

CADEIAS ABSORVENTES DE MARKOV NO PROCESSO PRODUTIVO DE FILÉ CONGELADO DE PESCADA

Rogério Malta Branco(1) & Antônio Sérgio Coelho (2)

(1) Eng. Eletricista, M.Sc em Métodos Numéricos em Engenharia, Curso de Tecnologia em Automação Industrial da UTFPR, Unidade de Pato Branco e doutorando do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção UFSC.
(2) Bacharel em Matemática, Dr. em Engenharia de Produção, professor do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da UFSC.

rmbanco@hotmail.com; coelho@deps.ufsc.br;

Resumo - Com o intuito de utilizar métodos estocásticos em sistemas produtivos visando o aprimoramento das análises e tomadas de decisão é que objetiva-se aplicar as cadeias estacionárias de Markov em um estudo de caso que demonstre estas potencialidades. Este método é aplicado no sistema agroindustrial, mais precisamente no setor agroalimentar (pesca), com a finalidade de analisar algumas etapas do processo de produção de filé congelado, de forma a auxiliar na mudança existente do setor, de tornar-se menos artesanal e mais competitivo.

Palavras-Chave - Métodos estocásticos, Cadeias de Markov.

CADEIAS ABSORVENTES DE MARKOV NO PROCESSO PRODUTIVO DE FILÉ CONGELADO DE PESCADA

1. INTRODUÇÃO

Com o intuito de melhorar a análise de processos produtivos e auxiliar em tomadas de decisão, muitas empresas baseiam suas análises em sistemas de gerência de produção e ERP's (*Enterprise Resource Planning*). O ERP, segundo Gomes & Ribeiro (2004) abrange uma gama de atividades suportadas por um software modular, que auxiliam na gerência de partes importantes do negócio, incluindo projeto do produto, compra de matéria-prima ou componentes e controle de estoque. Pode incluir também módulos para controle financeiro e de recursos humanos. Os autores mencionam também os pré-requisitos e cuidados para uma correta implantação deste sistema.

Como principal objetivo, visa-se apresentar meios que auxiliem a análise e tomada de decisão em sistemas produtivos. Assim sendo, propõe-se a aplicação das cadeias estacionárias de Markov em processos produtivos. Tal método possibilita revelar muitas informações úteis nas etapas em estudo, onde suas características favorecem a visualização de eventos no sistema e permitem um apoio necessário para analisar e avaliar processos.

Será visto a aplicação do método no estudo de caso de uma indústria pesqueira localizada na cidade de Rio Grande, no Rio Grande do Sul, com o intuito de demonstrar o seu potencial.

2. REVISÃO DA LITERATURA

2.1. Processos estocásticos, cadeias de Markov e matrizes de transição.

Consiste basicamente em uma família de variáveis aleatórias $\{X_t\}$, onde t é um parâmetro indexador pertencente a um conjunto de índices T . Nas situações mais comuns, o índice t

corresponde a unidades discretas de tempo (ex. $T=\{1,2,\dots\}$), mas também é possível ter-se t associado a tempo contínuo (ex. $T=\{0 < t < +\infty\}$). No primeiro caso, diz-se que o processo é estocástico discreto, e no segundo caso, estocástico contínuo.

2.1.1. Processos e Cadeias de Markov

Os processos de Markov são um tipo de processo estocástico que possui a propriedade de que dado um valor de X_t , os valores de X_s , para $s > t$ não são influenciados pelos valores de X_u , para $u < t$.

É possível representar o comportamento de um sistema descrevendo todos os diferentes estados que este sistema venha a apresentar e indicando as transições possíveis de um estado para outro durante sua execução. Ao processo markoviano está associado um conjunto de estados, sendo que só um poderá ser assumido a cada passo e a evolução do sistema é representada por transições do processo de um estado para outro. Da mesma forma que um processo estocástico, um processo markoviano pode ser discreto ou contínuo no tempo.

Um processo markoviano de tempo discreto é tido como Cadeia de Markov quando seu espaço de estados é contável ou finito e cujo conjunto de índices $T=\{1,2,\dots\}$. Em termos formais tem-se, para qualquer índice n e quaisquer estados $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$:

$$P[X_{n+1} = j | X_0 = i_0, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i] = P[X_{n+1} = j | X_n = i] \quad (1)$$

Note-se que X_n está no estado i se $X_n = i$.

A probabilidade de X_{n+1} estar no estado j sabendo que X_n está no estado i é designada por probabilidade de transição a um passo e denotada por $P_{ij}^{n,n+1}$. Isto é, $P_{ij}^{n,n+1} = P[X_{n+1} = j | X_n = i]$.

