begin{aligned} (U, W)_{D(\mathcal{U})} &= (U, W)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{U}U, \mathcal{U}W)_{\mathcal{H}} \\ \|U\|_{D(\mathcal{U})}^2 &= \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathcal{U}U\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

respectivamente.

Definimos o conjunto  $F$  da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} F = D(\mathcal{U}^2) &= \{U \in D(\mathcal{U}) : \mathcal{U}U \in D(\mathcal{U})\} \\ &= \{(v_0, v_1, \varphi_0) \in E : v_1 \in V; \partial_x^2 v_0 - \alpha \partial_x \varphi_0 \in H_0^1(I); \partial_x^2 \varphi_0 - \beta \partial_x v_1 \in V\} \end{aligned}$$

**Lema 1.12.** Sejam  $E$  e  $F$  definidos como na observação acima. Então temos que  $F$  é denso em  $E$ .

**Demonstração.** Seja  $G = (g_1, g_2, g_3) \in E$  tal que:

$$(G, \vartheta)_{D(\mathcal{U})} = 0, \quad \forall \vartheta \in F \tag{1.13}$$

então teremos que mostrar que  $G = 0$  em  $E$ .

Com efeito usando o Lema 1.11, existe  $\vartheta_0 = (v_0, v_1, \varphi_0) \in E$  tal que satisfazem,

$$\begin{aligned}\mu v_0 - v_1 &= g_1 \\ \mu v_1 - \partial_x^2 v_0 + \alpha \partial_x \varphi_0 &= g_2 \\ \mu \varphi_0 - \partial_x^2 \varphi_0 + \beta \partial_x v_1 &= g_3\end{aligned}$$

e das expressões anteriores temos:

$$v_1 = -g_1 + \mu v_0 \in V \quad (1.14)$$

$$\partial_x^2 v_0 - \alpha \partial_x \varphi_0 = -g_2 + \mu v_1 \in H_0^1(I) \quad (1.15)$$

$$\partial_x^2 \varphi_0 - \beta \partial_x v_1 = -g_3 + \mu \varphi_0 \in V \quad (1.16)$$

Do sistema (1.14), (1.15), (1.16) e definição de  $F$ ,

$$\vartheta_0 = (v_0, v_1, \varphi_0) \in F$$

Escrevendo o anterior em termos dos operador  $\widehat{\mathcal{B}} = \mu I - \mathcal{U}$

$$\widehat{\mathcal{B}}\vartheta_0 = G$$

utilizando (1.13) temos:

$$0 = (\widehat{\mathcal{B}}\vartheta_0, \vartheta_0)_{D(\mathcal{U})} = (\widehat{\mathcal{B}}\vartheta_0, \vartheta_0)_{\mathcal{H}} + (\mathcal{U}\widehat{\mathcal{B}}\vartheta_0, \mathcal{U}\vartheta_0)_{\mathcal{H}} \quad (1.17)$$

Como  $\mathcal{B}$  é um operador dissipativo podemos minorar os somandos anteriores:

$$\begin{aligned}(\widehat{\mathcal{B}}\vartheta_0, \vartheta_0)_{\mathcal{H}} &\geq \|\vartheta_0\|_{\mathcal{H}}^2 \\ (\mathcal{U}\widehat{\mathcal{B}}\vartheta_0, \mathcal{U}\vartheta_0)_{\mathcal{H}} &= (\mathcal{U}(\mu\vartheta_0 - \mathcal{U}\vartheta_0), \mathcal{U}\vartheta_0)_{\mathcal{H}} \\ (\mu\mathcal{U}\vartheta_0 - \mathcal{U}(\mathcal{U}\vartheta_0), \mathcal{U}\vartheta_0)_{\mathcal{H}} &= (\widehat{\mathcal{B}}\mathcal{U}\vartheta_0, \mathcal{U}\vartheta_0)_{\mathcal{H}} \geq \|\mathcal{U}\vartheta_0\|_{\mathcal{H}}^2\end{aligned}$$

substituindo em (1.17) temos,

$$0 \geq \|\vartheta_0\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathcal{U}\vartheta_0\|_{\mathcal{H}}^2 \Rightarrow \vartheta_0 = 0 \Rightarrow G \equiv 0 \text{ em } E$$

obtemos o resultado desejado.  $\square$

## Capítulo 2

# Termoelasticidade Linear

A termoelasticidade é uma teoria que estuda o efeito do campo de temperatura sobre o campo de tensão e o efeito associado do campo de tensão sobre as condições térmicas num sólido elástico. Restringiremos nossa atenção a sólidos perfeitamente elásticos submetidos a pequenas deformações e flutuações infinitesimais de temperatura. Estas suposições são suficientes para justificar a dedução termodinâmica da nossa equação de estado de um sólido elástico.

As equações da termoelasticidade resultantes são lineares se a variação de algumas quantidades mecânicas e térmicas com a temperatura podem ser desprezadas. Observa-se que a deformação de um sólido perfeitamente elástico é um processo reversível, a difusão de calor acontece de forma irreversível de maneira que a dedução das equações de campo terá que ser baseada na teoria de processos irreversíveis.

O desenvolvimento de uma teoria termodinâmica irreversível fornece as ferramentas necessárias para estabelecer uma teoria própria da termoelasticidade. Assumiremos que as constantes elásticas independem do tempo. Em geral em termoelasticidade as constantes elásticas dependem da posição do ponto  $x$  no corpo.

Quando as constantes elásticas não dependem da posição do ponto  $x$ , o corpo é chamado homogêneo. Quando as constantes elásticas mudam de um ponto à outro, o corpo é dito não-homogêneo.

Entendemos por elasticidade a capacidade do corpo para restabelecer sua configuração original depois que as forças que causam a deformação sejam retiradas. Mais precisamente, elasticidade é um estado do meio contínuo que é caracterizado pela relação um a um entre as componentes de tensão e deformação, sendo que uma deformação nula corresponde a uma tensão nula.

As componentes de tensões, deformações e constantes elásticas, relacionadas por meio da lei de Hooke, dependem da orientação dos eixos.

Um corpo é chamado isotrópico, se suas constantes elásticas não dependem da orientação dos eixos coordenados, ou em outras palavras, se as propriedades elásticas do corpo são as mesmas em todas as direções. Quando o corpo não é isotrópico é chamado de anisotrópico.

Neste trabalho a entropia é dada por uma expressão com características mecânicas e térmicas do corpo, isto é, por intermédio das componentes da deformação e da temperatura.

No presente trabalho faremos as seguintes hipóteses:

- i) Existe um estado no qual todas as componentes de deformação, tensão e gradiente de temperatura do sólido anulam-se identicamente.
- ii) O sólido é isotrópico. Essa hipótese não é essencial, apenas simplifica as equações.

As variáveis a serem usadas são:

$T = T(x, t)$ , temperatura absoluta do corpo;

$u = (u_1, u_2, u_3)$ , campo de deslocamento, com componentes  $u_i = u_i(x, t)$ ;

$x = (x_1, x_2, x_3)$ , variável espacial;

$V = (V_1, V_2, V_3)$ , campo de velocidade com componentes  $V_i = V_i(x, t)$ ;

$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x, t)$ , componentes do tensor deformação;

$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, t)$  componentes do tensor tensão e

$\rho = \rho(x, t)$  densidade da massa do corpo.

## 2.1 Equações da Termoelasticidade.

Caracterizaremos as equações básicas da termoelasticidade. Consideremos um sólido perfeitamente elástico, inicialmente não deformado, sem tensão e com temperatura uniforme  $T_0$ .

Quando um sólido é deformado por meios mecânicos ou térmicos aparecem o campo de deslocamento  $u$  e o campo de temperatura não uniforme  $T$ . Estas mudanças implicam na criação de um campo de velocidade  $\mathbf{V}$  e uma distribuição de tensão e deformação descritas pelos tensores  $\sigma_{ij}$  e  $\varepsilon_{ij}$  respectivamente ( $i, j = 1, 2, 3$ ).

Seguindo a tal deformação do estado de equilíbrio, a energia é transferida de uma parte do sólido para outro por deformação elástica e por condução de calor então, a teoria termodinâmica de processos irreversíveis serve para deduzir as equações diferenciais parciais que governam este fenômeno. Esta teoria é baseada em três leis de conservação e na segunda lei da termodinâmica.

**A conservação da massa** é expressa pela equação:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial V_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

é um operador de diferenciação total, onde  $\frac{Df}{Dt}$  é conhecida com a derivada material da função  $f$  ao longo da trajetória  $(t, x(t))$  e é obtida a partir da seguinte motivação,

$$\frac{d}{dt}f(t, x(t)) = \partial_t \vec{f} + \partial_x \vec{f} \frac{dx}{dt} = \partial_t \vec{f} + \nabla f \cdot \frac{dx}{dt} = \partial_t \vec{f} + \nabla f \cdot v$$

onde  $v$  é a velocidade. Quando  $f = K$  constante, então temos um fluido de Pousiville, logo a derivada material se anula,  $\frac{Df}{Dt} = 0$ .

**A conservação do movimento** é expressa por três equações:

$$\rho \frac{DV_i}{Dt} = \rho X_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.2)$$

onde  $(X_1, X_2, X_3)$  são as componentes das forças aplicadas em  $X$  no corpo por unidade de massa.

Aqui utilizamos a convenção de somatório quando temos índices repetidos, como por exemplo, o produto escalar de dois vetores **A** e **B** é:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

e o traço do tensor tensão,  $tr[\sigma_{ij}]$ , primeiro invariante, é,

$$tr[\sigma_{ij}] = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

**A conservação da energia** é expressa pela equação,

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( U + \frac{1}{2} V_i V_i \right) = \rho X_i V_i + \frac{\partial (V_i \sigma_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q \quad (2.3)$$

onde  $U$  é a energia interna específica (por unidade de volume),  $Q$  é a razão com que o calor é gerado (por unidade de volume) por fontes internas ou externas e  $F = (F_1, F_2, F_3)$  o vetor fluxo de calor. Finalmente temos:

**A segunda lei da Termodinâmica** é expressa pela equação:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \rho T \frac{DS}{Dt} + \sigma_{ij} \frac{D\varepsilon_{ij}}{Dt} \quad (2.4)$$

onde  $S$  é a entropia específica do sistema.

O ponto de partida para a dedução das equações diferenciais parciais que governam o movimento de um sólido elástico conduzindo calor são as equações descritas por (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4).

