Synergismus Scyentifica UTFPR

XIII ERMAC

Mini Curso

Aplicações da Álgebra Linear a Equações Diferenciais

Gilson Tumelero
Marieli Musial
Colegiado de Matemática - FAFIUV

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Pato Branco, setembro de 2009

Sumário

Introdução **1**

1 Tópicos de Álgebra Linear **3**

1.1 Transformações Lineares 3

1.1.1 Matrizes Associadas a Transformações Lineares 4

1.1.2 Autovalores e Autovetores 5

1.1.3 Autovalores e Autovetores de uma Matriz 5

1.1.4 Polinômio Característico 6

2 Sistema de Equações Diferenciais **8**

Referências Bibliográficas **13**

Introdução

Para alguns estudantes o estudo intrínseco da matemática, serve como motivação suficiente, mas para a maioria, as possíveis aplicações importantes a outros campos é que faz com que tal estudo seja mais motivador.

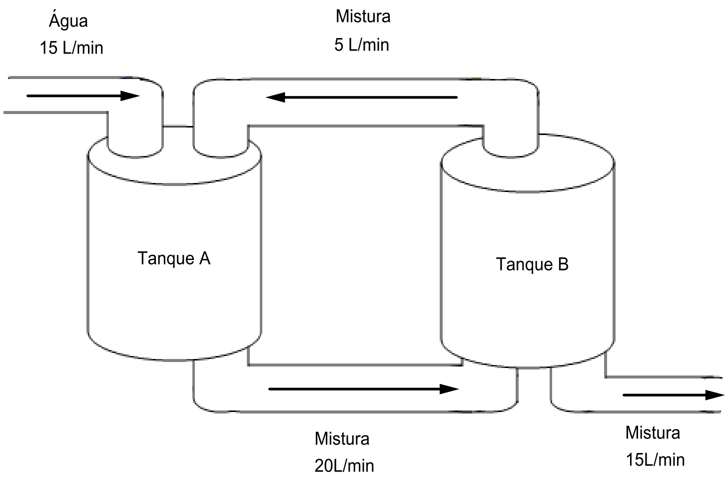
Muitos príncipios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são relações, que envolvem a taxa a qual as coisas acontecem. Expressas em liguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. As equações envolvendo derivadas são equações diferenciais. Portanto, para compreender e investigar problemas envolvendo o movimento de fluídos, fluxo de corrente elétrica em circuitos, a dissipação de calor em objetos sólidos, aumento e diminuição de populações, entre muitos outros, é necessário saber alguma coisa sobre equações diferenciais.

Uma equação diferencial que descreve algum processo físico é chamada, muita vezes, de modelo matemático.

Mas, ao invés de uma equação diferencial, podemos considerar sistemas de equações diferenciais. Estaremos então procurando um conjunto de funções que satisfaçam simultaneamente várias equações diferenciais. Vamos procurar também o que chamamos de solução geral do sistema (sistema homogêneo).

Com o objetivo de motivar o estudo iniciamos com o seguinte problema:

Dois tanques estão conectados como ilustrado na figura abaixo. Inicialmente, o tanque A contém 200 litros de água, onde foram dissolvidos 60g de sal, e o tanque B contém 200 litros de água pura. Bombeia-se líquido para dentro e para fora dos dois tanques a taxas mostradas no diagrama. Queremos determinar a quantidade de sal em cada tanque no instante t.



Mas para isto, precisamos relembrar de alguns conceitos.

Capítulo 1

Tópicos de Álgebra Linear

O objetivo deste capítulo é fornecer alguns conceitos e resultados que nos serão necessário para alcançarmos o objetivo do trabalho. Contudo, será feita uma exposição bastante simples e objetiva dos mesmos sem uma preocupação de demosntrar resultados e dar exemplos mais elaborados dos conceitos. Para quem estiver interessado em se aprofundar mais nos estudos destes conceitos pode consultar os livros que estão na bibliografia.

1.1 Transformações Lineares

Definição: Sejam U e V espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$. Uma função $T : U \to V$ é uma *transformação linear* se

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$, $\forall\, u, v \in U$
2. $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{K}$ e $\forall\, u \in U$.