A notação chama a atenção para o fato de, em geral, as probabilidades de transição são funções não só dos estados inicial e final, mas também do momento da transição. Quando as probabilidades de transição a um passo são independentes do tempo n , dizemos que a cadeia de Markov é homogênea no tempo. O nosso estudo centrar-se-á, essencialmente, neste tipo de cadeias. Neste caso, $P_{ij}^{n,n+1}$ não depende de n e por isso escreve-

se apenas P_{ij} para denotar a probabilidade de transição do estado i para o estado j em um passo.

As probabilidades de transição das cadeias de Markov são representadas através de matrizes de dimensões $n \times n$, sendo n o número de estados desta cadeia. Estas matrizes, denominadas P , são estocásticas, pois cada linha que as compõe é uma distribuição (soma das probabilidades é igual a 1).

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0M} \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & P_{1M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M0} & P_{M1} & \cdots & P_{MM} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Assim, um processo de Markov fica completo se for dada sua matriz P de transição e o seu estado inicial X_0 .

2.1.2. Cadeias absorventes de Markov

O estudo das cadeias de Markov finitas com estados absorventes requer que a matriz de probabilidades de transição P seja expressa de modo especial. Isto implica que as linhas de P que correspondem aos estados não absorventes devem ser arranjadas em primeiro lugar e, em seguida, nas últimas linhas figuram os estados absorventes. A expressão (3) mostra a representação da matriz de transição com estados absorventes.

$$P = \begin{bmatrix} N & A \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (3)$$

P é uma matriz celular, contendo 4 matrizes: duas sendo não absorventes (N e A) e outras duas (0 e I) que denotam matrizes absorventes.

Considerando-se inicialmente que a quantidade de estados não absorventes é quantizada por n e os estados absorventes são representados por a , e assim pode-se definir as dimensões destas sub-matrizes que compõe P como sendo: $\mathbf{N} = n \times n$, $\mathbf{A} = n \times a$, $\mathbf{0} = a \times n$ e $\mathbf{I} = a \times a$.

As probabilidades de migração de um estado não absorvente para um não absorvente ou para um absorvente estão organizadas nas matrizes $N(n \times n)$ e $A(n \times a)$, respectivamente. Já as

probabilidades de migração de estados absorventes para não absorventes ou absorventes podem, respectivamente, ser organizadas nas matrizes $0(axn)$ e $l(ixa)$.

Partindo da análise deste tipo de cadeia, é possível obter os seguintes dados: o número esperado de passos antes de o processo ser absorvido e o número esperado de vezes que o processo se encontra em qualquer estado não absorvente. É possível obter também a probabilidade de absorção por qualquer estado absorvente.

De acordo com Alves & Delgado (1997), pelos conceitos da probabilidade clássica, uma maneira de se achar o número esperado de passos antes de o processo ser absorvido seria obter o número esperado de vezes que o processo estaria em cada um dos estados não absorventes e somá-los. Isto totalizaria o número de passos antes de o processo ser parado e, neste sentido, o número de passos esperado para a absorção. Rosa (2006) descreve esta situação nas expressões (5) e (6).

$$\Sigma(K=0|\infty) N^{(K)} = N^0 + N^1 + \dots + N^\infty, \quad (5)$$

Tem-se, de (3) que $N^0 = I$, e recorrendo-se as séries convergentes aplicadas a matrizes, tem-se em (6):

$$\Sigma(K=0|\infty) N^{(K)} = (1-N)^{-1} \quad (6)$$

Em outras palavras, a matriz $(1-N)^{-1}$ resultante irá indicar o número de esperado de vezes que um processo está em cada estado não absorvente antes da absorção.

2.1.3. Primeira passagem para cadeias não absorventes de Markov

Em alguns casos, é interessante determinar-se em uma cadeia não absorvente, o número esperado de passos antes do processo atingir o estado não absorvente j dado que começou no estado i . Shamblyn & Stevens (1986) sugere a modificação desta matriz não absorvente, criando para o estado desejado, uma absorção.

3. MÉTODOS E MATERIAIS

Nesta seção serão tratados tanto dos meios para a modelagem de problemas econômicos reais com uso das cadeias de Markov. A seguir apresenta-se o fluxograma que irá reger a implantação das matrizes estacionárias de Markov ao processo produtivo em estudo. Como já descrito na seção anterior, o fluxograma apresentado na Figura 1 relaciona os principais passos para alcançar este objetivo.

