Synergismus Scyentifica UTFPR

XIII ERMAC

Mini Curso

Homogeneização

Joel Santos Souza

Departamento de Matemática - UFSC

Jocemar deQuadros Chagas

Departamento de Matemática e Estatística - UEPG

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Pato Branco, setembro de 2009

Sumário

Capítulo 1

Problema Elíptico estacionário

Em 1982, *D. Cioranescu* e *F. Murat* [6] consideraram o seguinte problema elíptico: Encontrar u_ε solução de:

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon &= f, & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon &= 0, & \text{sobre } \Gamma_\varepsilon, \end{cases}$$

onde f é dada em $H^{-1}(\Omega)$, e Ω_ε denota um domínio "perfurado" do $\mathbb{R}^N$, aberto e limitado, obtido de Ω através da extração de um conjunto S_ε de buracos S_i^ε distribuídos periodicamente na direção de cada eixo coordenado, ou seja, $\Omega_\varepsilon = \Omega / S_\varepsilon$, onde $S_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} S_i^\varepsilon$ com $N(\varepsilon)$ tendendo para o infinito quando ε tende para zero.

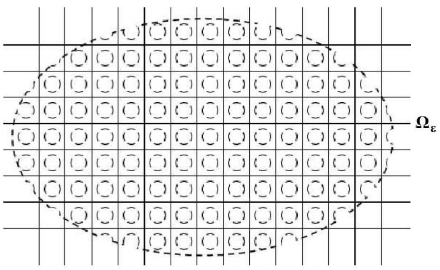

Figura 1.1: domínio Ω_ε, para $N = 2$

Cada buraco S_i^ε está em uma célula de dimensão $(2\varepsilon)^N$. No caso $N = 2$, tal célula é representada na figura 1.2, onde S_i^ε é um buraco e $a_{S_i^\varepsilon}$ representa o tamanho do buraco. Para se ter uma noção do tamanho dos buracos, para $N = 3$ tal tamanho é da ordem de ε^3.

Em vez de hipóteses geométricas diretas sobre os buracos S_i^ε, admite-se a existência de uma

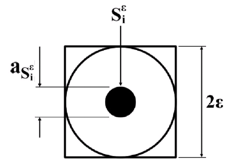

Figura 1.2: célula com dimensão $2\varepsilon \times 2\varepsilon$

família adequada de funções testes, dada pelo seguinte quadro funcional abstrato:

$$\begin{cases} \text{Existe uma sequência de funções } (w_\varepsilon, \mu_\varepsilon, \gamma_\varepsilon) \text{ tais que:} \\ \quad (i) \quad w_\varepsilon \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \ \|w_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_0; \\ \quad (ii) \quad w_\varepsilon = 0, \text{ em } \ S_\varepsilon, \\ \quad (iii) \quad w_\varepsilon \rightharpoonup 1, \text{ fraco em } H^1(\Omega), \text{ e q.s. em } \Omega \\ \quad (iv) \quad \mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^N, \\ \quad (v) \quad -\Delta w_\varepsilon = \mu_\varepsilon - \gamma_\varepsilon \text{ onde } \mu_\varepsilon, \gamma_\varepsilon \in H^{-1}(\Omega) \\ \qquad\quad \mu_\varepsilon \to \mu, \text{ forte em } H^{-1}(\Omega) e \\ \qquad\quad \left\langle \gamma_\varepsilon - \nu_\varepsilon \right\rangle_\Omega = 0 \text{ para todo } \nu_\varepsilon \in H_0^1(\Omega) \\ \qquad\quad \text{tal que } \nu_\varepsilon = 0 \text{ em } S_\varepsilon. \end{cases}$$

Utilizando a extensão $\widetilde{u}_\varepsilon$ de u_ε a todo Ω, definida por:

$$\widetilde{u}_\varepsilon = \begin{cases} u_\varepsilon & = & \text{em } \Omega_\varepsilon \\ 0 & = & \text{nos buracos } S_\varepsilon = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{N(\varepsilon)} S_i^\varepsilon, \end{cases}$$

demonstra-se que

$$\widetilde{u}_\varepsilon \rightharpoonup u, \quad \text{fraco em } H_0^1(\Omega),$$

quando $\varepsilon \to 0$, onde $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a única solução do problema original, para cada $\varepsilon > 0$ fixado, estendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = f, & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma, \end{cases}$$

onde μ é uma medida de Radon, não negativa, pertencente a $H^{-1}(\Omega)$. Essa medida aparece nesse estudo e está ligada ao comportamento da capacidade do conjunto S_ε, quando $\varepsilon \to 0$.