## 2.2 Equações da Teoria Linear

No caso linear os desvios do equilíbrio mecânico e térmico são ambos pequenas, de maneira que o máximo deslocamento é bem menor do que a amplitude efetiva da onda de perturbação e outra exigência é:

$$\max |T - T_o| \ll T_o \quad (2.5)$$

Isto é, o  $\max |T - T_o|$  é uma pequena fração da temperatura de referência  $T_o$ .

Sob estas exigências os produtos dos desvios de todas as quantidades físicas do estado de referência e suas derivadas espaciais podem ser consistentemente desprezadas. De maneira que o tensor de deformação infinitesimal é dado por

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.6)$$

Também, o operador diferencial total  $\frac{D}{Dt}$  pode ser substituído pelo operador simples  $\frac{\partial}{\partial t}$ , pois segundo (2.1) neste caso a velocidade  $V_j$  pode ser desprezada.

Supõe-se que cada constante elástica e térmica nesta teoria linear não depende das variáveis de estado (deformação e temperatura). Assim as nossas equações diferenciais parciais tornam-se lineares.

Nesta aproximação a equação (2.1) reduz-se a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0,$$

onde  $\vartheta$  é a dilatação e denota-se  $\vartheta = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \varepsilon_{ii}$  e cuja solução é,

$$\rho = \rho_0 e^{-\vartheta}$$

Com  $\rho_0$  denotando a densidade inicial uniforme do sólido. Como a dilatação,  $\vartheta$ , é pequena vemos que,

$$\rho = \rho_0(1 - \vartheta). \quad (2.7)$$

A equação (2.2) reduz-se a forma familiar:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho X_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

Também as equações da energia e entropia:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \left( U + \frac{1}{2} V_i^2 \right) &= \rho X_i V_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (V_i \sigma_{ij}) - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q \\ \rho \frac{\partial U}{\partial t} &= \rho T \frac{\partial S}{\partial t} + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Multiplicando (2.2) pela velocidade  $V_i$  e fazendo a diferença com (2.3) obtemos:

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q,$$

utilizando a simetria do tensor tensão, isto é,

$$\sigma_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t}$$

então

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q. \quad (2.9)$$

Colocando (2.4) no caso linear e substituindo em (2.9) temos:

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} = - \frac{\partial F_j}{\partial x_j} + Q \quad (2.10)$$

ou na forma alternativa,

$$\rho \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( - \frac{F_j}{T} \right) + \frac{Q}{T} - \frac{F_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.11)$$

A relação (2.10) tem a forma da equação de balanço de entropia do sistema. Isto nos diz que a mudança de entropia é devido a divergência negativa de um fluxo, o fluxo de entropia, denotado por  $F_\varepsilon = - \frac{F_j}{T}$  somada a uma fonte de entropia denotada:



$$\sigma(S) = -\frac{F_j}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.12)$$

Esta fonte de entropia pode ser escrita como,

$$\sigma(S) = F_j X_j, \quad (2.13)$$

onde os fluxos  $F_j$  são dados em termos das forças termodinâmicas  $X_j$  pelas equações fenomenológicas,

$$F_j = L_{ij} X_j \quad (2.14)$$

os coeficientes  $L_{ij}$  satisfazem as relações ONSAGER, ver Kupradze [14], isto é,

$$L_{ij} = L_{ji}$$

Comparando estes resultados de (2.12) até (2.14)

$$X_j = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

então

$$F_j = -\frac{L_{ij}}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

onde  $L_{ij}$  é uma constante. A expressão anterior é chamada lei de Fourier.

Nós estamos interessados nos meios isotrópicos então,

$$F_j = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.15)$$

onde  $k$  é a condutividade térmica.

Substituindo (2.15) em (2.10) obtemos,

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + Q. \quad (2.16)$$

## 2.3 Relações Termodinâmicas

Nesta seção faremos a dedução das relações que determinam as componentes de tensão  $\sigma_{ij}$  e a entropia  $S$  como funções do deslocamento,  $u_i$  e a temperatura  $T$ .

A equação de estado de um sólido relaciona os elementos  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$ . Tal relação não pode ser deduzida por meios termodinâmicos, a menos que utilizemos alguma hipótese adicional.

Nossas restrições sobre o corpo são suficientes para que a dedução termodinâmica da equação de estado seja possível.

Como o corpo é perfeitamente elástico e a tensão depende unicamente das variáveis de estado  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$ , não de suas derivadas com respeito ao tempo.

A função termodinâmica associada com estas variáveis é a energia livre de HELMHOLTZ:

$$F(\varepsilon_{ij}, T) = U(\varepsilon_{ij}, T) - TS(\varepsilon_{ij}, T). \quad (2.17)$$

As funções  $U$ ,  $F$  e  $S$  são funções de estado, isto é, seus incrementos perante a mudança do estado do corpo elástico são totalmente diferenciáveis. Estas funções são chamadas também de potenciais termodinâmicos.

No que segue deduziremos as relações termodinâmicas. Escrevendo na sua forma diferencial a equação de entropia (2.8), temos:

$$\rho dU - \rho T dS = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.18)$$

Vemos que (2.17) é equivalente a:

$$dF = -SdT + \frac{\sigma_{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij}$$

De nossa relação diferencial:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial T} dT$$

deduzimos imediatamente,

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.19)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (2.20)$$

Desenvolvendo a função energia livre em série de Taylor no entorno de  $(0, T_o)$ , em duas variáveis

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_{ij}, T) - F(0, T_o) &= \frac{\varepsilon_{ij}}{\rho} A_{ij} + (T - T_o) \frac{\partial F(0, T_o)}{\partial T} + \frac{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}}{2\rho} B_{ijkl} \\ &+ \frac{1}{2} (T - T_o)^2 \frac{\partial^2 F(0, T_o)}{\partial T^2} + \frac{\varepsilon_{ij}}{\rho} (T - T_o) C_{ij} + \dots \end{aligned}$$

Utilizando (2.19) mostraremos que a equação que relaciona  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  e  $T$  é da forma:

$$\sigma_{ij} = A_{ij} + B_{ijkl} \varepsilon_{kl} + C_{ij} (T - T_o) + \dots,$$

onde,

$$A_{ij} = \rho \frac{\partial F(0, T_o)}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad B_{ijkl} = \rho \frac{\partial^2 F(0, T_o)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}, \quad C_{ij} = \rho \frac{\partial^2 F(0, T_o)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial T}.$$

Por hipótese temos que  $\sigma_{ij} = 0$  quando  $\varepsilon_{ij} = 0$  e  $T = T_o$ , então:

$$0 = A_{ij} + B_{ijkl}0 + C_{ij}0 + \dots \Rightarrow A_{ij} = 0$$

Além disso, podemos desprezar produtos de deformações e derivadas com respeito a temperatura das quantidades  $B_{ijkl}$  e  $C_{ij}$  assim os demais termos das série de Taylor são nulos, usando propriedades de isotropia, o número de elementos independentes do tensor de quarta ordem  $B_{ijkl}$  reduz-se a dois, também  $C_{ij} = (\lambda + 2/3\mu) \alpha \delta_{ij}$ .

Um tensor isotrópico de quarta ordem tem a representação:

$$B_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl},$$

onde  $\lambda$ ,  $\mu$  são constantes de Lamé, isto é,

$$\lambda = \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\eta)}$$

Logo a equação de estado do sólido sob consideração é descrita por,

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\eta} \varepsilon_{ij} + \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} (T - T_o) \delta_{ij} \quad (2.21)$$

onde  $E$  e  $\eta$  são módulo de Young e razão de Poisson respectivamente, e o coeficiente de expansão térmica de volume é:

$$\alpha = \frac{\partial \varepsilon_{kk}}{\partial T}.$$

Da equação (2.18) temos,

$$dS = \frac{1}{T} dU - \frac{\sigma_{ij}}{\rho T} d\varepsilon_{ij}$$

Utilizando as relações diferenciais:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (2.22)$$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T} dT + \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} \quad (2.23)$$

temos,

$$dS = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial T} dT + \left\{ \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho T} \right\} d\varepsilon_{ij} \quad (2.24)$$

Comparando (2.22) e (2.24) tem-se,

$$T \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial T} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{T} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - \frac{\sigma_{ij}}{\rho T} \quad (2.26)$$

O lado esquerdo de (2.25) é o calor específico e constante de deformação que denotamos por  $C_\theta$ , isto é,

$$C_\theta = \frac{\partial U}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T}. \quad (2.27)$$

Da equação (2.17) temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} - T \frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}}, \\ \frac{\partial F}{\partial T} &= \frac{\partial U}{\partial T} - T \frac{\partial S}{\partial T} - S. \end{aligned}$$

Fazendo uso das relações (2.25) e (2.26) vemos que as identidades anteriores são equivalentes a,

$$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho} \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial T} = -S.$$

De (2.7) temos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = 0.$$

Das últimas duas relações obtemos:

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}, \quad (2.28)$$

e das últimas equações (2.26) e (2.28)

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\sigma_{ij}}{\rho} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}, \quad (2.29)$$

sendo a densidade  $\rho$  constante e pela equação (2.7) a deformação (dilatação) é constante.

Substituindo (2.21) em (2.28) e (2.29) obtemos,

$$\frac{\partial S}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \delta_{ij} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \vartheta \delta_{ij} + \frac{E}{(1+\eta)} \varepsilon_{ij} + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} \delta_{ij} \right] \quad (2.31)$$

Substituindo (2.28) e (2.31) na fórmula diferencial (2.22) e utilizando o fato,  $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$  quando  $i = k = j$ , então:

$$dU = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{E}{1+\eta} \varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij} + \frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \varepsilon_{kk} d\varepsilon_{kk} + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} d\varepsilon_{kk} \right] + C_\theta dT$$

Trata-se de uma diferencial exata que integrando resulta:

$$U(\varepsilon_{ij}, T) - U(0, T_0) = \frac{1}{2\rho} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} (T - T_0) \vartheta + C_\theta (T - T_0) \quad (2.32)$$

Na relação anterior  $C_\theta(T - T_0)$  é o termo que representa o conteúdo de calor por unidade de massa, o termo  $\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/(2\rho)$  é a energia de deformação por unidade de volume do corpo, o termo,

$$\frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} (T - T_0),$$

é consequência da interação da deformação elástica e a difusão térmica.