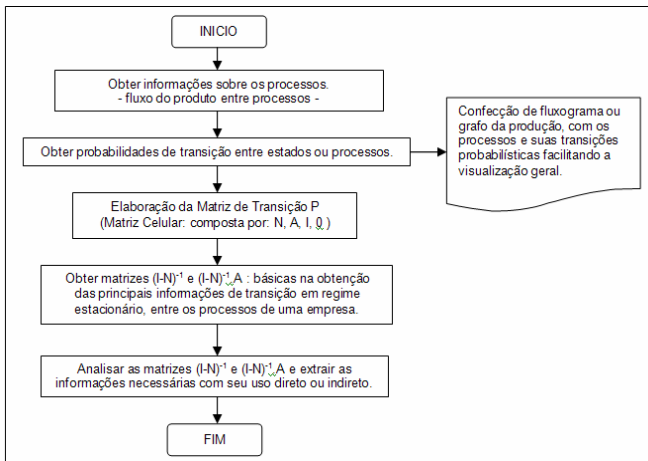


FIGURA 1 – Estágios sugeridos para a utilização de cadeias de Markov em problemas reais

4. ESTUDO DE CASO – FILÉ DE PESCADA

O estudo em questão trata da aplicação das matrizes de transição de cadeias Markovianas junto ao beneficiamento de pescado, possibilitando avaliar os custos de produção, necessidades de compra de insumos para obtenção de produção final esperada, geração de subprodutos e resíduos, além dos custos a eles associados. A fábrica de beneficiamento de pescado em questão está localizada na cidade de Rio Grande/RS.

Rodrigues (2004) chama a atenção para a sazonalidade das safras de peixes e dos camarões. Concordante, o período de obtenção dos dados tange ao da safra da pescada, o seu

processamento em filé congelado torna-se o processo em foco deste trabalho. Observa-se que o refugo deste processo é também insumo na produção de farinha e óleo de peixe. Como resíduo final, tem-se basicamente água, que obrigatoriamente passará por tratamento de efluentes.

4.1. O processamento de filé de pescada

O processo de beneficiamento de pescado inicia com a chegada de matéria-prima na fábrica. Este procedimento compreende a recepção de pescado no cais da empresa pelos funcionários. Após o desembarque, os peixes são submetidos a uma pré-lavagem e posteriormente são classificados por tamanho e tipo de peixe. Após, são direcionados para a filetaria.

A filetaria apresenta em sua infra-estrutura, ocupadas por operárias, ganhando proporcional o que vierem a produzir. Basicamente, consiste nas ações de retirada de cabeça, cauda, vísceras e couro, para depois ser extraída a porção de carne que se designa por filé de peixe. Em média, a empresa considera que de cada 10Kg de peixe que ingressa no processo Filetaria, apenas 4Kg chegam até a pesagem (portanto, 40%). O restante é refugo, conduzido para a fabricação de farinha e óleo de peixe.

O processo seguinte ao de filetaria é o de interfolhamento, onde bandejas metálicas comportam camadas de filé, intercaladas com folhas plásticas. Seguinte, o próximo setor é o Armário de Placas com propósito de congelamento e compactação dos filés. Após, os blocos congelados seguem para outra etapa, onde devem ser desformados. Perdas da ordem de 15% são constatadas neste processo, que tornam-se refugo e também são conduzidos para processamento de farinha e óleo de peixe.

A etapa seguinte é também o processo final, responsável pela embalagem do peixe congelado em caias de aproximadamente 15Kg.

4.2. Aplicação das cadeias de Markov

Com os dados obtidos e as características do processo produtivo, estrutura-se um grafo simplificado, além da representação da produção de farinha, óleo de peixe e água (resíduo final). É importante associar ao grafo, um nó que denote a

compra de refugo de outras empresas. Como o enfoque está no custo e fluxo de e entre cada etapa do processo, o grafo da Figura 2 ilustra o esquema final e simplificado do processamento de filé de pescada observado, bem como seus derivados.

