



Métodos diretos e iterativos para a solução dos sistemas de equações lineares gerados da formulação de Elementos Finitos

Johannes Hosp Porto ¹ Luiz Antonio Farani de Souza ²

21 novembro 2017

Resumo – Neste artigo é realizado um estudo comparativo de métodos numéricos para a solução dos sistemas de equações lineares gerados da formulação de Elementos Finitos à cada iteração no processo incremental. Problemas estáticos de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico são resolvidos por meio do método de Newton-Raphson padrão associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. As estruturas são discretizadas com o método de Elementos Finitos Posicional, cuja formulação é fundamentada no princípio da mínima energia potencial, e as incógnitas do problema são as coordenadas nodais do elemento finito. Considera-se que o material tenha comportamento constitutivo elástico linear. O método iterativo dos Gradientes Conjugados e os métodos diretos Fatoração LU, Fatoração de Cholesky e Eliminação de Gauss são implementados computacionalmente em ambiente Matlab. Os resultados numéricos mostram o melhor desempenho do método iterativo nas simulações de problemas com número maior de incógnitas.

Palavras-chave: Treliça espacial. Gradientes Conjugados. Comprimento de Arco. Elementos Finitos Posicional.

1. INTRODUÇÃO

Treliça espacial é uma estrutura rígida leve que consiste de barras e nós interligados em um padrão geométrico triangular. A rigidez inerente a esse padrão deriva sua resistência. Sob a aplicação de carregamento, forças normais de tração ou compressão são transmitidas ao longo do comprimento da barra (SANGEETHA; KUMAR; SENTHIL, 2015). Desde o início do seu uso comercial, esse sistema tem sido cada vez mais popular, especialmente em grandes áreas abertas com

poucos ou nenhum suporte intermediário, como ilustrado na Figura 1. Aplicações bem sucedidas de sistemas estruturais treliçados abrangem estádios, edifícios públicos, centros de exposições, hangares de avião, pontes suspensas, entre outras (SEÇER, 2009). A compreensão de treliças espaciais sujeitas a grandes deformações elásticas pode prevenir falhas súbitas por flambagem ocasionadas por carregamentos operacionais ou por cargas que surgem durante a fase construtiva. Na Figura 2 é mostrado o colapso do telhado da arena de Hartford ocorrido em 1978

¹ johannes@alunos.utfpr.edu.br, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Câmpus Apucarana
² lasouza@utfpr.edu.br, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Câmpus Apucarana



(HRINDA, 2010).



Figura 1 – Sistema estrutural treliçado. Fonte: Seçer (2009).



Figura 2 – Colapso do telhado da arena de Hartford. Fonte: Hrinda (2010).

No campo da Engenharia de Estruturas, mais especificamente na área da aplicação numérica, a crescente simulação de modelos estruturais complexos, por meio do Método dos Elementos Finitos, tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do sistema de equações lineares gerado à cada iteração.

Para a resolução de um problema estrutural não linear num procedimento incremental e iterativo, um sistema de equações lineares decorrente da formulação de Elementos Finitos é resolvido à cada iteração no passo de força corrente até que se atinja a convergência. Em geral, a obtenção dessa solução demanda grande esforço computacional (tempo de processamento) durante a simulação. Tal sistema

pode ser mal - condicionado próximo de pontos críticos pertencentes à trajetória de equilíbrio.

Uma forma comum de representação gráfica da resposta estática não linear de uma estrutura consiste no traçado da curva deslocamento *versus* força (trajetória de equilíbrio), em que a abscissa corresponde a uma componente de deslocamento de um nó selecionado, e a ordenada representa o parâmetro de força. Uma metodologia eficiente de solução para um problema de estruturas com comportamento não linear deve ser capaz de traçar toda a trajetória de equilíbrio (caminhos primários e secundários) do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir (RODRIGUES, 1997).

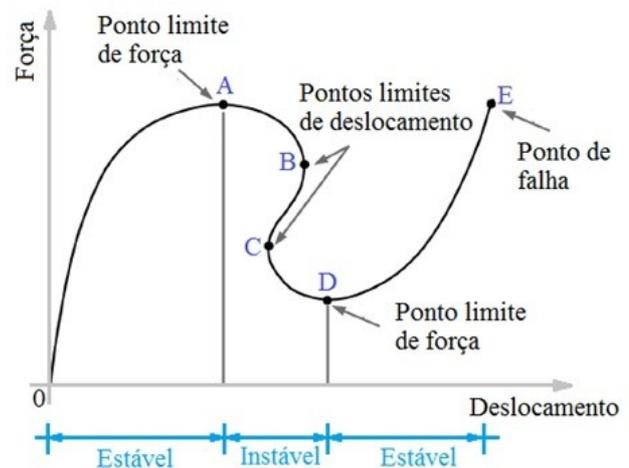


Figura 3 – Pontos limites na trajetória de equilíbrio. Fonte: Adaptado de Leon et al. (2011).