Exemplo 1: Seja $T = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $T(x) = 3x$ é uma transformação linear.

De fato, sejam x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ então

$$T(x_1 + x_2) = 3(x_1 + x_2) = 3x_1 + 3x_2 = T(x_1) + T(x_2)$$

e ainda seja $x \in \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$T(\lambda x) = 3(\lambda x) = \lambda(3x) = \lambda T(x).$$

Podemos também usar matrizes para representar transformações lineares sobre espaços de dimensão finita, da seguinte forma:

1.1.1 Matrizes Associadas a Transformações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ com $dim_{\mathbb{K}}V = n$ e $dim_{\mathbb{K}}W = m$. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_n\}$ base de V, $\mathcal{B}' = \{w_1, \cdots, w_m\}$ base de W e $T : V \to W$ uma transformação linear. Então $T(v_1), \cdots, T(v_n) \in W$ e assim podemos escrever

$$\begin{gathered} T(v_1) = a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{gathered}$$

A transposta da matriz de coeficientes deste sistema, denotada por $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ é chamada de *matriz da transformação T com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$*:

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A$$

Observe que T passa a ser a aplicação linear associada à matriz A e bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$, isto é, $T = T_A$.

Exemplo 2: Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear dada por

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, 3x - 2y + 4z)$$

e considere as bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Para calcularmos $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ temos:

$$T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1(1, 0) - 2(0, 1)$$

$$T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1(1, 0) + 4(0, 1)$$

então

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1.1.2 Autovalores e Autovetores

Definição: Seja $T : V \to V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda\, v$, dizemos que λ é *autovalor* de T e v é um *autovetor* de T associado a λ.

Exemplo 3: Consideremos $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (2x + 2y, y)$. Queremos resolver $T(x, y) = \lambda(x, y)$ para $(x, y) \neq (0, 0)$. Isto é, $(2x + 2y, y) = \lambda(x, y)$, assim

$$\begin{cases} 2x + 2y = \lambda\, x \\ y = \lambda\, y \end{cases}$$

Consideremos os casos:

- Se $y \neq 0$ então da segunda equação temos $\lambda = 1$. Logo $2x + 2y = x$ e assim $y = -\frac{1}{2}x$. Obtemos assim, para o autovalor $\lambda = 1$, os autovetores do tipo $(x, -\frac{1}{2}x)$, $x \neq 0$.

- Se $y = 0$ então $x \neq 0$ pois $(x, y) \neq (0, 0)$. Da primeira equação temos que $2x = \lambda x$, ou seja, $\lambda = 2$. Portanto outro autovalor é 2 e qualquer vetor não nulo $(x, 0)$ é um autovetor correpondente.

Temos assim, para esta transformação T, autovetores $(x, -\frac{1}{2}x)$, $x \neq 0$ associados a 1 e autovetores $(x, 0)$, $x \neq 0$ associados a 2.

Definição: O subespaço $V_\lambda = \{v \in V \ : \ T(v) = \lambda v\}$ é chamado o subespaço associado ao autovalor λ.

Como vimos anteriormente, uma transformação linear pode ser representada por uma matriz. Assim faz sentido em pensar em como encontrar autovalores e autovetores se conhecermos apenas a matriz da transformação. A seguir daremos de uma forma sucinta um método para encontrá-los.

1.1.3 Autovalores e Autovetores de uma Matriz

Dada uma matriz quadrada A, de ordem n, estaremos entendendo por autovalor e autovetor de A o autovalor e autovetor da transformação linear $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, associada a matriz A em relação a base canônica, isto é, $T_A(v) = Av$ (v na forma coluna). Assim, um autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de A e um autovetor $v \in \mathbb{R}^n$, v não nulo, são soluções da equação

$$Av = \lambda v.$$

1.1.4 Polinômio Característico

Seja A uma matriz de ordem n. Chama-se polinômio carcaterístico da matriz A o $det(\lambda I - A) = 0$ e é denotado por $p(\lambda)$.