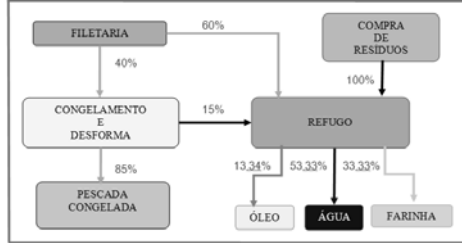


FIGURA 2: Esquema que representa o processamento do filé de pescada e seus derivados

De posse do grafo assumido na Figura 2, constrói-se a matriz de transição P do processo de filé de pescada. E parte-se por identificar as matrizes celulares de P. Procura-se então as matrizes $(I-N)^{-1}$ e $(I-N)^{-1}A$, ilustradas em (8) e (9).

$$(I-N)^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{Fil} & \text{C\&D} & \text{Ref} & \text{Com} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Fil} \\ \text{C\&D} \\ \text{Ref} \\ \text{Com} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 100\% & 40\% & 66\% & 0\% \\ 0\% & 100\% & 15\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 100\% & 0\% \\ 0\% & 0\% & 100\% & 100\% \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} \quad (8)$$

$$(I-N)^{-1}.A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{PeC} & \text{Oleo} & \text{Far} & \text{Água} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{Fil} \\ \text{C\&D} \\ \text{Ref} \\ \text{Com} \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} 34\% & 9\% & 22\% & 35\% \\ 85\% & 2\% & 5\% & 8\% \\ 0\% & 13\% & 33\% & 53\% \\ 0\% & 13\% & 33\% & 53\% \end{matrix} \end{matrix} \end{matrix} \quad (9)$$

É importante salientar que a Tabela 2 relaciona os dados fornecidos pelo setor produtivo da referida empresa no que tange aos custos de produção por quilograma processado.

TABELA 2- Relação de custos individuais por Kg processado

Processo/Insumo	Custo (R\$/Kg)
Proc. Filetaria	0,0329
Proc. Interf/Cong/Desforma	0,05
Proc. Óleo	1,00
Proc. Farinha	0,08
Insumo Refugo externo	0,01
Insumo Peixe Fresco	2,50

Fonte: Setor produtivo da empresa observada, fornecidos em maio/junho de 2006.

5. RESULTADOS

A fim de permitir uma interface amigável para testar o potencial de aplicação das cadeias de Markov no processo produtivo em discussão, foi confeccionada uma planilha em Microsoft Excel ® com as informações da produção de filé de pescada, dado o período de obtenção dos dados estarem em sintonia com a safra da pescada. As informações da Tabela 2 auxiliam no cálculo dos custos de produção.

Observa-se agora que 66% do peixe que ingressa no sistema da Figura 2 é convertido em refugo e será reprocessado, tornando-se matéria-prima da produção de Óleo e Farinha de peixe. O resíduo final é água e será encaminhada pra tratamento de efluentes e depois liberada.

Da matriz $(I-N)^{-1}A$, na linha correspondente ao processo (não absorvente) Filetaria, pode-se dispor de outras informações. Obtém-se, por exemplo que, em média, pode-se esperar ao final de todos os processos, dos 100% do peixe fresco que ingressa, 36% serão transformados em filé congelado de peixe. São esperados 9%, 22% e 35% de Óleo, Farinha e Água, respectivamente.

A matriz $(I-N)^{-1}$ em conjunto com os dados da Tabela 2 e a quantidade de matéria-prima adquirida, permite obter os custos de produção por setor, como se observa na Figura 3(a).

A entrada de refugo externo, procedimento freqüente no cotidiano da empresa, tem fim específico de agregar valor ao mesmo pelo processamento em farinha e óleo de peixe. Desta forma, torna-se necessário obter o custo para tais entradas externas ao sistema. O procedimento de cálculo é análogo ao aplicado anteriormente. A Figura 3(b) ilustra a parte da planilha que realiza este cálculo.

Uma vez que a matriz $(I-N)^{-1}A$ fornece as informações de probabilidade de transição de um estado não absorvente para um absorvente, ao optar-se pela “Filetaria” como origem e desejar-se saber o quanto esperar de produção na etapa “Peixe congelado”, basta consultar o elemento $a_{1,1}$ de (9).

2. Quais os custos de produção individuais de cada setor?				3. Qual o custo de matéria prima comprada como refugo ?			
Considerar:				Kg de refugo que é comprado: <input type="text" value="1"/> kg			
Kg de peixe fresco que ingressa: <input type="text" value="1.000"/> kg							
Custos:	Mprima		2,5000	Custo:	Mprima:		0,0100
	Filetaria		0,0329		Proc. Óleo:		0,1333
	Cong & Desforma		0,0200		Proc. Farinha:		0,2666
	Refugo:		-		Proc. Água:		1,1388
	Total parcial 1:		2,5529		Total parcial 1:		1,5487
	Desp. Peixe congel.:		-		Custo total:	R\$	1,55
	Proc. Óleo:		0,0880				
	Proc. Farinha:		0,1760				
	Proc. Água:		0,7516				
	Total parcial 2:		1,0156				
	Custo total:	R\$	3,57				

(a)

(b)

FIGURA 3 - Custos médios para entrantes (a) peixe fresco e (b) refugo externo

Para se obter uma previsão de quanto deve ingressar de pescado no setor de origem a fim de obter-se certa quantidade média esperada na etapa de destino é fornecida por $a_{i,j}$ de $(I-N)^{-1}A$ denota, porém ao inverso. Sabendo-se do esperado na etapa absorvente, basta realizar o produto com o inverso deste $a_{i,j}$.