A condição sobre os buracos necessária para a construção do quadro funcional de hipóteses - fundamental na demonstração dos resultados, é que os buracos sejam "pequenos", isto é, que o diâmetro $a_{S_i^\varepsilon}$ dos buracos seja assintoticamente menor ou igual ao "diâmetro crítico" a_ε, dado por

$$a_\varepsilon = \begin{cases} C_0 \varepsilon^{(\frac{N}{(N-2)})}, & \text{para } N \geq 3, \\ \delta_\varepsilon \exp(\frac{-C_0}{\varepsilon^2}), & \text{para } N = 2, \end{cases}$$

onde $C_0 > 0$ está fixado e $\varepsilon^2 \log \delta_\varepsilon \to 0$, quando $\varepsilon \to 0$. Quando o diâmetro dos buracos é o crítico, μ é uma constante estritamente positiva. Neste caso, aparece na equação limite o termo adicional de ordem zero μu.

Em [5] obtém-se ainda o resultado de correção

$$\widetilde{u}_\varepsilon = w_\varepsilon u + r_\varepsilon, \quad \text{com } r_\varepsilon \to 0, \text{ forte em } H_0^1(\Omega),$$

que diz que $w_\varepsilon u$ é uma boa aproximação para a solução do problema original.

Capítulo 2

Equação de Navier-Stokes estacionária

Em 1990 *G. Allaire* [1] trabalhou com a homogeneização de problemas envolvendo escoamentos com obstáculos. Em particular, considerou o seguinte sistema de Stokes:

$$\begin{cases} \text{Encontrar } (u_\varepsilon, p_\varepsilon) \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \times [L^2(\Omega_\varepsilon)/\mathbb{R}]; \\ \nabla p_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ div\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Considerando-se Ω_ε como apresentado no capítulo 1, ou seja, com as mesmas condições geométricas sobre os buracos, pode-se construir o seguinte quadro abstrato de hipóteses:

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Existe uma sequência de funções } (w_k^\varepsilon, q_k^\varepsilon, \mu_k^\varepsilon)_{1\le k\le N} \text{ tais que:}\\
(i) \quad w_k^\varepsilon \in [H^1(\Omega)]^N,\ q_k^\varepsilon \in L^2(\Omega),\\
(ii) \quad \left\{\begin{array}{ll} \nabla . w_k^\varepsilon = 0, & \text{em } \Omega\\ w_k^\varepsilon = 0, & \text{nos buracos } S_i^\varepsilon,\end{array}\right.\\
(iii) \quad \left\{\begin{array}{l} w_k^\varepsilon \rightharpoonup e_k, \quad \text{fraco em } [H^1(\Omega)]^N, \text{ onde } e_k \text{ é o}\\ \qquad\qquad\qquad \text{k-ésimo vetor da base canônica do } \mathbb{R}^N,\\ q_k^\varepsilon \rightharpoonup 0, \quad \text{fraco em } L^2(\Omega)/\mathbb{R},\end{array}\right.\\
(iv) \quad \mu_k \in [W^{-1,\infty}(\Omega)]^N,\\
(v) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Para cada seqüência } v_\varepsilon \text{ e para cada } v \text{ tal que}\\ \quad \left\{\begin{array}{l} v_\varepsilon \rightharpoonup v, \text{ fraco em } [H^1(\Omega)]^N,\\ v_\varepsilon = 0, \text{ sobre os buracos } S_i^\varepsilon,\end{array}\right.\\ \text{e para cada } \phi \in \mathcal{D}(0,T), \text{ temos}\\ \qquad \left\langle \nabla q_k^\varepsilon - \Delta w_k^\varepsilon, \phi v_\varepsilon \right\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)} \to \left\langle \mu_k, \phi v \right\rangle_{H^{-1},H_0^1(\Omega)},\end{array}\right.\\
(vi) \quad \text{Existe uma aplicação linear } R_\varepsilon \text{ tal que}\\
\qquad \left\{\begin{array}{l} R_\varepsilon \in \mathcal{L}([H_0^1(\Omega)]^N, [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N),\\ u \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N \Rightarrow R_\varepsilon \widetilde{u} = u, \text{ em } \Omega_\varepsilon,\\ \nabla . u = 0, \text{ em } \Omega \Rightarrow \nabla .(R_\varepsilon u) = 0, \text{ em } \Omega_\varepsilon,\\ \|R_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega_\varepsilon)} \le c.\|u\|_{H_0^1(\Omega)}, \text{ e } c \text{ não depende de } \varepsilon.\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