De maneira semelhante de (2.27) e (2.30) temos

$$dS = \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} d\varepsilon_{kk} + C_\theta \frac{dT}{T}.$$

Integrando a diferencial exata exterior, obtemos;

$$S(\varepsilon_{ij}, T) - S(0, T_0) = \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} \varepsilon_{kk} + C_\theta \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \quad (2.33)$$

Nota-se que mudanças elásticas são processos reversíveis e não geram mudanças de entropia.

O termo  $C_\theta \ln(T/T_0)$  é a mudança de entropia devido a condução de calor somente e o termo,

$$\frac{E\alpha}{3(1-2\eta)},$$

resulta de um acoplamento de mudanças térmicas e elásticas.

## 2.4 Equações do Deslocamento e Temperatura

Nesta seção nós encontraremos as equações diferenciais parciais lineares para o fenômeno termoelástico.

Da equação (2.33) temos

$$\partial_t S = \frac{E\alpha}{3\rho(1-2\eta)} \partial_t \vartheta + \frac{C_\theta}{T} \partial_t T.$$

Substituindo na equação (2.16) tem-se:

$$\rho C_\theta \partial_t T + \frac{E\alpha T}{3(1-2\eta)} \partial_t \vartheta = k \Delta T + Q.$$

Fazendo uso de (2.5) substituímos  $T \partial_t \vartheta$  por  $T_0 \partial_t \vartheta$  então a expressão anterior fica

$$\rho C_\theta \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha T_0}{3(1-2\eta)} \partial_t \vartheta = k \Delta T + Q. \quad (2.34)$$

Em seguida substituindo (2.21) em (2.2) obtemos:

$$\frac{E\eta}{(1+\eta)(1-2\eta)} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + \frac{E}{1+\eta} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_i} - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho X_i = \rho \partial_t^2 u_i \quad (2.35)$$

Estas equações podem ser escritas na notação vetorial. Seja  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , então:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} [\Delta u + \nabla \operatorname{div} u], \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = \nabla \operatorname{div} u$$

De maneira que as equações (2.34) e (2.35) tomam as seguintes formas,

$$\begin{aligned} \frac{E}{2(1+\eta)} \Delta u + \frac{E}{2(1+\eta)(1-2\eta)} \nabla \operatorname{div} u - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \nabla T + \rho X &= \rho \partial_t^2 u \\ \rho C_\theta \partial_t T + \frac{E\alpha T_o}{3(1-2\eta)} \partial_t \operatorname{div} u &= k \Delta T + Q \end{aligned}$$

Nosso interesse é obter as equações em dimensão um ( $n = 1$ ), então as equações unidimensionais são:

$$\rho C_\theta \partial_t T + \frac{E\alpha T_o}{3(1-2\eta)} \partial_t \varepsilon = k \partial_x^2 T + Q, \quad (2.36)$$

$$\rho \partial_t^2 u - \rho X = \frac{E}{2(1+\eta)} \partial_x^2 u - \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \partial_x T \quad (2.37)$$

Escrevendo  $\theta = T - T_o$  e tomando sólidos livres de forças e fontes externas de calor, isto é,  $X = 0$  e  $Q = 0$  então (2.36) e (2.37) ficam

$$\begin{aligned} \rho \partial_t^2 u - \frac{E}{2(1+\eta)} \partial_x^2 u + \frac{E\alpha}{3(1-2\eta)} \partial_x \theta &= 0, \\ \rho C_\theta \partial_t \theta - k \partial_x^2 \theta + \frac{E\alpha T_o}{3(1-2\eta)} \partial_{xt}^2 u &= 0, \end{aligned}$$

Mudando convenientemente a escala de  $x$  e  $t$ , e usando o fato de que todas as constantes que aparecem são estritamente positivas, elas não mudam a natureza das equações diferenciais parciais resultantes, então podemos escrever o sistema de equações do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \alpha \partial_x \theta &= 0 \\ \partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \beta \partial_{xt}^2 u &= 0 \end{aligned}$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes.

## Capítulo 3

# Sistemas Termoelásticos

Consideramos as clássicas equações termoelásticas homogêneas com coeficientes constantes,

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \alpha \partial_x \theta = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \quad (3.1)$$

$$\partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \beta \partial_{xt}^2 u = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \quad (3.2)$$

com condições de Fronteira tipo Dirichlet-Newmann, importantes no decaimento,

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \partial_x \theta(0, t) = \partial_x \theta(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

e são mais simples de manipular que as condições de Dirichlet. Condições de iniciais,

$$u(x, 0) = u_o; \quad \partial_t u(x, 0) = u_1; \quad \theta(x, 0) = \theta_o \quad 0 \leq x \leq L$$

onde  $u_o$ ,  $u_1$  e  $\theta_o$  são funções conhecidas.

**Condição de normalização:** A integral a seguir,

$$\int_0^L \theta_o(x) dx = 0.$$

Caso contrário, se os dados iniciais fossem  $u_o = u_1 = 0$ ,  $\theta_o = 1$ , então a solução  $(u, \theta) = (0, 1)$ , é uma solução que não decai.

**Observação 3:** Em caso de ter dados na fronteira para  $u$  de tipo Dirichlet nulos, podemos derivar com relação a  $t$ , para obter

$$\partial_t u(0, t) = 0 = \partial_t u(L, t).$$

### 3.1 Decaimento Exponencial.

Considere a energia do sistema dada pela seguinte relação,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left[ |\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \right] dx; \quad \beta > 0 \quad (3.3)$$

Nosso objetivo para mostrar o decaimento exponencial será construir um funcional  $\mathcal{L}(t)$  que satisfaça as seguintes condições,

$$i) \quad c_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1 E(t) \quad ii) \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\gamma \mathcal{L}(t)$$

Para implementar o nosso objetivo dentre dos vários procedimentos, multiplicamos a equação (3.1) por  $\partial_t u$  e a equação (3.2) por  $\frac{\alpha}{\beta} \theta$  e somando ambas depois de integrar e utilizando a energia (3.3) teremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(t) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx = -\frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx - \frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \\ &\leq -\frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx - c_2 \int_0^L |\theta|^2 dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde temos utilizado a desigualdade de Poincaré, a constante  $c_2$  contém as outras constantes  $\alpha$ ,  $2\beta$  e  $c_p$ .

O seguinte processo será multiplicar a equação (3.1) pelo deslocamento  $u$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^L u \partial_t^2 u dx - \int_0^L u \partial_x^2 u dx + \alpha \int_0^L u \partial_x \theta dx &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_0^L u \partial_t u dx - \int_0^L |\partial_t u|^2 dx + \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \alpha \int_0^L u \partial_x \theta dx &= 0 \end{aligned}$$

integrando por partes e usano a desigualde de Poincaré,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L u \partial_t u dx &= \int_0^L |\partial_t u|^2 dx - \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta \partial_x u dx \\ &\leq \int_0^L |\partial_t u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

a última desigualdade é obtida pelo fato que  $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ .

A preocupação agora é reparar a construção da energia no lado direito da soma das desigualdades (3.4) e (3.5), isto é,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ E(t) + \varepsilon \int_0^L u \partial_t u dx \right\} &\leq -\frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx - \left( c_2 - \frac{\varepsilon \alpha^2}{2} \right) \int_0^L |\theta|^2 dx \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \varepsilon \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \end{aligned} \quad (3.6)$$



onde  $\varepsilon$  deve ser escolhido suficientemente pequeno.

Na desigualdade anterior aparece um somando estranho, o primeiro, envolvendo a derivada parcial de  $\theta$  com relação a variável espacial. Para contornar este termo, devemos integrar a (3.2), de 0 até  $x$  para obter,

$$\int_0^x \partial_t \theta ds - \int_0^x \partial_x^2 \theta ds + \beta \int_0^x \partial_{xt}^2 u ds = 0.$$

Usando-se o teorema fundamental do cálculo,

$$\int_0^x \partial_t \theta ds - \partial_x \theta + \beta \partial_t u = 0. \quad (3.7)$$

Multiplicando a equação (3.7) por  $\partial_t u$  e integrando de 0 até  $L$ :

$$\int_0^L \left( \int_0^x \partial_t \theta \right) \partial_t u dx - \int_0^L \partial_x \theta \partial_t u dx + \beta \int_0^L |\partial_t u|^2 dx = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{d}{dt} \left( \int_0^x \theta \right) \partial_t u dx &= \int_0^L \partial_x \theta \partial_t u dx - \beta \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx - \frac{\beta}{2} \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \\ \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L \left( \int_0^x \theta \right) \partial_t u dx \right\} - \int_0^L \left( \int_0^x \theta \right) \partial_t^2 u dx &\leq \frac{1}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx - \frac{\beta}{2} \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por outro lado, o segundo somando do lado esquerdo da desigualdade anterior, será substituído por outra identidade, fazendo uso da equação (3.1) da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L \left( \int_0^x \theta \right) \partial_x [\partial_x u - \alpha \theta] dx = - \int_0^L \theta (\partial_x u - \alpha \theta) dx \\ &= \alpha \int_0^L |\theta|^2 dx - \int_0^L \theta \partial_x u dx, \end{aligned} \quad (3.9)$$

substituindo (3.9) no lado esquerdo da desigualdade (3.8) obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L \left( \int_0^x \theta \right) \partial_t u dx \right\} &\leq \alpha \int_0^L |\theta|^2 dx - \int_0^L \theta \partial_x u dx \\ &\quad + \frac{1}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 - \frac{\beta}{2} \int_0^L |\partial_t u|^2 dx. \end{aligned}$$

No resultado parcial temos a aparição de outro somando estranho, o segundo do lado direito, para contornar isto fazemos a seguinte estimativa,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^L \theta \partial_x u dx \right| &\leq \int_0^L \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \theta \sqrt{\varepsilon} \partial_x u \right| dx \\ &\leq \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^L |\theta|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L |\partial_x u|^2 dx \end{aligned}$$

Assim, para recuperar a energia do sistema no lado direito com sinal negativo devemos considerar as constante,  $\delta$  que não depende de  $\varepsilon$  e definir o seguinte funcional,

$$\mathcal{L}(t) = E(t) + \varepsilon \int_0^L u \partial_t u \, dx + \delta \int_0^L \left( \int_0^x \theta \, ds \right) \partial_t u \, dx$$

repare a colocação estratégica das constantes a serem escolhidas posteriormente.