As matrizes de transição são igualmente úteis na previsão média de quanto esperar em cada processo absorvente (aqui como sendo as etapas finais do processo), dado que ocorreu alguma parada ou re-início de processo com ocorrência de estoques intermediários.

No processo de formação do preço de venda, independente da posição que a empresa ocupa no mercado e como são as características deste mercado, prever o custo marginal de produção é fundamental. No caso do produto “Filé congelado”, não seria diferente. Desta forma, é importante dispor, tanto o custo do mesmo, quanto do refugo, a ser transformado em outros subprodutos de menor valor agregado.

De acordo com os interesses da empresa e obviamente da quantidade de informações que forem disponibilizadas pela mesma, maior será o apoio destas ferramentas no auxílio à estimativa média de capacidades e custos produtivos em cada etapa do processo estudado.

6. ANÁLISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES

A matriz de transição relaciona probabilidades, constantes com o tempo, de migração de um estado para o outro. Sua aplicação em sistemas de produção permite analisar as probabilidades que o sistema impõe sobre os recursos produtivos durante cada etapa de transformação. Isto possibilita conceder uma visão mais cristalina do processo, auxiliando na tarefa de planejamento produtivo.

As planilhas Excel[®] possibilitam a entrada de dados de forma simples e objetiva mostrando-se bastante prática na confecção da plataforma de cálculo das matrizes necessárias. Como o procedimento mais exigente em termos computacionais é a inversão de matriz, realizado apenas uma vez, justifica seu uso também pela interface amigável e facilidade de desenvolvimento, configuração e documentação.

O propósito de ter uma visão rápida e nítida dos procedimentos de produção do filé de pescada em suas capacidades e custos é alcançado com a matriz de transição, que organiza os fluxos de produto em sua estrutura fundamental.

Em casos de retomada de produção, considerando-se os estoques intermediários quanto ao que será entregue ao final de uma jornada produtiva, a planilha promove a interação das matrizes com o vetor de estoque intermediário de produção. Isto

permite uma boa visão das capacidades de cada setor e com isso, obtém-se maior agilidade no acompanhamento da produtividade.

Quanto à formação do preço final do “Filé congelado”, há repasse do custo do refugo, visto que boa parte da matéria-prima não chegará ao cliente como tal. Com a aplicação dos dados na planilha, tem-se que o refugo terá um custo médio de R\$ 2,88/Kg. Quanto ao “Filé congelado”, o processo agrega um pouco mais de valor, finalizando em aproximadamente R\$ 7,51/Kg. Não foram considerados custos como processamento dos refugos ou tratamento de efluentes e lembra-se que é preciso quase 3Kg de peixe fresco para obter-se apenas 1Kg deste produto na expedição. A planilha indica o quanto repassar de custo ao produto final para a formação do preço marginal do mesmo, onde a definição constante deste preço é fundamental para a sobrevivência da empresa no mercado.

7. REFERÊNCIAS

ALVES, R. & DELGADO, C. **Processos Estocásticos**, Porto: Portugal, 1997. Disponível em: <http://www.de.ufpe.br/~rjdsc/teaching/et301/handouts/Economia,%20Porto-Processo%20de%20Markov.pdf>. Acessado em: 01 de junho de 2006.

CHAPMANN, S.J. **Programação em Matlab para engenheiros**, São Paulo: Editora Thompson, 2003

GOMES, C. & RIBEIRO, P. **Gestão da Cadeia de Suprimentos Integrada à Tecnologia da Informação**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

RODRIGUES, G.S. **Tecnologia de grupo: uma proposta de arranjo celular para sistemas produtivos**. Santa Maria, 2004. Dissertação (Mestrado) – Pós-Graduação em Engenharia de Produção, Universidade Federal de Santa Maria.

ROSA, M.P. **Cadeias absorventes de Markov**. Porto Alegre, 2006, Disponível em< <http://puhrs.campus2.br/~mroza/ads/cadab.doc>>. Acessado em: 08 jun. 2006.

SHAMBLIN, J.E. & STEVENS JR., G.T. **Pesquisa Operacional: uma abordagem básica**. São Paulo: Atlas, 1986.