Se o diâmetro dos buracos for da mesma ordem que o diâmetro "crítico", isto é, se $a_{S_i^\varepsilon} \cong a_\varepsilon$, mostra-se que

$$(\widetilde{u}_\varepsilon, P_\varepsilon(p_\varepsilon)) \rightharpoonup (u,p), \quad \text{fraco em } [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}],$$

onde $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a extensão de u_ε por zero em $\Omega - \Omega_\varepsilon$, P_ε é uma extensão da pressão p_ε, e (u,p) é a única solução do problema homogeneizado

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Encontrar } (u,p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times [L^2(\Omega)/\mathbb{R}];\\ \nabla p - \Delta u + Mu = f, \quad \text{em } \Omega\\ div\ u = 0, \quad \text{em } \Omega,\end{array}\right.$$

onde M é uma matriz simétrica e positiva que depende da forma dos buracos S_i^ε, e Mu é um termo linear da velocidade, de ordem zero;

Em [1] obtém-se ainda os resultados de correção

$$\widetilde{u}_\varepsilon = W_\varepsilon u + r_\varepsilon, \quad \text{com } r_\varepsilon \to 0, \text{ forte em } [W_0^{1,q}(\Omega)]^N,$$

onde W_ε é a matriz formada pelos vetores coluna $(w_k^\varepsilon)_{k=1}^N$, e $q = \frac{N}{N-1}$ se $N \geq 3$ ou $1 \leq q < 2$, se $N = 2$; e

$$P_\varepsilon[p_\varepsilon - p - u.Q_\varepsilon] \to 0 \text{ forte em } L^2(\Omega)/\mathbb{R},$$

onde Q_ε é o vetor de componentes q_k^ε.

No mesmo trabalho são considerados também os casos onde o diâmetro dos buracos é assintoticamente menor que o "crítico", isto é, $a_{S_i^\varepsilon} < a_\varepsilon$ (buracos pequenos); e onde o diâmetro dos buracos é assintoticamente maior que o "crítico", isto é, $a_{S_i^\varepsilon} > a_\varepsilon$ (buracos grandes); porém preservando certas proporções.

Capítulo 3

Mais alguns problemas

3.1 Equação da onda - equação de evolução

No artigo apresentado em 1991 por *D. Cioranescu et all.* [5], estudou-se a homogeneização da equação da onda

$$\begin{cases} u_\varepsilon'' - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \times (0,T),\ T > 0 \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{sobre } \Gamma_\varepsilon \times (0,T) \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon'(x,0) = u_\varepsilon^1, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

com $u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\varepsilon),\ u_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega_\varepsilon),\ f_\varepsilon \in L^1(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))$, e

$$\begin{cases} \widetilde{u_\varepsilon^0} \rightharpoonup u_0, \quad \text{fraco em } H_0^1(\Omega), \\ \widetilde{u_\varepsilon^1} \rightharpoonup u_1, \quad \text{fraco em } L^2(\Omega), \\ \widetilde{f_\varepsilon} \rightharpoonup f, \quad \text{fraco em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{cases}$$

A situação geométrica e o quadro abstrato de hipóteses para esse problema são análogos aos do problema elíptico estacionário; a diferença e a dificuldade é que este problema envolve dependência do tempo. Considerando-se o tamanho dos buracos, mostrou-se que

$$\widetilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)),$$

onde $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a única solução do problema original, para cada $\varepsilon > 0$ fixado, estendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \mu u = f, \quad \text{em } \Omega \times (0,T),\ T > 0 \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0, \quad \text{em } \Omega \\ u'(x,0) = u_1, \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde μ é uma medida de Radon não negativa, sendo positiva quando o tamanho dos buracos é o crítico.

