Exponential Stabilization of the Kirchhoff-Viscoelastic Equations

Félix Pedro Q. Gómez[1]
1.- Depto. de Matemática, MTM, UFSC, 88040-900, Trindade, SC e-mail: quispe@mtm.ufsc.br

Abstract- In this work we study the existence, uniqueness and decay of solutions to a class of viscoelastic equations in a separable Hilbert space H given by

$$\partial_t^2 u(t) + M([u(t)]Au(t) - \int_0^t g(t-\tau)Au(\tau)d\tau = 0,$$
$$u(0) = u_{_0}, \qquad \partial_t u(0) = u_{_1}$$

KeyWord: Kirchhoff Equations, Global Solutions, Viscoelasticity, Gevrey class.

Estabilização Exponencial de Equações Vicoelásticas-Kirchhoff

Resumo- Neste artigo mostramos a existência, unicidade e decaimento das soluções para uma determinada classe de equações viscoelásticas em espaços de Hilbert separáveis,

$$\partial_t^2 u(t) + M([u(t)]Au(t) - \int_0^t g(t-\tau)Au(\tau)d\tau = 0,$$
$$u(0) = u_{_0}, \qquad \partial_t u(0) = u_{_1}$$

Palavras-chave: Equações de Kirchhoff, Soluções Globais, Viscoelasticidade, Classes de Gevrey.

1. INTRODUÇÃO

As equações de ondas não lineares do tipo Kirchhoff foram estudadas por muitos autores e até agora continua em aberto a questão principal respeito da existência global de soluções para o sistema

$$u_{tt} + M(\|A^{1/2}u\|^2)Au = 0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x)$$

com dados em $D(A) \times D(A^{1/2})$. Para dados analíticos o resultado é conhecido e é devido a Arosio e Spagnolo (1984)

Neste trabalho apresentamos resultados de existência, unicidade e decaimento para uma classe de sistemas viscoelásticos da forma

$$u_{tt} + M([u])Au - \int_0^t g(t-\tau)N([u])Aud\tau = 0$$
$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x)$$

onde por $[u(t)]$ estamos denotando o vetor

$$[u(t)] = \Big((u(t), u_t(t)), (Au(t), \partial_t u(t)),$$
$$||A^{1/2}u(t)||^2, ||A^{1/2}\partial_t u(t)||^2, ||Au(t)||^2\Big) \in \mathbb{R}^5.$$

Mostramos que existem soluções globais para dados $(u_0, u_1) \in D(A) \times D(A^{1/2})$ quando eles estão suficientemente próximos dos dados analíticos. Isto contribue substancialmente para o problema de existência, uma vez que não eram conhecidos resultados para dados grandes nos espaços de Sobolev do tipo $D(A) \times D(A^{1/2})$.

Os resultados que apresentamos aqui melhoram todos aqueles resultados obtidos para equações viscoelásticas com não linearidade do tipo Kirchhoff.

2. RESULTADOS

Os resultados que apresentamos aqui melhoram todos aqueles resultados obtidos para equações viscoelásticas com não linearidade do tipo Kirchhoff. Mostraremos a existência de soluções para dados pequenos. Este resultado é baseado nos resultados de decaimento para o problema linear correspondente. Finalmente, estendemos os resultados de existência para dados analíticos e baseados neste resultado obtemos existência de soluções para uma classe de dados grandes nos espaços $D(A) \times D(A^{1/2})$. Com este resultado damos uma resposta parcial ao problema de existência para dados não analíticos.

3. CONCLUSÕES

O resultado principal mostra que sob hipóteses apropriadas sobre a núcleo do termo de memória g e sobre as funções M e N, existem soluções globais quando os dados $(u_0, u_1) \in D(A) \times D(A^{1/2})$ se encontram proximos de dados iniciais A-analíticos. Isto é substancialmente importante para o problema de existência, pois somente se conhece existência global para dados A-analíticos. O problema esta sem solução quando os dados iniciais estão nos espaços tipo Soblev $D(A) \times D(A^{1/2})$ ou mesmo em $D(A^l) \times D(A^{l-1/2})$, onde $l > 0$.

REFERÊNCIAS

AROSIO, A. & SPAGNOLO, S., **Global solution of the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic equation** Nonlinear partial differential equations an their applications, College de France Seminar, **6**. Edited by H. Brezis & J. L. Lions. Pitman - London 1984, 1-26.

BERNSTEIN, S., **Sur une classe d'equations fonctionnelles aux dérivées partielles**, Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. Mat. 4 (1940) 17-26 (Math. Rev. 2 No 102).

D'ANCONA, P. & SPAGNOLO, S., **Global solvability for the degenerate Kirchhoff Equation with real analytic data**, Invent. Math., **108**, (1992), 247-262.

GÓMEZ, F., & RIVERA, J., **Existece and Decay in Non Linear Viscoelasticity**, Bolletino UMI, (8), 6-**B**, (2003), 1-37.

MUÑOZ RIVERA, J. E., **Asymptotic behaviour in Linear Viscoelasticity**, Quarterly of Applied Mathematics, **III**, 4, (1994), 629-648.

NISHIHARA, K., **Global existence and Asymptotic behaviour of the solution of some quasilinear hyperbolic equation with linear damping**. *Funkcialaj Ekvacioj, 32, pp 343-355 (1989).*

TORREJÓN, R. & YONG, J., **On a Quasilinear Wave Equation with memory**, Nonlinear Analysis, Theory and Methods & Applications, **16**, 1, (1991), 61-78.