Calculando a variação do operador anterior com relação ao tempo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - \left( \frac{\alpha}{2\beta} - \frac{\delta}{2\beta} \right) \int_0^L |\partial_x \theta|^2 \, dx - \left( c_2 - \frac{\alpha^2 \varepsilon}{2} - \frac{\alpha \delta}{2} - \frac{\delta}{2\varepsilon} \right) \int_0^L |\theta|^2 \, dx \\ &\quad - \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta}{2} \right) \int_0^L |\partial_x u|^2 \, dx - \left( \frac{\beta \delta}{2} - \varepsilon \right) \int_0^L |\partial_t u|^2 \, dx \end{aligned}$$

O escolha da constante  $\delta$  não foi suficiente, portanto é necessário outra constante que afete a energia. Fazemos isso multiplicando a equação (3.4) pela constante  $\mathcal{N} > 0$  para obter

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} E(t) \leq - \frac{\alpha \mathcal{N}}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 \, dx - c_2 \mathcal{N} \int_0^L |\theta|^2 \, dx$$

Com a manipulação anterior a variação do funcional  $\mathcal{L}(t)$  toma uma nova forma, restringindo as constantes como segue,  $\delta < 1$ , tomando  $\varepsilon \ll \delta < 1$  teremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) &\leq - \left( \frac{\alpha \mathcal{N}}{2\beta} - \frac{\delta}{2\beta} \right) \int_0^L |\theta_x|^2 \, dx - \left( c_2 \mathcal{N} - \frac{\alpha^2 \varepsilon}{2} - \frac{\alpha \delta}{2} - \frac{\delta}{2\varepsilon} \right) \frac{\beta}{\alpha} \int_0^L \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \, dx \\ &\quad - \left( \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\delta \varepsilon}{2} \right) \int_0^L |\partial_x u|^2 \, dx - \left( \frac{\beta \delta}{2} - \varepsilon \right) \int_0^L |\partial_t u|^2 \, dx \end{aligned}$$

Novamente, tomando  $\varepsilon \ll \delta < 1$  e  $\mathcal{N}$  bem grande, existe uma constante  $k_o$  tal que:

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -k_o \frac{1}{2} \int_0^L \left( |\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \right) \, dx = -k_o E(t) \quad (3.10)$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( |\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \right) \, dx,$$

e a constante  $k_o$  é de um valor mínimo.

Por outro lado, existe duas constantes  $c_o$  e  $c_1$  tal que

$$c_o E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1 E(t) \quad (3.11)$$

Da relação (3.11) e da desigualdade (3.10) temos,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}(t) \leq -\frac{k_o}{c_1} \mathcal{L}(t)$$

cuja solução é dada por,

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\frac{k_o}{c_1}t}$$

Novamente pela relação, (3.11) temos,

$$c_o E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1 E(0)e^{-\frac{k_o}{c_1}t}$$

Finalmente,

$$E(t) \leq \frac{c_1}{c_o} E(0)e^{-\frac{k_o}{c_1}t}$$

obtemos o que desejamos.  $\square$

A seguir mostramos como o método de separação de variáveis pode servir para mostrar o decaimento.

### Decaimento Utilizando o Método de Fourier

Uma função  $w \in L^2(0, L)$  pode ser escrita como uma série trigonométrica, da seguinte forma

$$w(x) = \sum_{n \geq 1} a_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

onde o coeficiente é

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L w(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx$$

e a convergência da série esta dada no espaço  $L^2(0, L)$ .

Aplicamos o método de Fourier ao seguinte sistema termoelástico clássico homogêneo com coeficientes constantes e condições de fronteira Dirichlet-Neumann

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \alpha \partial_x \theta = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \quad (3.12)$$

$$\partial_t \theta - \partial_x \theta + \beta \partial_{xt}^2 u = 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, \infty[ \quad (3.13)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \partial_x \theta(0, t) = \partial_x \theta(L, t) = 0 \quad (3.14)$$

$$u(x, 0) = u_o(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1, \quad \theta(x, 0) = \theta_o. \quad (3.15)$$

Utilizando a separação de variáveis, temos as soluções fundamentais,

$$u_n(x, t) = g_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad \theta_n(x, t) = h_n(t) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Por pelo princípio de superposição,

$$u_m(x, t) = \sum_{n=1}^m g_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad \theta_m(x, t) = \sum_{n=1}^m h_n(t) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (3.16)$$

As séries de Fourier de  $u$  e  $\theta$  observando-se a convergência uniforme possuem essa forma, pelas condições de fronteira dadas em (3.14)

$$u(x, t) = \sum_{n \geq 1} g_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad \theta(x, t) = \sum_{n \geq 1} h_n(t) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Substituindo no sistema (3.12) e (3.13), as expressões dadas em (3.16),

$$\sum_{n \geq 1} g_n'' \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 g_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) - \alpha \sum_{n \geq 1} \frac{n\pi}{L} h_n(t) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = 0 \quad (3.17)$$

$$\sum_{n \geq 1} h_n' \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 h_n(t) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + \beta \sum_{n \geq 1} \frac{n\pi}{L} g_n'(t) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) = 0. \quad (3.18)$$

Aplicando as relações de ortogonalidade, com ajuda do delta de Kronecker  $\delta_{km}$ ,

$$\int_0^L \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \operatorname{sen} \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2} \delta_{km}, \quad \int_0^L \cos \left( \frac{k\pi x}{L} \right) \cos \left( \frac{m\pi x}{L} \right) dx = \frac{L}{2} \delta_{km},$$

após multiplicar por  $\cos(\lambda_k x)$  e  $\operatorname{sen}(\lambda_k x)$  as relações (3.17) e (3.18), a seguir integrando de 0 até  $L$  obtemos as equações espectrais,

$$g_n''(t) + \lambda_n^2 g_n(t) - \alpha \lambda_n h_n(t) = 0 \quad (3.19)$$

$$h_n'(t) + \lambda_n^2 h_n(t) + \beta \lambda_n g_n'(t) = 0 \quad (3.20)$$

daqui para frente fazemos  $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$ .

Das condições iniciais,

$$u(x, 0) = u_o(x) = \sum_{n \geq 1} g_n(0) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x) = \sum_{n \geq 1} g_n'(0) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_o(x) = \sum_{n \geq 1} h_n(0) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$$

onde os coeficientes possuem as seguintes formas,

$$g_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_o(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx, \quad g_n'(0) = \frac{2}{L} \int_0^L u_1(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (3.21)$$

$$h_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L \theta_o(x) \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) dx \quad (3.22)$$

E, portanto, o sistema de equações diferenciais (3.19) e (3.20) junto com dados iniciais (3.21) e (3.22), isto é, o problema de valor inicial, (3.19)-(3.22), possui solução única dada por  $(g_n, h_n)$ .

A seguir aplicaremos métodos para mostrar o decaimento da energia das soluções obtidas anteriormente.

### Método de Decaimento

Mostramos que  $h_n$  e  $g_n$  decaem exponencialmente com taxas que não dependem de  $n$ . Multiplicando a equação (3.19) por  $g'_n(t)$  e a equação (3.20) por  $h_n(t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{g'_n(t)^2 + \lambda_n^2 g_n(t)^2\} - \alpha \lambda_n h_n(t) g'_n(t) &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \{h_n(t)^2\} + \lambda_n^2 h_n^2(t) + \beta \lambda_n h_n(t) g'_n(t) &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando a última equação por  $\alpha/\beta$  e somando membro a membro obtemos

$$\frac{d}{dt} E_n(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \lambda_n^2 h_n^2(t) \quad (3.23)$$

onde

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \left\{ g'_n(t)^2 + \lambda_n g_n^2(t) + \frac{\alpha}{\beta} h_n^2(t) \right\}.$$

Nosso objetivo é chegar a uma desigualdade da forma:

$$\frac{d}{dt} f(t) \leq -c f(t).$$

onde  $f(t)$  é um funcional a ser determinado.

Multiplicando a equação (3.19) por  $g_n(t)$ :

$$g''_n(t) g_n(t) + \lambda_n^2 g_n^2(t) - \alpha \lambda_n h_n(t) g_n(t) = 0$$

e substituindo o primeiro somando por uma diferença, teremos

$$\frac{d}{dt} \{g'_n(t) g_n(t)\} - g'_n(t)^2 + \lambda_n^2 g_n^2(t) - \alpha \lambda_n h_n(t) g_n(t) = 0.$$

Logo, aplicando uma desigualdade conhecida, temos,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \{g'_n(t) g_n(t)\} &= g'_n(t)^2 - \lambda_n^2 g_n(t)^2 + \alpha \lambda_n h_n(t) g_n(t) \\ &\leq g'_n(t)^2 - \frac{1}{2} \lambda_n^2 g_n^2(t) + \frac{1}{2} \alpha^2 h_n^2(t)\end{aligned} \quad (3.24)$$

Após multiplicar a relação (3.23) pela constante  $N$  e o resultado somado a relação anterior (3.24) temos,

$$\frac{d}{dt} \{N E_n(t) + g_n(t) g'_n(t)\} \leq - \left\{ \frac{\alpha N}{\beta} \lambda_n^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \right\} h_n^2(t) - \frac{1}{2} \lambda_n^2 g_n^2(t) + g'_n(t)^2. \quad (3.25)$$

Multiplicando (3.20) por  $g'_n(t)$ , então,

$$h'_n(t) g'_n(t) + \lambda_n^2 h_n(t) g'_n(t) + \beta \lambda_n g'_n(t)^2 = 0$$

$$\frac{d}{dt}\{h_n(t)g'_n(t)\} = h_n(t)g''_n(t) - \lambda_n^2 h_n(t)g'_n(t) - \beta \lambda_n g'_n(t)^2$$

substituindo  $g''_n(t)$  na relação anterior

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{h_n(t)g'_n(t)\} &= h_n(t)\{-\lambda_n^2 g_n(t) + \alpha \lambda_n h_n(t)\} - \lambda_n^2 h_n(t)g'_n(t) - \beta \lambda_n g'_n(t)^2 \\ &= -\lambda_n^2 g_n(t)h_n(t) - \lambda_n^2 h_n(t)g'_n(t) + \alpha \lambda_n h_n^2(t) - \beta \lambda_n g'_n(t)^2. \end{aligned}$$

