RETICULADOS PLANOS

Vanderley Alves Ferreira Junior[1], Carlos Alexandre Ribeiro Martins[2]

1-Academico do curso de licenciatura em matemática da UTFPR; 2-Professor assistente, dedicação exclusiva, UTFPR - Unidade do Sudoeste - Campus de Pato Branco. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Geometria e Topologia.

Resumo - Este artigo consiste em uma introdução à teoria dos reticulados, apresentando conceitos principais sobre esta importante ferramenta matemática. O estudo está limitado a reticulados no plano, suas propriedades fundamentais e uma aplicação desta estrutura na resolução do problema do empacotamento esférico.

Palavras-Chave: reticulados, empacotamento esférico, densidade

PLANE LATTICES

Abstract- This article consists in an introduction to the lattice theory, presenting main concepts about this important mathematic tool. The study is limited to plane lattices, their fundamental properties and an application of this structure to the solving of the sphere packing problem.

KeyWord: lattice, sphere packing, density

1. INTRODUÇÃO

O problema do empacotamento esférico em Rn é o equivalente no espaço ao problema de determinar o melhor código corretor de erros: objetiva determinar uma distribuição de pontos de modo a cobrir a maior parte do espaço, porém neste caso o espaço é Rn e vai ser coberto por esferas de mesmo comprimento, de modo que duas esferas não tenham interseção, e a uniao de todas as esferas cubra a maior parte possivel deste espaço.

2. RETICULADOS

Seja D um subconjunto de R^2, diremos que D é um reticulado se existe uma base de R^2 B={v1,v2} tal que u pertence a D se e somente se existem inteiros a e b tais que u = av1 + bv2, isto é, se todo vetor de D for combinação linear inteira dos vetores de B.

Chamaremos B de base do reticulado D. A base de um reticulado não é única, mas se A={u,v} é uma base de um reticulado D, então uma outra base B={w,z} de R^2 será também base de D se e somente se B também estiver contida em D e a matriz de mudança da base B para a base A tem entradas inteiras e determinante igual a 1 ou -1 (ALVES et al., 2006).

Dada uma base W={u,v} de um reticulado D, temos que todo elemento x de D é da forma x = au+bv. Se u = (a11,a21) e v = (a12,a22), então todo elemento de D se escreve como produto x = Ak, onde A = {aij}2x2 e k pertence a Z^2. Temos então que D é a imagem da função F que vai de Z^2 em R^2 definida por F(u) = Au. A será chamada de matriz associada à base W.

Sejam A={u,v}, B = (s,t) bases de um reticulado D e a, b matrizes associadas às bases A e B, respectivamente. Então a = M b, onde M é a matriz de mudança da base A para B. Isto implica |det a| = |det M b| =|det M| |det b| =1 |det b| =|det b|. Portanto o módulo do determinante da matriz de uma base de D não depende da base, assim defina o determinante de D como det D = |det a| , onde a é a matriz de uma base qualquer de D.

Considere em R^2 a distância usual: d(x,y) = || x-y ||. Definimos a distância mínima d de D como a menor distância entre dois pontos distintos de D: d = min{d(x,y): x e y pertencem a D, x e y distintos}.

Uma propriedade dos reticulados é que todo reticulado é geometricamente uniforme, isto é, dados quaisquer a e b pertencentes a D, existe uma isometria f que leva D em D tal que f(a) = b. De fato, as translações são isometrias em R^2 com a distância usual e dados x,y em D, podemos definir uma função f que vai de D em D tal que f(v) = (y - x) + v. Esta função é uma translação que leva x em y

(ALVES et al., 2006).

Um modo de distribuir as circunferências sobre o plano é colocá-las com centro em pontos do reticulado e com raio igual à metade da distância mínima entre dois destes pontos. Este raio será chamado raio de empacotamento de D.

Esta distribuição cumpre uma condição do problema, pois distribui esferas que não se intersectam por todo o espaço. Resta, então, determinar qual a fração do plano que ela cobre. Como a área do plano e a soma das áreas das circunferências são infinitas, calcularemos a razão entre a área de uma circunferência de centro C e a área ocupada pelos pontos que estão mais próximos de C que de qualquer outro ponto do reticulado.

O conjunto destes pontos é chamado região de Voronoi do ponto C e será denotado R(C). A região de Voronoi R(C) de um ponto é uma região fundamental de D, isto é, é um subconjunto fechado de R^2 tal que tomando os conjuntos transladados R(C) + v, v pertencente a D, cobrimos todo o plano e os conjuntos não tem interseção ou se intersectam apenas nas arestas. Uma outra região fundamental de R^2 é o paralelogramo gerado por uma base de D, P={v em R^2: v = av1 + bv2, 0 <= a <= 1 e 0 <= b <= 1} (ALVES et al., 2006).