Para esse problema, o resultado de correção é o seguinte:

$$\widetilde{u}_\varepsilon = w_\varepsilon u + r_\varepsilon, \quad \text{com } r_\varepsilon \to 0, \quad \text{forte em } C^0([0,T]; W_0^{1,1}(\Omega)).$$

3.2 Equação do calor - equação de evolução

Em 2002, *J. S. Souza* [10] estudou a homogeneização da equação do calor

$$\begin{cases} u'_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0,T), T > 0 \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{sobre } \Sigma^\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0,T) \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0(x), \quad \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \\ f'_\varepsilon = f'_{1\varepsilon} + f'_{2\varepsilon} \in X, \text{ onde} \\ X = L^1(0,T; L^2(\Omega_\varepsilon)) + L^2(0,T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon)), \\ f_\varepsilon(0) \in L^2(\Omega_\varepsilon)). \end{cases}$$

A situação geométrica e o quadro abstrato de hipóteses para esse problema são análogos aos do problema elíptico estacionário; a diferença e a dificuldade também está no fato de o problema envolver dependência do tempo. Considerando o tamanho dos buracos, mostrou-se que

$$\widetilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;V) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

onde $V = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, d\mu)$, $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a única solução do problema original para cada $\varepsilon > 0$ fixado, estendida por zero nos buracos, e u é a única solução do problema homogeneizado

$$\begin{cases} u' - \Delta u + \mu u = f, \quad \text{em } Q = \Omega \times (0,T),\ T > 0 \\ u = 0 \quad \text{sobre } \Sigma = \Gamma \times (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x), \quad \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0,T]; V), \quad \text{em } \Omega, \end{cases}$$

onde μ é uma medida de Radon não negativa, estritamente positiva quando o tamanho dos buracos é o crítico.

Para esse problema, o resultado de correção é o seguinte:

$$\widetilde{u}_\varepsilon = w_\varepsilon u + r_\varepsilon, \quad \text{com } r_\varepsilon \to 0, \quad \text{forte em } L^2(0,T;W_0^{1,1}(\Omega)).$$

3.3 Equação hiperbólica com um termo de pressão

Em 1995, *J. S. Souza* [9] estudou a homogeneização do seguinte problema misto para a equação hiperbólica com um termo de pressão:

$$\begin{cases} u''_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = f_\varepsilon, \quad \text{em } Q_\varepsilon = \Omega_\varepsilon \times (0,T),\ T > 0 \\ div\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{em } Q_\varepsilon \\ u_\varepsilon = 0, \quad \text{sobre } \Sigma_\varepsilon = \Gamma_\varepsilon \times (0,T), \quad \Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon \\ u_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^0, \quad \text{e} \quad u'_\varepsilon(x,0) = u_\varepsilon^1, \quad \text{em } \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

onde as fronteiras Γ e Γ_ε são de Lipschitz, e os dados u_ε^0, u_ε^1 e f_ε satisfazem:

$$\begin{cases} u_\varepsilon^0 \in V_\varepsilon \cap [H_0^2(\Omega_\varepsilon)]^N, \\ u_\varepsilon^1 \in V_\varepsilon, \\ f_\varepsilon \in W^{1,1}(0,T;H_\varepsilon), \end{cases}$$

com

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon^0 \rightharpoonup u^0, \quad \text{fraco em } V \cap [H^2(\Omega)]^N, \\ \widetilde{u}_\varepsilon^1 \rightharpoonup u^1, \quad \text{fraco em } V, \\ \widetilde{f}_\varepsilon \rightharpoonup f, \quad \text{fraco em } L^1(0,T;H), \\ \widetilde{f}'_\varepsilon \text{ e } \widetilde{f}_\varepsilon(0) \text{ uniformemente limitadas, respect., em } L^1(0,T;H) \text{ e em } H, \end{cases}$$

onde $V_\varepsilon = \{v;\ v \in [H_0^1(\Omega_\varepsilon)]^N,\ div(v) = 0 \text{ sobre } \Omega_\varepsilon\}$, $H_\varepsilon = \{v;\ v \in [L^2(\Omega_\varepsilon)]^N$, $div(v) = 0$ sobre Ω_ε, com $v.\nu = 0$ sobre $\Gamma_\varepsilon\}$, e V e H são os espaços equivalentes para $\varepsilon = 0$.