A seguir dividimos por  $\lambda_n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_n} \frac{d}{dt} \{h_n(t)g'_n(t)\} &= -\lambda_n g_n(t)h_n(t) - \lambda_n g'_n(t)h_n(t) + \alpha h_n^2(t) - \beta g'_n(t)^2 \\ &\leq -\lambda_n g_n(t)h_n(t) + \left(\frac{1}{2\beta} \lambda_n^2 + \alpha\right) h_n^2(t) - \frac{\beta}{2} g'_n(t)^2. \end{aligned}$$

Multiplicando a constante  $4/\beta$  a relação anterior e somando o resultado com a equação (3.25), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \mathcal{N}E_n(t) + g_n(t)g'_n(t) + \frac{4}{\beta \lambda_n} h_n(t)g'_n(t) \right\} &\leq - \left( \frac{\alpha \mathcal{N}}{\beta} \lambda_n^2 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2\lambda_n^2}{\beta^2} - \frac{4\alpha}{\beta} \right) h_n^2(t) \\ &\quad - \frac{\lambda_n^2}{2} g_n^2(t) - g'_n(t)^2 - \frac{4}{\beta} \lambda_n g_n(t)h_n(t) \\ &\leq - \left\{ \left( \frac{\alpha \mathcal{N}}{\beta} - \frac{2}{\beta^2} \right) \lambda_n^2 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{4\alpha}{\beta} - \frac{16}{\beta^2} \right\} h_n^2(t) \\ &\quad - \frac{1}{4} \lambda_n^2 g_n^2(t) - g'_n(t)^2 \end{aligned}$$

Considere o seguinte funcional

$$\mathcal{L}_n(t) = \mathcal{N}E_n(t) + g_n(t)g'_n(t) + \frac{4}{\beta \lambda_n} h_n(t)g'_n(t).$$

Tomando  $\mathcal{N}$  suficientemente grande, temos,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{L}_n(t) \leq -(k_o \lambda_n^2 - k_1) h_n^2(t) - \frac{1}{4} \lambda_n^2 g_n^2(t) - g'_n(t)^2$$

Por outro lado sabemos que

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \geq \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 = \lambda_1^2 \quad \forall n$$

serve para estimar o coeficiente do primeiro termo

$$k_o \lambda_n^2 - k_1 > k_o \lambda_1^2 - k_1, \quad k_o > 0$$

e com isso, conseguimos recuperar a energia  $E_n$  com sinal oposto e uma a constante  $\gamma$  definida como mínima

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_n(t) \leq -\gamma E_n(t)$$

Também sabemos que existem duas constantes  $c_o$  e  $c_1$  tal que

$$c_o E_n(t) \leq \mathcal{L}_n(t) \leq c_1 E_n(t), \quad (3.26)$$

isto se justifica pela forma como estão definidos os operadores.

Isso nos permite ter uma inequação diferencial na variável temporal

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_n(t) \leq -\frac{\gamma}{c_1}\mathcal{L}_n(t)$$

e cuja solução satisfaz outra inequação,

$$\mathcal{L}_n(t) \leq \mathcal{L}_n(0)e^{-\frac{\gamma}{c_1}t}.$$

Novamente usando a relação (3.26) tem-se

$$E_n(t) \leq \frac{c_1}{c_o} E_n(0)e^{-\frac{\gamma}{c_1}t}, \quad t \geq 0$$

isto é,

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \left\{ g_n'(t)^2 + \lambda_n^2 g_n(t)^2 + \frac{\alpha}{\beta} h_n(t)^2 \right\} \leq \frac{c_1}{c_o} E_n(0)e^{-\frac{\gamma}{c_1}t}$$

Tomando somatório e utilizando a identidade de Parseval,

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ |\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \right] dx \leq \frac{c_1}{c_o} e^{-\frac{\gamma}{c_1}t} \sum_{n \geq 1} E_n(0)$$

e com isso obtemos o que afirmamos. □

**Observação 4:** *O mesmo raciocínio pode utilizado na seguinte sistema,*

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \left( 1 + \int_0^L |\partial_x u|^2 dx \right) \partial_x^2 u + \alpha \partial_x \theta &= 0 \\ \partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \beta \partial_{xt}^2 u &= 0 \end{aligned}$$

*com dados pequenos, no sentido de uma norma.*

### 3.2 Método das Raízes Características

As condições de contorno deste problema permitem utilizar o método das raízes características, que consiste em eliminar uma das incógnitas do sistema. Em alguns cálculos eliminamos os índices por comodidade, neste contexto, teremos,

$$g''(t) + \lambda^2 g(t) - \alpha \lambda h(t) = 0 \quad (3.27)$$

$$h'(t) + \lambda^2 h(t) + \beta \lambda g'(t) = 0 \quad (3.28)$$

Da equação (3.27) obtemos a relação

$$h(t) = \frac{1}{\alpha \lambda} [g''(t) + \lambda^2 g(t)]$$

Nosso objetivo é encontrar soluções exatas, para isso acontecer substituímos  $h(t)$  na equação (3.28),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha \lambda} [g''(t) + \lambda^2 g(t)]' + \frac{\lambda^2}{\alpha \lambda} [g''(t) + \lambda^2 g(t)] + \beta \lambda g'(t) &= 0 \\ g'''(t) + \lambda^2 g'(t) + \lambda^2 g''(t) + \lambda^4 g(t) + \alpha \beta \lambda^2 g'(t) &= 0, \end{aligned}$$

obtemos assim uma equação diferencial de terceira ordem em  $g$ ,

$$g'''(t) + \lambda^2 g''(t) + (1 + \alpha \beta) \lambda^2 g'(t) + \lambda^4 g(t) = 0.$$

Para encontrar a solução geral resolvemos o polinômio característico na variável  $\gamma$ ,

$$p(\gamma) = \gamma^3 + \lambda^2 \gamma^2 + (1 + \alpha \beta) \lambda^2 \gamma + \lambda^4$$

Resolver o polinômio de terceiro grau, devemos lembrar o algoritmo de Cardano, dado pelas fórmulas,

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Segundo Cardano as raízes são dadas pelas expressões

$$\begin{aligned} R_1 &= A^{1/3} - B - \frac{1}{3}a \\ R_2 &= -\frac{1}{2}A^{1/3} + \frac{1}{2}B - \frac{1}{3}a + \sqrt{-3} \left( A^{1/3} + B \right) \\ R_3 &= -\frac{1}{2}A^{1/3} + \frac{1}{2}B - \frac{1}{3}a - \sqrt{-3} \left( A^{1/3} + B \right) \end{aligned}$$



onde

$$A = \frac{1}{6}ab - \frac{c}{2} - \frac{a^3}{27} + \frac{\sqrt{12b^3 - 3a^2b^2 - 54abc + 81c^2 + 12a^3c}}{18}$$

$$B = \frac{3b - a^2}{9A^{1/3}}$$

Assim sendo, as raízes do polinômio característico para o caso que  $\alpha = \beta = 1$

$$p(\gamma) = \gamma^3 + \lambda^2\gamma^2 + 2\lambda^2\gamma + \lambda^4$$

são dadas pelas expressões,

$$R_n^1 = A^{1/3} - B - \frac{1}{3}\lambda_n^2$$

$$R_n^2 = -\frac{1}{2}A^{1/3} + \frac{1}{2}B - \frac{1}{3}\lambda_n^2 + \sqrt{-3}(A^{1/3} + B)$$

$$R_n^3 = -\frac{1}{2}A^{1/3} + \frac{1}{2}B - \frac{1}{3}\lambda_n^2 - \sqrt{-3}(A^{1/3} + B)$$

onde

$$A = -\frac{\lambda_n^4}{6} - \frac{\lambda_n^6}{27} + \frac{\sqrt{96\lambda_n^6 - 39\lambda_n^8 + 12\lambda_n^{10}}}{18} \quad \text{e} \quad B = \frac{6\lambda_n^2 - \lambda_n^4}{9A^{1/3}}$$

Portanto a solução geral é dada por

$$g_n(t) = c_{1,n} e^{R_n^1 t} + c_{2,n} e^{R_n^2 t} + c_{3,n} e^{R_n^3 t}$$

Verifica-se que se  $\lambda_n$  é grande todas as partes reais das raízes complexas são negativas. Por isso quando  $\lambda_n$  é grande temos

$$A^{1/3} \approx -\frac{\lambda_n}{3} \quad \text{e} \quad B \approx \frac{\lambda_n}{3}.$$

Portanto as partes reais das raízes complexas satisfazem, para índices,  $n$  suficientemente grandes

$$\text{Re}[R_n^k] \geq -\lambda_1, \quad k = 1, 2, 3.$$

de onde concluímos que cada  $g_n$  decai exponencialmente,

$$g_n(t) \leq c_n e^{-\lambda_1 t}$$

para o índice  $n$  suficientemente grande.

Pode-se mostrar ainda que,

$$\text{Re}[R_n^k] \leq -M, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.29)$$

onde  $M$  é real positivo que não depende de  $n$ . A demonstração deste fato não é simples, veja Duvaut [6]. Com isso concluímos que

$$e_n(t) \leq 4e_n(0) e^{-Mt}$$

assim a energia decai exponencialmente. □

**Observação 5:** A equação da onda com amortecimento friccional, dada por,

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \gamma \partial_t u &= 0 \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[ \\ u(0, t) = u(L, t) &= 0 \\ u(x, 0) = u_o(x), \quad \partial_t u(x, 0) &= u_1(x) \end{aligned}$$

é uma equação dissipativa, esta caracterizada por um mecanismo interno que realiza uma perda de energia. O deslocamento, pelas imersões de Sobolev, decai exponencialmente.

O calor é outro mecanismo de dissipação, diferença de calor ou a diferença de temperatura.

### 3.3 Decaimento da Solução, ainda Dirichlet-Neumann

Utilizamos a identidade da energia, que sera exposta nos seguintes processos.

Multiplicando a equação (3.39) por  $\partial_t u$  e depois integrando,

$$\begin{aligned} \int_0^L \partial_t^2 u \partial_t u dx - \int_0^L \partial_x^2 u \partial_t u dx + \alpha \int_0^L \partial_x \theta \partial_t u dx &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\partial_t u|^2 dx + \int_0^L \partial_x u \partial_{tx}^2 u dx + \alpha \int_0^L \partial_x \theta \partial_t u dx &= 0. \end{aligned}$$

Reescrevendo a última relação teremos,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L [|\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2] dx + \alpha \int_0^L \partial_t u \partial_t \theta dx = 0. \quad (3.30)$$

Multiplicando a equação (3.40) por  $\theta$  e integrando:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L |\theta|^2 dx + \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \beta \int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx = 0 \quad (3.31)$$

Como temos

$$\int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx = - \int_0^L \partial_t u \partial_x \theta dx,$$

somando a equação (3.30) com a equação (3.31) segue que,

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \leq -\frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx - \frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \quad (3.32)$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ |\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \right] dx.$$

Se obtemos um funcional,  $F(t)$  tal que,

$$\frac{dF(t)}{dt} \leq -cF(t) \quad \Rightarrow \quad F(t) \leq F(0)e^{-ct},$$

teremos alcançado o nosso objetivo.