Exemplo 4: Consideremos a matriz associada a transformação linear do exemplo 3, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculemos os autovalores e autovetores associados a essa matriz:

$$det(\lambda I - A) = det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

Assim, o polinômio característico é

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$$

e os autovalores são as raízes deste polinômio. Isto é,

$$\lambda = 1 \text{ e } \lambda = 2.$$

Para encontrarmos os autovetores, temos:

Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & -2 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

ou seja,

$$v = (-\frac{1}{2}x, x),\ x \neq 0$$

é o autovetor associado ao autovalor 1.

Para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -2 \\ 0 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0 \text{ e } x \neq 0$$

ou seja,

$$v = (x, 0),\ x \neq 0$$

é o autovetor associado ao autovalor 2.

Temos um importante resultado da álgebra linear que nos fala que:

Teorema: Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.

Capítulo 2

Sistema de Equações Diferenciais

Com estes conceitos acima, vamos dar início ao estudo a um sistema de equações diferenciais, isto é, encontrar o conjunto das soluções de um sistema de equações diferenciais homogêneo

$$\frac{d^n v}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + ... + b_0 v = 0$$

é o mesmo que encontrar o espaço nulo $\{v \in V \text{ tal que } T^n v = 0\}$, para algum inteiro n dependendo de v. Por quê? A aplicação T que leva uma função v de uma variável na sua derivada, $Tv = \frac{dv}{dt}$ é linear e o espaço vetorial F_n de funções n-deriváveis da função v de t a valores complexos (onde a derivada da função $v(t) = a(t) + b(t)i$ é definida como $\frac{dv}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt}i$). Se $f(x)$ denotar um polinômio $f(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_0$, $f(T)$ é linear em F_n e podemos expressar o conjunto solução para $\frac{d^n v}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + ... + b_0 v = 0$ como o espaço nulo $W = \{v \in F_n \text{ tal que } f(T)v = 0\}$ de $f(T)$.

Para determinar o espaço nulo W de $f(T)$, note que $TW \subset W$. Tomando $v \in W$ formamos o subespaço V de W sobre $\mathbb{C}$ gerado pelas funções $v, Tv, ..., T^{n-1}v$. Sendo $f(T)v = 0$ vemos que $T^n v$ é uma combinação linear de $v, Tv, ..., T^{n-1}v$ em V, isto é $TV \subset V$.

Assim podemos considerar T como uma transformação linear de um espaço vetorial V de dimensão finita. Como $f(T)v = 0$, V é a soma direta $V = V_{a_1}(T) \oplus V_{a_2}(T) \oplus ... \oplus V_{a_k}(T)$, onde $f(x) = (x - a_1)^{m_1}...(x - a_k)^{m_k}$ e $V_{a_1}(T), ..., V_{a_k}(T)$ são generalização do subespaço caracteristico (subespaço gerado pelos autovetores da transformação T). Escrevendo v como $v = v_1 + v_2 + ... + v_k$ com $v_r \in V_{a_r}(T)$ para todo r, temos $(T - a_r I)^{m_r} v_r = 0$.

Fixando r e denotando $a_r = a$, $v_r = w$ e $m_r = m$. Sendo $T(e^{at}u) = ae^{at}u + e^{at}Tu$ para alguma função diferenciavel u temos $(T - aI)(e^{at}u) = e^{at}Tu$. Aplicando $(T - aI)$ no sistema $m-1$ vezes, temos $(T-aI)^m(e^{at}u) = e^{at}T^m u$. Substituindo u por $e^{-at}w$ temos que $(T-aI)^m(e^{at}e^{-at}w) = e^{at}T^m(e^{-at}w)$, isto é, $(T-aI)^m w = e^{at}T^m(e^{-at}w)$. Por outro lado a condição $(T-aI)^m w = 0$ é equivalente a condição $e^{-at}w$ é um polinômio $p(t)$ de grau menor que m. Mas então $w = p(t)e^{at}$. Assim w é a combinação linear das funções

$$e^{at}, te^{at}, ..., t^{m-1}e^{at}.$$

Reciprocamente, é fácil verificar que as funções $e^{at}, te^{at}, ..., t^{m-1}e^{at}$ são soluções da equação diferencial $(T-aI)^m = 0$. Sendo $(x-a)^m = (x-a_r)^{m_r}$ um fator de $f(x)$, eles também são soluções da equação diferencial $f(T)v = 0$.