A situação geométrica e o quadro abstrato de hipóteses para esse problema são análogos aos da equação de Navier-Stokes estacionário; a diferença e a dificuldade é que agora o problema envolve dependência do tempo. Mostrou-se que

$$\begin{cases} \widetilde{u}_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} u, \quad \text{fraco-estrela em } W^{1,\infty}(0,T;V), \\ P_\varepsilon(p_\varepsilon) \rightharpoonup p, \quad \text{fraco em } L^1(0,T;L^2(\Omega)/\mathbb{R}). \end{cases}$$

onde $\widetilde{u}_\varepsilon$ é a extensão de u_ε por zero em $\Omega - \Omega_\varepsilon$, P_ε é o operador prolongamento da pressão, e o par (u, p) é a única solução do sistema homogeneizado

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + Mu + \nabla p = f, \quad \text{em } Q = \Omega \times (0,T) \\ div\ u = 0, \quad \text{em } Q \\ u = 0, \quad \text{sobre } \sum = \Gamma \times (0,T) \\ u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \quad \text{em } \Omega \\ u \in C^0([0,T]; V) \cap C^1([0,T]; H), \end{cases}$$

onde M é uma matriz simétrica e positiva no seguinte sentido:

$$\Big\langle M\phi, \phi \Big\rangle_{\Omega)} \geq 0, \quad \forall\ \phi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N.$$

Os resultados de correção para esta equação são os seguintes:

$$\widetilde{u}_\varepsilon = W_\varepsilon u + r_\varepsilon, \quad \text{com } r_\varepsilon \to 0, \text{ forte em } C^0([0,T]; [W_0^{1,1}(\Omega)]^N),$$

onde W_ε é a matriz formada pelos vetores coluna $(w_k^\varepsilon)_{k=1}^N$; e

$$\int_0^T P_\varepsilon(p_\varepsilon - p - u.q_\varepsilon)\psi(t)dt \to 0 \text{ forte em } L^2(\Omega)/\mathbb{R},$$

onde $\psi \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e q_ε é o vetor de componentes q_k^ε.

Capítulo 4

Problemas relaxados

Em 2004, *G. Dal Maso* e *F. Murat* [7] estudaram o problema de Dirichlet

$$-Au = f,$$

onde A é um operador elíptico linear de segunda ordem com coeficientes mensuráveis limitados em Ω. Foi considerada uma sequência de problemas de evolução com condições de Dirichlet lineares da forma

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^\varepsilon D u_\varepsilon) = f \text{ em } \Omega^\varepsilon \\ u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega_\varepsilon), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde as matrizes A^ε e os domínios variáveis Ω^ε dependem do parâmetro ε.

Os conjuntos Ω^ε, abertos, são todos contidos em um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, fixo, aberto e limitado, e as matrizes A^ε, definidas sobre Ω com coeficientes mensuráveis, são coercivas e limitadas. O processo de homogeneização consiste em estudar o comportamento das soluções u^ε quando ε tende para zero. Quando $\Omega^\varepsilon = \Omega$, existe uma subsequência ainda denotada por (A^ε) e uma matriz A^0, chamada de H-limite de (A^ε), tal que para cada $f \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$, as soluções v^ε dos problemas

$$\begin{cases} v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \\ -\mathrm{div}(A^\varepsilon D v^\varepsilon) = f, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

convergem fracamente em $H_0^1(\Omega)$ para a solução v^0 de

$$\begin{cases} v^0 \in H_0^1(\Omega), \\ -\mathrm{div}(A^0 D v^0) = f, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \end{cases}$$

e satisfazem também

$$A^\varepsilon D v^\varepsilon \rightharpoonup A^0 D v^0, \text{ fracamente em } L^2(\Omega, \mathbb{R}^N)).$$

Sem fazer hipóteses adicionais sobre os conjuntos abertos Ω^ε, prova-se que existe uma subsequência, ainda denotada por (Ω^ε), tal que para cada $f \in H^{-1}(\Omega)$, as soluções u^ε de (4.1) convergem para a solução u do problema

$$\begin{cases} u^0 \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu^0), \\ \displaystyle\int_\Omega A^0 Du^0 Dy dx + \int_\Omega u^0 y d\mu^0 =< f, y >, \forall\ y \in H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega, \mu^0), \end{cases} \tag{4.2}$$

onde μ^0 pertence a $\mathcal{M}_0^+(\Omega)$, uma classe de medidas de Borel não negativas que tendem para zero sobre qualquer conjunto de capacidade zero, mas que podem assumir o valor $+\infty$ sobre alguns subconjuntos de Ω.