A seguir, integramos com relação a  $x$ , equação (3.40)

$$\int_0^L \partial_t \theta dx - \int_0^L \partial_x^2 \theta dx + \beta \int_0^L \partial_{xt}^2 u dx = 0.$$

Aplicando o Teorema Fundamental do cálculo

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \theta dx - \partial_x \theta(L, t) + \partial_x \theta(0, t) + \beta \partial_t u(L, t) - \beta \partial_t u(0, t) = 0$$

e pelas condições de fronteira (3.14) os termos após a integral se anulam, logo

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \theta(x, t) dx = 0, \quad \text{então} \quad \int_0^L \theta(x, t) dx = C(x) \quad \forall t \geq 0.$$

Portanto, em particular para  $t = 0$  observamos que

$$\int_0^L \theta(x, t) dx = C(x) = \int_0^L \theta(x, 0) dx = \int_0^L \theta_o(x) dx \quad (3.33)$$

Pela hipótese da normalização  $\int_0^L \theta_o(x) dx = 0$ . Caso contrário quando  $u = 0$ ,  $\theta = 1$ , temos que a solução  $(u, \theta)$  com dados iniciais  $u_o = u_1 = 0$ ,  $\theta_o = 1$  não decai.

Agora, a partir da conclusão (3.33), temos,

$$\int_0^L \theta(x, t) dx = 0 \quad \forall t > 0.$$

Em resumo da desigualdade (3.32) e a desigualdade de Poincaré, temos

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -c_o \int_0^L |\theta(x, t)|^2 dx. \quad (3.34)$$

O nosso propósito é introduzir no membro da direita da desigualdade anterior os termos

$$- \int_0^L |\partial_t u|^2 dx, \quad - \int_0^L |\partial_x u|^2 dx,$$

que fazem parte da energia do sistema.

Multiplicando a equação (3.39) por  $u$  e integrando:

$$\int_0^L u \partial_t^2 u dx - \int_0^L u \partial_x^2 u dx + \alpha \int_0^L u \partial_x \theta dx = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L u \partial_t u dx &= - \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \alpha \int_0^L \partial_x u \theta dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \int_0^L |\partial_t u|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx \end{aligned} \quad (3.35)$$

Das equações (3.34) e (3.35), temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ E(t) + \varepsilon \int_0^L u \partial_t u dx \right\} &\leq - \left( c_o - \frac{\varepsilon \alpha^2}{2} \right) \int_0^L |\theta|^2 dx - \frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \varepsilon \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \end{aligned}$$

Integrando (3.40) de 0 até  $x$ , temos:

$$\begin{aligned} \int_0^x \partial_t \theta ds - \int_0^x \partial_x^2 \theta ds + \beta \int_0^x \partial_{xt}^2 u ds &= 0 \\ \int_0^x \partial_t \theta(s, t) ds - \partial_x \theta(x, t) + \beta \partial_t u(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando por  $\partial_t u$  e integrando de 0 até  $L$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^L \left( \int_0^x \partial_t \theta ds \right) \partial_t u dx - \int_0^L \partial_x \theta \partial_t u dx + \beta \int_0^L |\partial_t u|^2 dx &= 0 \\ \frac{d}{dt} \int_0^L \left( \int_0^x \theta ds \right) \partial_t u dx - \int_0^L \left( \int_0^x \theta dx \right) \partial_t^2 u dx &= \int_0^L \partial_x \theta \partial_t u dx - \beta \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \end{aligned}$$

Substituindo no segundo termo da identidade anterior a equação (3.39), integrando por partes e usando a relação (3.33), teremos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L \left( \int_0^x \theta dx \right) \partial_t u dx \right\} &= \int_0^L \left( \int_0^x \theta dx \right) \partial_x (\partial_x u - \alpha \theta) dx \\ &\quad + \int_0^L \partial_x \theta \partial_t u dx - \beta \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \\ &= - \int_0^L \theta (\partial_x u - \alpha \theta) dx + \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^L \partial_x \theta \sqrt{\beta} \partial_t u dx \\ &\quad - \beta \int_0^L |\partial_t u|^2 dx \\ &\leq c_\delta \int_0^L |\theta|^2 dx + \delta \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \frac{1}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \\ &\quad - \frac{\beta}{2} \int_0^L |\partial_t u|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Finalmente das equações (3.35) e (3.36) temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\left(c_o - \frac{\varepsilon\alpha^2}{2}\right) \frac{\beta}{\alpha} \int_0^L \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 dx \\ &\quad - \frac{\alpha}{2\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \frac{4\varepsilon}{\beta} c_\delta \int_0^L |\theta|^2 dx \\ &\quad - \left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{4\varepsilon\delta}{\beta}\right) \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \frac{4\varepsilon}{2\beta^2} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \\ &\quad - 2\varepsilon \int_0^L |\partial_t u|^2 dx - \varepsilon \int_0^L |\partial_t u|^2 dx. \end{aligned}$$

onde

$$\mathcal{L}(t) = E(t) + \varepsilon \int_0^L u \partial_t u dx + \frac{4\varepsilon}{\beta} \int_0^L \left( \int_0^x \theta ds \right) \partial_t u dx$$

Tomando  $\delta \ll \varepsilon$  pequenos, então:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -K_o \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 + |\partial_x u|^2 + |\partial_t u|^2 \right] dx.$$

Notamos que existem constantes  $c_3$  e  $c_2$  tal que satisfazem

$$c_3 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 E(t) \quad (3.37)$$

de onde temos

$$c_3 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq c_2 \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 + |\partial_x u|^2 + |\partial_t u|^2 \right] dx \quad (3.38)$$

Também obtemos da relação (3.37)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\frac{K_o}{c_2} \mathcal{L}(t)$$

Novamente

$$E(t) \leq \frac{1}{c_3} \mathcal{L}(t) \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{c_3} e^{-\frac{K_o}{c_2} t}$$

e com isso mostramos o que desejavamos.  $\square$

### 3.4 Condição de Fronteira tipo Dirchlet-Dirchlet

Nos sistemas termoelásticos devemos fazer as seguintes identificações,  $\theta$  como a diferença de temperatura (do material),  $u$  como a posição do elemento e  $\partial_x u$  sendo igual a deformação.

O modelo termoelástico,

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \alpha \partial_x \theta = 0, \quad x \in ]0, L[, \quad t > 0 \quad (3.39)$$

$$\partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \beta \partial_{xt}^2 u = 0, \quad x \in ]0, L[, \quad t > 0 \quad (3.40)$$

onde  $\alpha\partial_x\theta$  é o fluxo de calor e  $\beta\partial_{xt}^2u$  é a velocidade do deslocamento e as correspondentes condições iniciais e de fronteira,

$$u(x, 0) = u_o(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_o(x) \quad (3.41)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 \quad (3.42)$$

sendo está última a condição de Dirichlet o que significa que o material esta termicamente isolado.

O sistema termoelastico formulado de forma geral é,

$$\begin{aligned} \rho\partial_t^2 u + \partial_x \{S(\partial_x u, \theta)\} &= 0 \\ \partial_t \{N(\theta, \partial_x u)\} + \partial_x \{Q(\partial_x \theta, \partial_x u, \theta)\} &= 0 \end{aligned}$$

com  $\partial_x S(0, 0) > 0$  e  $\partial_y S(0, 0) > 0$ .

**Observação 6:** É necessário ter “boa informação sobre o caso linear”. Consideramos dados iniciais em nos espaços  $u_0 \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ ,  $u_1 \in H_0^1(0, L)$ ,  $\theta_o \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$  e bem regulares.

Se os dados iniciais estão nesses espaços de Sobolev, então a solução está nos espaços correspondentes aos dados iniciais.

Pelo método de Galerkin, podemos verificar que a solução satisfaz,

$$\begin{aligned} u &\in C(0, T; H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \cap C^1(0, T; H_0^1(0, L)) \cap C^2(0, T; L^2(0, L)) \\ \theta &\in C(0, T; H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)) \cap C^1(0, T; H(0, L)) \end{aligned}$$

Aqui observaremos como as condições de Fronteira de tipo Dirichlet dificultam as técnicas multiplicativas. Seja o seguinte sistema termoelástico

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + \alpha\partial_x \theta = 0, \quad x \in ]0, L[, \quad t > 0 \quad (3.43)$$

$$\partial_t \theta - \partial_x^2 \theta + \beta\partial_{xt}^2 u = 0, \quad x \in ]0, L[, \quad t > 0 \quad (3.44)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0 \quad (3.45)$$

$$u(x, 0) = u_o(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x), \quad \theta(x, 0) = \theta_o(x). \quad (3.46)$$

Multiplicando a equação (3.43) por  $\partial_t u$  e a equação (3.44) por  $\frac{\alpha}{\beta}\theta$  logo integrando de 0 até  $L$  obtemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \quad (3.47)$$

onde

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ |\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2 \right] dx.$$

Multiplicando a equação (3.43) por  $u$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_0^L u \partial_t u dx - \int_0^L |\partial_t u|^2 dx + \int_0^L \partial_x u^2 dx + \alpha \int_0^L u \partial_x \theta dx = 0$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L u \partial_t u dx &= \int_0^L |\partial_t u|^2 dx - \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \alpha \int_0^L \theta \partial_x u dx \\ &\leq \int_0^L |\partial_t u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x u|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^L |\theta|^2 dx \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\int_0^x \partial_t \theta(s, t) ds - \partial_x \theta(x, t) + \partial_x \theta(0, t) + \beta \partial_t u(x, t) = 0$$

pois

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad \text{então} \quad \partial_t u(0, t) = \partial_t u(L, t) = 0.$$

Além disso, as derivadas são com respeito ao tempo, pois em relação a  $x$  teremos termos pontuais, sem nenhuma informação.