Assim cada solução $v \in W$ é uma soma de funções v_r a qual é uma combinação linear de $e^{a_r t}, te^{a_r t}, ..., t^{m_r-1}e^{a_r t}$, concluímos que

$$\{t^{n_r}e^{a_r t}/1 \leqslant r \leqslant k, 0 \leqslant n_r \leqslant m_r - 1\}$$

gera W. Portanto W é de dimensão finita. Considerando T como uma transformação linear em W temos que $f(T)W = 0$ onde $W = W_{a_1}(T) \oplus W_{a_2}(T) \oplus ... \oplus W_{a_k}(T)$, onde $W_{a_1}(T), W_{a_2}(T), ..., W_{a_k}(T)$, são generalizações dos subespaços característicos (subespaços gerados pelos autovetores associados aos autovalores a_i, $i = 1, ..., k$). Então as funções $e^{a_r t}, te^{a_r t}, ..., t^{m_r-1}e^{a_r t}$ são elementos linearmente independentes de $W_{a_r}(T)$ para cada r. O conjunto $\{t^{n_r}e^{a_r t}/1 \leqslant r \leqslant k, 0 \leqslant n_r \leqslant m_r - 1\}$ é linearmente independente e temos:

Teorema: O espaço W de funções v a valores complexos n-diferenciaveis soluções de: $\frac{d^n v}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + ... + b_0 v = 0$ é n-dimensional sobre $\mathbb{C}$. Uma base para W é $\{t^{n_r}e^{a_r t}/1 \leqslant r \leqslant k, 0 \leqslant n_r \leqslant m_{r-1}\}$, onde o polinômio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ é fatorado como $(x-a_1)^{m_1}...(x-a_k)^{m_k}$.

Podemos encontrar uma solução f para $\frac{d^n v}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + ... + b_0 v = 0$ satisfazendo a condição inicial $f^r(t_0) = v_r$ $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ para um valor específico t_0 de t? Fazendo a base para o espaço solução W por $f_1, ..., f_n$ encontramos $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_n f_n$ satisfazendo o sistema de equações

$$\begin{aligned}
&c_1 f_1(t_0) + \cdots + c_n f_n(t_0) = y_0 \\
&c_1 f_1^1(t_0) + \cdots + c_n f_n^1(t_0) = y_1 \\
&\vdots \\
&c_1 f_1^{n-1}(t_0) + \cdots + c_n f_n^{n-1}(t_0) = y_{n-1}
\end{aligned}$$

onde $f_s^{(r)}$ é a r-ésima derivada de f_s. É claro que podemos resolver o sistema de equações para o coeficiente c_r se encontrarmos o determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(t_0) & \cdots & f_n(t_0) \\ f_1^{(1)}(t_0) & \cdots & f_n^{(1)}(t_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n)}(t_0) & \cdots & f_n^{(n)}(t_0) \end{vmatrix}$$

chamado de wronskiano de $f_1, \cdots, f_n$, é não nulo em t_0. Então nós temos a base $\{t^{n_r}e^{a_r t}/1 \leqslant r \leqslant k, 0 \leqslant n_r \leqslant m_r - 1\}$, podemos a princípio calcular o wronskiano para esta base, o qual é não nulo para todo t_0. O fato interessante e um exercício fácil são os dois casos extremos: quando $m_r = 1$ para todo r e quando $k = 1$.

No lugar desta aproximação, temos a desvantagem que temos que calcular para as entradas $f^{(r)}(t_0)$ e então resolver para coeficientes c_r, queremos exibir a solução explicita em termos da função exponencial e^{tT}.