Problemas do tipo (4.2) são chamados de problemas de Dirichlet relaxados, e têm sido estudados para descrever os limites das soluções de (4.1), quando as matrizes A^ε não dependem de ε. Por outro lado, problemas do tipo (4.1) podem ser escritos como problemas de Dirichlet relaxados por considerar as medidas μ^ε, definidas por:

$$\mu^\varepsilon(B) = \begin{cases} 0, \text{ se } cap(B/\Omega^\varepsilon) = 0, \\ +\infty, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Pode-se considerar não somente o problema de Dirichlet (4.1) referente às medidas μ^ε definidas acima, mas num caso mais geral, estudar uma sequência de problemas de Dirichlet com medidas arbitrárias $\mu^\varepsilon \in \mathcal{M}_0^+(\Omega)$.

No estudo desta equação foi aplicada a seguinte noção de H-convergência: dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$, define-se $M_\alpha^\beta(\Omega)$ como o conjunto de todas as matrizes $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n})$ tais que $A(x) \geq \alpha I$ e $(A(x))^{-1} \geq \beta^{-1} I$ q.s. em Ω. Uma sequência (A^ϵ) de matrizes em $M_\alpha^\beta(\Omega)$ H-converge para uma matriz A^0 em $M_\alpha^\beta(\Omega)$, se, $\forall\ f \in H^{-1}(\Omega)$, a sequência u^ϵ de soluções dos problemas

$$\begin{cases} u^\epsilon \in H_0^1(\Omega), \\ -\text{div}(A^\epsilon Du^\epsilon) = f, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

satisfaz

$$u^\epsilon \rightharpoonup u^0 \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega)$$
$$A^\epsilon Du^\epsilon \rightharpoonup A^0 Du^0 \text{ fracamente em } L^2(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

onde u^0 é a solução do problema:

$$\begin{cases} u^0 \in H_0^1(\Omega), \\ -\text{div}(A^0 Du^0) = f, \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases}$$

Capítulo 5

Comentário Final

Os problemas apresentados nos capítulos 1, 2 e 3 apresentam como restrição o fato de o domínio Ω_ε ser obtido de Ω através da extração de buracos distribuídos periodicamente com período $\varepsilon > 0$. O problema relaxado do capítulo 4 apresenta uma dependência simultânea de ε tanto nos coeficientes quanto nos domínios perfurados, que agora podem ser mais gerais. O problema de Dirichlet relaxado é também mais geral .

O desafio que se apresenta agora é obter soluções para problemas semelhantes aos dos capítulos 1 a 3, utilizando a técnica aplicada na solução do problema do capítulo 4.

Referências Bibliográficas

[1] Allaire, G. *Homogénéisation des èquations de Navier-Stokes.* Thèse, Universitè Paris VI, 1989.

[2] Brahim-Otsmane, S; Francfort, G. A.; Murat, F. *Correctors for the homogenization of the wave and heat equations.* J. Math. Pures et Appl., 71, n.3, p.197-231, 1992.

[3] Cherkaev, A.; Khon, R. *Topics in the mathematical modeling of composite materials.* Andrej Cherkaev and Robert Kohn Editors, Serie Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, ISBN 0-8176-3662-5, 1997.

[4] Cioranescu, D.; Donato, P. *An introduction to homogenization.* Oxford lecture series in mathematics and its applications, New York, 17, p. 203, 1999.

[5] Cioranescu, D.; Donato, P.; Murat, F.; Zuazua, E. *Homogenization and correctors for the wave equation in domains with small holes.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18, p. 251-293, 1991.

[6] Cioranescu, D.; Murat, F. *Un terme étrange venu d'alleurs.* Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications (H. Brézis and J. L. Lions, eds), Collège de France Seminar, v. II e III, Research Notes in Mathematics, v. 60 e 70, Pitman, p.93-138 e p.154-178, 1982.

[7] Dal Maso, G.; Murat, F. *Comportement asymptotique et correcteurs pour des problèmes de Dirichlet linéaires avec des opérateurs et des domaines qui varient simultanément.* Ann. I. H. Poincaré - AN 21, p.445-486, 2004.

[8] Lions, J. L. *Asymptotic expansions in perforated media with a periodic structure.* Rocky Mountain Journal of Mathematics 10:1, p.125-140, 1980.

[9] Souza, J.S. *Homogeneização de alguns problemas de contorno.* Tese. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, 1995.

[10] Souza, J. S. *Homogenization of the heat equation in open sets perforated with tiny holes.* Computational & Applied Mathematics, Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional, V. 21, n.2, p.461-484, 2002.

[11] Tartar, L. *Qu'est-ce que l'homogénéisation?* Portugaliae Mathematica, vol. 64, Issue 4, pp.389 - 444, 2007.