Derivando em relação a  $t$  a equação (3.43),

$$\partial_t^3 u - \partial_{xxt}^3 u + \alpha \partial_{xt}^2 \theta = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad t > 0 \quad (3.48)$$

$$\partial_t^2 \theta - \partial_{xxt}^3 \theta + \beta \partial_{xtt}^3 u = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad t > 0 \quad (3.49)$$

e condições iniciais,

$$\theta(x, 0) = \theta_o(x), \quad u(x, 0) = u_o(x), \quad \partial_t u(x, 0) = u_1(x).$$

Temos a condição de compatibilidade: Tomando  $t \rightarrow 0$  nas equações (3.43) e (3.44),

$$\partial_t^2 u(x, 0) - \partial_x^2 u(x, 0) + \alpha \partial_x \theta(x, 0) = 0$$

$$\partial_t \theta(x, 0) - \partial_x^2 \theta(x, 0) + \beta \partial_{xt}^2 u(x, 0) = 0$$

Assim, isolando a segunda derivada no tempo para  $u$  e a primeira derivada no tempo para  $\theta$  temos,

$$\partial_t^2 u(x, 0) = \partial_x^2 u_o(x) - \alpha \partial_x \theta_o(x)$$

$$\partial_t \theta(x, 0) = \partial_x^2 \theta_o(x) - \beta \partial_x u_1(x)$$

Quando  $x \rightarrow 0$  ou quando  $x \rightarrow L$ , devemos ter:

$$\partial_t^2 u(0, 0) = 0, \quad \partial_t^2 u(L, 0) = 0, \quad \partial_t \theta(0, 0) = 0, \quad \partial_t \theta(L, 0) = 0.$$

Portanto, temos as seguintes relações de compatibilidade

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u_o(0) - \alpha \partial_x \theta_o(0) &= 0, & \partial_x^2 u_o(L) - \alpha \partial_x \theta(L) &= 0 \\ \partial_x^2 \theta_o(0) - \beta \partial_x u_1(0) &= 0, & \partial_x^2 \theta_o(L) - \beta \partial_x u_1(L) &= 0. \end{aligned}$$

Quando os dados iniciais pertencem a  $C_0^\infty$ , as condições acima se verificam de maneira trivial.

Multiplicando a equação (3.48) por  $\partial_t^2 u$  e a equação (3.49) por  $\frac{\alpha}{\beta} \partial_t \theta$ ,

$$\frac{d}{dt} E_2(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_{xt}^2 \theta|^2 dx$$

onde

$$E_2(t) = \int_0^L \left( |\partial_t^2 u|^2 + |\partial_{xt}^2 u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\partial_t \theta|^2 \right) dx.$$

Multiplicamos a equação (3.44) por  $\partial_{xt}^2 u$  e integramos de 0 até  $L$ ,

$$\int_0^L \partial_t \theta \partial_{xt}^2 u dx - \int_0^L \partial_x^2 \theta \partial_{xt}^2 u dx + \beta \int_0^L \partial_{xt}^2 u^2 dx = 0$$

logo

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx - \int_0^L \theta \partial_{xtt}^3 u dx = \int_0^L \partial_x^2 \theta \partial_{xt}^2 u dx - \beta \int_0^L \partial_{xt}^2 u^2 dx.$$

Substituindo a equação (3.40)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx &= - \int_0^L \partial_x \theta \partial_t^2 u dx + \int_0^L \partial_x^2 \theta \partial_{xt}^2 u dx - \beta \int_0^L \partial_{xt}^2 u^2 dx \\ &= - \int_0^L \partial_x \theta [\partial_x^2 u - \alpha \partial_x \theta] dx + \int_0^L \partial_x^2 \theta \partial_{xt}^2 u dx \\ &\quad - \beta \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx \\ &= - \int_0^L \partial_x^2 u \partial_x \theta dx + \alpha \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \int_0^L \partial_x^2 \theta \partial_{xt}^2 u dx \\ &\quad - \beta \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx \end{aligned} \tag{3.50}$$

Para introduzir o termo  $\partial_x^2 \theta$ , multiplicamos a equação (3.43) por  $-\partial_{xxt}^3 u$  e a equação (3.44) por  $-\frac{\alpha}{\beta} \partial_x^2 \theta$  temos:

$$\begin{aligned} - \int_0^L \partial_t^2 u \partial_{xxt}^3 u dx + \int_0^L \partial_x^2 u \partial_{xxt}^3 u dx - \alpha \int_0^L \partial_x \theta \partial_{txx}^3 u dx &= 0 \\ - \int_0^L \frac{\alpha}{\beta} \partial_t \theta \partial_x^2 \theta dx + \frac{\alpha}{\beta} \int_0^L \partial_x^2 \theta^2 dx - \int_0^L \partial_{xt}^2 u \partial_x^2 \theta dx &= 0 \end{aligned}$$



Integrando por partes e somando,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx + \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx + \frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \right\} = -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_x^2 \theta(x, t)|^2 dx + \alpha \partial_x \theta(x, t) \partial_{xt}^2 u(x, t) \Big|_0^L \quad (3.51)$$

Multiplicando a equação (3.43) por  $-\partial_x^2 u$ ,

$$-\int_0^L \partial_t^2 u \partial_x^2 u dx + \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx - \alpha \int_0^L \partial_x \theta \partial_x^2 u dx = 0$$

logo

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \partial_t u \partial_x^2 u dx + \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx - \alpha \int_0^L \partial_x \theta \partial_x^2 u dx = 0$$

portanto

$$-\frac{d}{dt} \int_0^L \partial_t u \partial_x^2 u dx + \int_0^L \partial_t u \partial_{xxt}^3 u = -\int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx + \alpha \int_0^L \partial_x \theta \partial_t^2 u dx.$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \partial_t u \partial_x^2 u dx &= \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx - \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx + \alpha \int_0^L \partial_x \theta \partial_x^2 u dx \\ &\leq \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx. \end{aligned}$$

Lembrando que temos as seguintes variações

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_1(t) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int |\partial_x \theta|^2 dx, & \frac{d}{dt} E_2(t) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int |\partial_{xt}^2 \theta|^2 dx, \\ \frac{d}{dt} E_3(t) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int |\partial_x^2 \theta|^2 dx - \alpha \partial_x \theta(x, t) \partial_{xt}^2 u(x, t) \Big|_0^L \end{aligned}$$

onde cada energia esta dada por,

$$\begin{aligned} E_1(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L (|\partial_t u|^2 + |\partial_x u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\theta|^2) dx, & E_2(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L (|\partial_t^2 u|^2 + |\partial_{xt}^2 u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\partial_t \theta|^2) dx \\ E_3(t) &= \frac{1}{2} \int_0^L (|\partial_{xt}^2 u|^2 + |\partial_x^2 u|^2 + \frac{\alpha}{\beta} |\partial_x \theta|^2) dx \end{aligned}$$

Derivando as seguintes expressões,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \partial_x^2 u \partial_t u dx &\leq \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \\ &= \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx - \int_0^L (\partial_x^2 u \partial_x \theta + \alpha \partial_x \theta^2) dx + \int_0^L \partial_x^2 \theta \partial_{xt}^2 u dx. \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx &\leq -\beta \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx - \int_0^L \partial_x^2 u \partial_x \theta dx + \alpha \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^L \partial_x^2 \theta \sqrt{\beta} \partial_{xt}^2 u dx \end{aligned} \quad (3.53)$$

Agrupando e aplicando uma identidade numérica,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx &\leq -\frac{\beta}{2} \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx + \frac{1}{2\beta} \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx \\ &- \int_0^L [\partial_x^2 u \partial_x \theta - \alpha |\partial_x \theta|^2] dx. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação (3.52) e (3.53) por  $\frac{\beta}{2}$  e somando-as,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\beta}{2} \int_0^L \partial_x^2 u \partial_t u dx + \int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx \right\} &\leq -\frac{\beta}{2} \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx - \frac{\beta}{2} \int_0^L \partial_x^2 u^2 dx \\ &+ \left( \alpha + \frac{\beta \alpha^2}{4} \right) \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \frac{1}{2\beta} \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx \\ &- \int_0^L \partial_x^2 u \partial_x \theta dx. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_1(t) &\leq -\frac{\beta}{4} \int_0^L |\partial_{xt}^2 u|^2 dx - \frac{\beta}{4} \int_0^L |\partial_x^2 u|^2 dx \\ &+ \left( \alpha + \frac{1}{\beta} + \frac{\beta \alpha^2}{4} \right) \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \frac{1}{2\beta} \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx \end{aligned}$$

onde

$$F_1(t) = \frac{\beta}{2} \int_0^L \partial_x^2 u \partial_t u dx + \int_0^L \theta \partial_{xt}^2 u dx.$$

A seguir mostramos um resultado simples que nos ajudará a provar o resultado principal

**Lema 3.1.** *Se  $v(=v(x,t))$  é uma solução fraca de*

$$\partial_t^2 v - \partial_x^2 v = f, \quad \text{em } ]0, L[ \times ]0, T[ \quad (3.54)$$

onde

$$v \in C^1(0, T; L^2(0, L)) \cap C(0, T; H^1(0, L)) \quad e \quad f \in L^2(0, T; L^2(0, L)).$$

Então é válido a seguinte identidade

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left( x - \frac{L}{2} \right) \partial_t v \partial_x v dx &= - \left( x - \frac{L}{2} \right) \left[ |\partial_t v|^2 + |\partial_x v|^2 \right] \Big|_0^L \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_t v|^2 + |\partial_x v|^2 dx - \int_0^L \left( x - \frac{L}{2} \right) \partial_x v f dx \end{aligned} \quad (3.55)$$

**Demonstração.** Vamos mostrar no caso em que

$$v \in C^2(0, T; L^2) \cap C^1(0, T; H^1) \cap C(0, T; H^2), \quad \text{ou} \quad v \in C^i(0, T; H^{2-i}), \quad i = 0, 1, 2.$$

Por densidade obtemos o resultado para soluções fracas. Multiplicando a equação (3.54) por  $(x - \frac{L}{2}) \partial_x v$ :

$$\underbrace{\int_0^L \partial_t^2 u \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_x v \, dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^L \partial_x^2 v \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_x v \, dx}_{I_2} = \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_x v f \, dx$$