Para isto consideramos o sistema:

$$\begin{aligned} &u_1' = u_2 \\ &u_2' = u_3 \\ &\vdots \\ &u_n' = -b_0u_1 - \cdots - b_{n-1}u_n \end{aligned}$$

de n equações diferenciais lineares por n, representado pela equação matricial $u' = Tu$, onde T é a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ 0 & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a matriz campanheira para o polinômio $b_0 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x_n$ com os mesmos coeficientes como na equação diferencial. Este sistema de equações lineares relata a equação diferencial

$$\frac{d^n v}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + \ldots + b_0 v = 0?$$

A condição $u' = Tu$ implica que $v = u_1$ satisfaz as seguintes condições

$$u_1 = v^{(0)},\ u_2 = v^{(1)}, \cdots, u_n = v^{(n-1)}.$$

Mas então

$$v^{(n)} = u'_n = -b_0 u_1 - \cdots - b_{n-1} u_n,$$

isto é,

$$v^{(n)} = -b_0 v^{(0)} - \cdots - b_{n-1} v^{(n-1)}.$$

Então temos o seguinte:

Teorema: Para qualquer t_0 e $v_0, \cdots, v_{n-1}$, a equação diferencial $\frac{d^n v}{dt^n} + b_{n-1}\frac{d^{n-1}v}{dt^{n-1}} + ... + b_0 v = 0$ tem somente uma solução v tal que $v^{(r)}(t_0) = v_r$ para $0 \leqslant r \leqslant n-1$, chamando $v = u_1$ onde $u = e^{(t-t_0)T}\begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$.

Com isso podemos resolver o nosso problema inicial:

A solução do problema

Seja $y_1(t)$ e $y_2(t)$ a quantidade de gramas de sal nos tanques A e B respectivamente, nos instantes t. Inicialmente

$$Y(0) = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A quantidade total de líquido no tanque permanece 200 litros, já que a quantidade de bombeada para dentro é a mesma bombeada para fora em cada tanque. A taxa de variação da quantidade de sal em cada tanque é igual a taxa em que está sendo adicionada sal menos a taxa que está sendo bombeada para fora. Para o tanque A, a taxa em que se está adicionando sal é dada por

$$(5L/min)(\frac{y_2(t)}{200} g/L) = \frac{y_2(t)}{40} g/min$$

e a taxa de sal que está sendo bombeado para fora é

$$(20L/min)(\frac{y_1(t)}{200} g/L) = \frac{y_1(t)}{10} g/min.$$

Portanto, a taxa de variação para o tanque A é dada por

$$y'_1(t) = \frac{y_2(t)}{40} - \frac{y_1(t)}{10}.$$

Analogamente, para o tanque B, a taxa de variação é dada por

$$y'_2(t) = \frac{y_1(t)}{10} - \frac{y_2(t)}{10}.$$

Para encontrar $y_1(t)$ e $y_2(t)$, precisamos resolver o problema de valor inicial

$$Y' = AY, \quad Y(0) = Y_0$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que os autovalores são $\lambda_1 = -\frac{3}{20}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$ com autovetores associados

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ e } x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

A solução, então, tem que ser da forma

$$Y = c_1 e^{\frac{-3t}{20}} x_1 + c_2 e^{\frac{-t}{20}} x_2.$$

Quando $t = 0, \; Y = Y_0$, logo

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = Y_0$$

e podemos encontrar c_1 e c_2 resolvendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução do sistema é $c_1 = c_2 = 30$. Portanto, a solução do problema de valor inicial é

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30e^{\frac{-3t}{20}} + 30e^{\frac{-t}{20}} \\ 60e^{\frac{-3t}{20}} + 60e^{\frac{-t}{20}} \end{pmatrix}$$

Referências Bibliográficas

[1] Boldrini, J. L. *Álgebra Linear*. 2ª ed. São Paulo: Harba, 1986.

[2] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ª edição. LTC, Rio de Janeiro, 2006.

[3] Coelho, F. U.; Lourenço, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear.*, EdUSP, São Paulo, 2007.

[4] Herstein. I. N.; Winter, D. J. *Matrix Theory and Linear Algebra*. Macmillan Publishing Company, New York.

[5] Kolman, B. *Introdução a Álgebra Linear com Aplicações*. 6ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

[6] Lang, S. *Álgebra Linear*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1971.

[7] Leon, S. J. *Álgebra Linear com Aplicações*. LTC, Rio de Janeiro, 1998.