Problemas não lineares decorrentes da não linearidade geométrica e/ou material apresentam pontos críticos ou limites ao longo da trajetória de equilíbrio. Pontos limites, indicados na Figura 3, são pontos no caminho da solução em que a estrutura perde estabilidade (por exemplo, flambagem). Os pontos limites de força ocorrem quando a força máxima ou mínima local é alcançada na curva de força *versus* deslocamento - pontos A e D (a tangente nesses pontos é horizontal). Os pontos limites de deslocamento ocorrem nos pontos B e C cujas tangentes são verticais na curva de solução. A estabilidade está diretamente relacionada aos pontos limites de força, em que a



região entre esses pontos é instável. Usando a teoria da estabilidade em um sistema conservador, um ponto limite ocorre quando a matriz de rigidez global é singular (LEON et al., 2011).

Este artigo tem por objetivo comparar o desempenho de algoritmos de métodos diretos e iterativos para a solução dos sistemas de equações lineares gerados à cada iteração no processo incremental, de problemas de treliças espaciais com não linearidade geométrica. As análises estáticas não lineares com o *software* Matlab são efetuadas com o método de Newton - Raphson padrão (NR) associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. O método iterativo dos Gradientes Conjugados (GC) e os métodos diretos clássicos Fatoração LU, Fatoração de Cholesky e Eliminação de Gauss são implementados computacionalmente. Os resultados alcançados evidenciam o melhor desempenho do método iterativo GC, em comparação com os demais, quanto ao tempo de processamento e números totais de passos de força e iterações acumuladas até a convergência para a solução com o método NR.

2 MATERIAL E MÉTODOS

2.1 Problema estrutural

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrita por (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014):

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (1)$$

na qual $\mathbf{K}^{(k-1)}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural, $\mathbf{g}^{(k)}$ é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos pontos nodais da estrutura $\mathbf{d}^{(k-1)}$), e $\lambda^{(k)}$ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor \mathbf{F}_r , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A solução do sistema de equações não lineares dado em (1) é obtida usando um esquema

iterativo e incremental. Para uma sequência do parâmetro de força λ , uma sequência do respectivo incremento de deslocamentos \mathbf{u} é calculada. O critério de convergência é expressado pela norma da força residual e da norma da força total aplicada:

$$\|\mathbf{g}\| \leq tol \cdot \|\mathbf{F}_r\|. \quad (2)$$

em que *tol* é a tolerância dada.

2.2 Método do Comprimento de Arco Linear

A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa, identificando e passando por todos os pontos críticos. Para tal, utiliza-se um processo incremental-iterativo que consiste de duas etapas (LEON et al., 2011):

- 1) A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um subincremento de força (definido como parâmetro subincremento de força inicial - $\delta\lambda^{(0)}$), procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro, determina-se o incremento inicial de deslocamentos nodais $\Delta \mathbf{u}^{(0)}$; e
- 2) na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem os deslocamentos nodais (\mathbf{u}) e o parâmetro de força (λ), então uma equação adicional de restrição é requerida. O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

No método de Comprimento de Arco Linear, a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à tangente inicial em cada passo. A expressão para o subincremento do parâmetro de força é dada por (RIKS, 1972; RIKS, 1979):



$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{\Delta u^{(0)T} \delta u_g^{(k)}}{\Delta u^{(0)T} \delta u_r^{(k)}} \quad (3)$$

na qual $\delta u_g^{(k)}$ é a parcela referente às forças residuais g , $\delta u_r^{(k)}$ é a parcela referente às forças de referência F_r e $\Delta u^{(0)}$ é o incremento inicial de deslocamentos nodais.