Resolvendo cada somando obtemos,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{d}{dt} \int_0^L \partial_t v \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_x v \, dx - \int_0^L \partial_t v \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_{xt}^2 v \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L \partial_t v \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_x v \, dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{d}{dx} |\partial_t v|^2 \, dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t v \partial_x v \, dx - \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right) |\partial_t v|^2 \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_t v|^2 \, dx \end{aligned}$$

também

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^L \partial_x^2 v \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_x v \, dx = - \frac{1}{2} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \frac{d}{dx} |\partial_x v|^2 \, dx \\ &= - \frac{1}{2} \left(x - \frac{L}{2}\right) |\partial_x v|^2 \Big|_0^L + \frac{1}{2} \int_0^L |\partial_x v|^2 \, dx \end{aligned}$$

Somando  $I_1$  com  $I_2$  tem-se a identidade (3.55). □

**Observação 7:** Quando temos  $\partial_x v(L, t) \in L^2(0, T)$

$$\begin{aligned} - \left(x - \frac{L}{2}\right) \left[ |\partial_t v(x, t)|^2 + |\partial_x v(x, t)|^2 \right] \Big|_0^L &= - \left(x - \frac{L}{2}\right) [\partial_t v^2(L, t) + \partial_x v^2(L, t)] \\ &\quad + \left(x - \frac{L}{2}\right) [\partial_t v^2(0, t) + \partial_x v^2(0, t)] \end{aligned}$$

Na identidade,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t v \partial_x v \, dx &= - \frac{L}{2} [\partial_t v(L, t)^2 + \partial_x v(L, t)^2 + \partial_t v(0, t)^2 + \partial_x v(0, t)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^L (|\partial_t v|^2 + |\partial_x v|^2) \, dx - \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_x v f \, dx \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \int_0^T [\partial_t v(L, t)^2 + \partial_x v(L, t)^2 + \partial_t v(0, t)^2 + \partial_x v(0, t)^2] \, dt &= - \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t v \partial_x v \, dx \Big|_0^T \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L (|\partial_t v|^2 + |\partial_x v|^2) \, dx \, dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) f \partial_x v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

**Observação 8:** A última identidade implica que o traço das derivadas de  $v$  está bem definida. Esta propriedade é conhecida como “regularidade oculta”.

Voltando ao decaimento,

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -\alpha \partial_x \theta$$

Derivando em relação ao tempo, temos:

$$\partial_t^3 u - \partial_{xt}^3 u = -\alpha \partial_{xt}^2 \theta.$$

Note que  $\partial_t u(0, t) = \partial_t u(L, t) = 0$ . Usando o Lema 3.1, com  $v = \partial_t u$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t^2 u \partial_{xt}^2 u dx &= -\frac{L}{2} [|\partial_{xt}^2 u(0, L)|^2 + |\partial_{xt}^2 u(L, t)|^2] \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^L (|\partial_{xt}^2 u|^2 + |\partial_t^2 u|^2) dx - \alpha \int_0^L \partial_{xt}^2 \theta \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_{xt}^2 u dx \end{aligned}$$

Da equação,  $\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - \alpha \partial_x \theta$  de onde,

$$|\partial_t^2 u|^2 \leq 2|\partial_x^2 u|^2 + 2\alpha^2 |\partial_x \theta|^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t^2 u \partial_{xt}^2 u dx &\leq -\frac{1}{2} [|\partial_{xt}^2 u(0, t)|^2 + |\partial_{xt}^2 u(L, t)|^2] \\ &+ \int_0^L (|\partial_x^2 u|^2 + |\partial_x u|^2) dx + \alpha^2 \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \frac{L^2 \alpha^2}{2} \int_0^L |\partial_{xt}^2 \theta|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Estimando,

$$\begin{aligned} \left| \alpha \partial_x \theta \partial_{xt}^2 u \Big|_0^L \right| &\leq \alpha \sqrt{|\partial_x \theta(0, t)|^2 + |\partial_x \theta(L, t)|^2} \sqrt{|\partial_{xt}^2 u(0, t)|^2 + |\partial_{xt}^2 u(L, t)|^2} \\ &\leq \frac{\alpha}{2\varepsilon} [|\partial_x \theta(0, t)|^2 + |\partial_x \theta(L, t)|^2] + \frac{\varepsilon}{2} [|\partial_{xt}^2 u(0, t)|^2 + |\partial_{xt}^2 u(L, t)|^2] \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg; para qualquer  $w \in H^1(\Omega)$  temos,

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c \|w\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Assim, reescrevendo a desigualdade anterior:

$$|w(x)| \leq c \left( \int_0^L w^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^L \partial_x w^2 dx \right)^{\frac{1}{4}}$$

Aplicando para  $\partial_x \theta(x, t)$ :

$$|\partial_x \theta(x, t)| \leq c \left( \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{4}} \left( \int_0^L (\partial_x \theta^2 + \partial_x^2 \theta^2) dx \right)^{\frac{1}{4}}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} |\partial_x \theta(x, t)|^2 &\leq c \left( \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^L (\partial_x \theta^2 + \partial_x^2 \theta^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left( \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \left( \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^L \partial_x^2 \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq c \left( \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + c \left( \int_0^L \partial_x \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^L \partial_x^2 \theta^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$|\partial_x \theta(x, t)|^2 \leq c_\varepsilon \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \varepsilon^2 \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx.$$

Donde segue que,

$$\left| \alpha \partial_x \theta \partial_{xt}^2 u \Big|_0^L \right| \leq c_\varepsilon \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx + \alpha \varepsilon \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} [|\partial_{xt}^2 u(0, t)|^2 + |\partial_{xt}^2 u(L, t)|^2]$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_3(t) &= -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx - \alpha \partial_x \theta \partial_{xt}^2 u \Big|_0^L \\ &\leq -\left( \frac{\alpha}{\beta} - \alpha \varepsilon \right) \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx + c_\varepsilon \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} [|\partial_{xt}^2 u(0, t)|^2 + |\partial_{xt}^2 u(L, t)|^2] \end{aligned} \quad (3.57)$$

Somando a equação (3.56) com a equação (3.57) e multiplicando o resultado por  $\frac{2\varepsilon}{L}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F_1(t) &\leq -\left( \frac{\alpha}{\beta} - \alpha \varepsilon \right) \int_0^L |\partial_x^2 \theta|^2 dx \\ &\quad - \varepsilon [|\partial_{xt}^2 u(0, t)|^2 + |\partial_{xt}^2 u(L, t)|^2] + \varepsilon \int_0^L |\partial_x \theta|^2 dx \\ &\quad + \varepsilon L \alpha^2 \int_0^L |\partial_{xt}^2 \theta|^2 dx + \frac{2\varepsilon}{L} \int_0^L (|\partial_{xt}^2 u|^2 + |\partial_x^2 u|^2) dx \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde

$$F_1(t) = E_3(t) + \frac{2\varepsilon}{L} \int_0^L \left( x - \frac{L}{2} \right) \partial_t^2 u \partial_{xt} u dx$$

Da equação (3.58) multiplicada por  $\alpha$  obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_2(t) &\leq -\left(\frac{\alpha}{2\beta} - \alpha\varepsilon\right) \int_0^L |\partial_x^2\theta|^2 dx - \varepsilon [\partial_{xt}^2 u^2(0, L) + \partial_{xt}^2 u^2(L, t)] \\ &\quad + c_\varepsilon \int_0^L |\partial_x\theta|^2 dx - \left(\frac{\alpha\beta}{4} - \frac{2\varepsilon}{L}\right) \int_0^L (|\partial_x^2 u|^2 + |\partial_{xt}^2 u|^2) dx \end{aligned}$$

onde

$$F_2(t) = E_3(t) + \frac{2\varepsilon}{L} \int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right) \partial_t^2 u \partial_{xt}^2 u dx + \alpha F_1(t).$$

Lembrando que,

$$\frac{d}{dt}E_1(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_x\theta|^2 dx, \quad \frac{d}{dt}E_2(t) = -\frac{\alpha}{\beta} \int_0^L |\partial_{xt}^2\theta|^2 dx.$$

Agora tomando  $\mathcal{L}(t) = \mathcal{N}E_1(t) + E_2(t) + F_2(t)$ , satisfaz:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\gamma \underbrace{\int_0^L (|\partial_x^2\theta|^2 + |\partial_{xt}^2\theta|^2 + |\partial_x\theta|^2 + |\partial_x^2 u|^2 + |\partial_{xt}^2 u|^2) dx}_{\mathcal{N}(t)}$$

Para  $\mathcal{N}$  suficientemente grande e  $\varepsilon$  pequeno. Também temos:

$$c_0 [E_1(t) + E_2(t) + F_2(t)] \leq \mathcal{L}(t) \leq c_1 \mathcal{N}(t)$$

sendo a última desigualdade dada pela desigualdade de Poincaré. □

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, (1975).
- [2] Brezis, H., *Analyse Fonctionnelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, (1983).
- [3] Chiriță, S., *On the Asymptotic Partition of the Energy in Linear Thermoelasticity*. Quarterly on App. Math., vol XLV, **2**, (1987), 327-340.
- [4] Dafermos, C., *On the Existence and the Asymptotic Stability of Solutions to the Equations of the Linear Thermoelasticity*, Arch. Rat. Mec. Anal., vol 29, 2, (1928), 241-271.
- [5] Dassios, G. & Grillakis, M., *Dissipation Rates and Partition of the Energy in Thermoelasticity*, Arch. Rat. Mec. Anal., vol 87, **1**, (1984), 49-91.
- [6] Duvaut, G., *Problem di Signorini en Viscoélasticité Linéaire*, CRAS, Paris, 268, (1969), 1044-1046.
- [7] Friedman A., *Partial Differential Equations*, Holt, Rinehart and Winston, Inc, (1969).
- [8] Lions, J. L., *Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non lineares*, Dunod Gauthier Villars, Paris (1969).
- [9] Liu, Z., & Zheng, S., *Uniform Exponential Stability and Aproximation in Control of Thermoelastic System*,
- [10] Muñoz Rivera, J. E., *Descomposition of the Displacement Vector Field and Decay Rates in Linear Thermoelasticity*,
- [11] Muñoz Rivera, J. E., *Energy Decay Rates in Linear Thermoelasticity*, Funkcialaj Ekvacioj, **7**, (1994), 289-303.
- [12] Racke, R. & Jiang, S.; *Evolution Equations in Thermoelasticity*, Champman & Hall/CRC, Boca Raton, (2000).

- [13] John, F. *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).
- [14] Kupradze, V. D., *Tree-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity*, Amsterdam, North Holland, (1979).