Calcular a área de uma região de Voronoi pode ser complicado usando apenas a definição, mas como o volume de qualquer região fundamental de um reticulado é o mesmo, temos que esta área é igual à área do paralelogramo gerado por uma das bases de D, e esta área é igual ao módulo do determinante da matriz que tem por colunas os vetores da base. Note que este valor foi definido como o determinante de D (ALVES et al., 2006).

Se M é a área de uma das circunferências, podemos definir então a densidade m(D) do reticulado D como m(D) = M / det D. Como cada circunferência está contida na região de Voronoi do seu centro, a área desta circunferência é menor do que ou igual à área da região, logo a densidade é um número entre 0 e 1. O problema que se coloca então é: como determinar o reticulado de maior densidade?

A resposta a essa pergunta requer o conceito de equivalência de reticulados: dados D e E reticulados, dizemos que D é equivalente a E se existem um operador ortogonal U e um escalar p real positivo tal que u pertence a D se e somente se u = pU(v), com v em E. Neste caso diremos que p é a razão de semelhança entre D e E (ALVES et al., 2006).

Denotemos por u.v o produto interno usual em R^2. Como U é ortogonal, o adjunto de U é seu operador inverso, logo pU(u).pU(u) = p^2(u.U*(U(u))) = p^2(u.u), e portanto ||pU(u)|| = |p| ||u||, que implica que o raio de empacotamento de D é |p| vezes o raio de empacotamento de E (COELHO e LOURENÇO, 2001). Além disso se A é uma matriz associada a uma base de E e **I** é a matriz identidade de ordem 2, então pUA é uma matriz associada à uma base de D e det D = |det pUA| = |det p**I**| |det U| |det A| = p^2 det E.

Considere que a distância mínima de E é j, calculando a densidade de D, temos

m(D) = 3,14(pj)²/4det D = 3,14 p²j²/4p²det E = 3,14j²/4det E = m(E).

Conclui-se que dois reticulados equivalentes têm a mesma densidade. Outra conseqüência interessante é que, fixado um valor para a distância mínima, qualquer reticulado é equivalente a um reticulado com aquela distância mínima. De fato, se d é a distância mínima escolhida e o reticulado D tem distância mínima k, então um reticulado semelhante com distância mínima d é o obtido ao aplicar (d/k)**I** em D.

Se B={u,v} e u e v tem mesmo comprimento, que é a distância mínima d do reticulado D gerado por B, então o reticulado C gerado por L={u, jv} com j real, j > 1, é menos denso que D. De fato, det C = j det D > det D e como a distância mínima de D é o comprimento de u, temos que a distância mínima de C também é d, portanto concluímos que m(c) < m(d).

Vamos considerar reticulados com distância mínima d=1, logo o raio de empacotamento é 0,5. Vamos supor também que os vetores da base têm comprimento 1, pois pelo comentado acima, se um dos vetores tem norma maior que um, a densidade será menor que a do reticulado cuja base é formada por estes mesmos vetores normalizados.

Seja C um reticulado com base B = {u,r} com raio 0,5 e ||u|| = ||v|| = 1, como operadores de rotação são ortogonais (COELHO e LOURENÇO, 2001), existe um reticulado D equivalente a C com base m = (0,1), g = (a,b). Como g é unitário, existe s real tal que a= cos s e b= sen s (LEITHOLD, 1986).

Então o determinante de D é det D = |sen s|, e como o raio é 0,5, temos que a densidade de D é m(D) = 3,14/(4|sen s|).

Se cos s = 0,5, temos m(D) = 3,14/3,46 que é aproximadamente 0,9096, que é a melhor densidade possível no plano. Se cos s < 0,5 então sen s > 0,86, logo 3,14/4|sen s| < 0,9096, e se cos s > 0,5 então ||m - g||² = (2 - 2cos s) < (2 - 1) = 1, e temos || m - g|| < 1. Como m - g pertence a D, teríamos um vetor em D com norma menor que a sua distancia mínima, um absurdo. Portanto a densidade máxima é obtida quando s = 60º e cos s = 0,5.

3. CONCLUSÃO

Podemos concluir que o reticulado gerado por { (1;0), (cos 60º,sen 60º) } é o mais denso de R^2, a menos de equivalência, com uma densidade de aproximadamente 0,9096, de modo que o empacotamento por ele gerado cobre mais de 90% da área do plano (ALVES et al., 2006).

REFERÊNCIAS

ALVES, M. M. S. et al. **Uma introdução à Teoria de Códigos**. 1 ed. SBMAC: São Paulo, 2006.

HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Códigos corretores de erros**. 1 ed. IMPA: Rio de Janeiro, 2002.

COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de álgebra linear**. 1 ed. Editora da Universidade de São Paulo: São Paulo, 2001.

LEITHOLD, L. **O cálculo com geometria analítica**. 2 ed. Harbra: São Paulo, 1986.

HEFEZ, A. **Curso de Álgebra**: Coleção Matemática Universitária. Volume 1. 2. ed. IMPA: Rio de Janeiro. 1993.