2.3 Método Eliminação de Gauss

O método da Eliminação de Gauss (EG) e suas variações (RAO, 2004) é um dos métodos mais utilizados na solução de sistemas de equações lineares. Esse método consiste em transformar o sistema $Ku = g$ em um sistema triangular equivalente (GOLUB; LOAN, 1996), buscando utilizar os elementos de uma dada linha para anular os elementos das linhas abaixo dela a partir da diagonal principal (MARANHÃO, 2013). A solução do sistema é obtida por meio da substituição regressiva, em que os elementos do vetor de incógnitas são obtidos em ordem decrescente (NOGUEIRA, 2011). O algoritmo da Eliminação de Gauss está descrito na Figura 4.

```

Para k ← 1:n-1 faça
  Para i ← k+1:n faça
    m ← K(i,k)/K(k,k)
    Se m ≠ 0 então
      Para j ← k+1:n faça
        K(i,j) ← K(i,j) - m K(k,j)
      Fim-Para
      b(i,1) ← b(i,1) - m b(k,1)
    Fim-Se
  Fim-Para
Fim-Para

```

Figura 4 – Algoritmo de Eliminação de Gauss sem pivoteamento.

2.4 Método Fatoração LU

A decomposição LU fatora uma matriz quadrada K em um produto de uma matriz triangular inferior por uma triangular superior, e é obtida por meio do método de eliminação de Gauss com pivoteamento, em que L é a matriz triangularizada e U é a última matriz dos multiplicadores obtida somada com a matriz identidade. Tem-se que se K for inversível,

então há uma matriz de permutação de linhas P de maneira que $K^* = PK$ é triangularizável pelo método de Gauss e $K^* = LU$ (MARANHÃO, 2013). Na Figura 5 é apresentado o algoritmo para a fatoração LU .

```

Para k ← 1:n faça
  L(k,k) ← 1
  U(k,k) ← K(k,k)
  Para i ← k+1:n faça
    m ← K(i,k) / K(k,k)
    Se m ≠ 0 então
      Para j ← k+1:n faça
        K(i,j) ← K(i,j) - m K(k,j)
      Fim-Para
      U(i,j) ← K(i,j)
    Fim-Se
  L(i,k) ← m
  U(k,i) ← K(k,i)
Fim-Para
Fim-Para

```

Figura 5 – Algoritmo Fatoração LU.

2.5 Método Fatoração de Cholesky

Um caso particular da decomposição LU quando a matriz K é simétrica e positiva-definida é a fatoração de Cholesky $K = GG^T$, em que G é uma matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal e $G = LD^{1/2}$, em que D é uma matriz com os elementos da diagonal U . A vantagem da fatoração de Cholesky é que ela efetua cerca de metade das operações aritméticas quando comparada à decomposição LU (MARANHÃO, 2013). Na Figura 6 aparece o algoritmo em que armazena as matrizes G e G^T numa única matriz.

```

Para k ← 1:n faça
  K(k,k) ← K(k,k)1/2
  K(k+1:n,k) ← K(k+1:n,k)/K(k,k)
  Para j ← k+1:n faça
    Se K(j,k) ≠ 0 então
      K(j:n,j) ← K(j:n,j) - K(j,k) K(j:n,k)
    Fim-Se
  Fim-Para
Fim-Para

```

Figura 6 – Algoritmo Fatoração de Cholesky.



2.6 Método dos Gradientes Conjugados

O método iterativo dos Gradientes Conjugados (GC) é utilizado na resolução de sistemas lineares, em que a matriz dos coeficientes (matriz de rigidez K) é simétrica positiva-definida (BURDEN; FAIRES, 2008). A estratégia desse método consiste em sempre ir buscando direções ortogonais p_0, p_1, \dots, p_{i-1} às direções já calculadas anteriormente. Para cada uma dessas direções se encontrará uma das coordenadas de u . Com isso, após n passos, o processo terminará e a solução procurada é encontrada (ALMEIDA; PAIVA, 1999). O algoritmo para o Método GC é apresentado na Figura 7.

```

d0 ← 0
r0 ← g
p0 ← r0
Enquanto ||di+1 - di||/||di+1|| > tol ou ||ri+1|| > tol faça
  aux_1 ← K pi
  aux_2 ← riT ri
  α ← aux_2/(piT aux_1)
  di+1 ← di + α pi
  ri+1 ← ri - α aux_1
  β ← (ri+1T ri+1)/aux_2
  pi+1 ← ri+1 + β pi

```

Fim-Enquanto

Figura 7 – Algoritmo método dos Gradientes Conjugados.

3 RESULTADOS E ANÁLISE

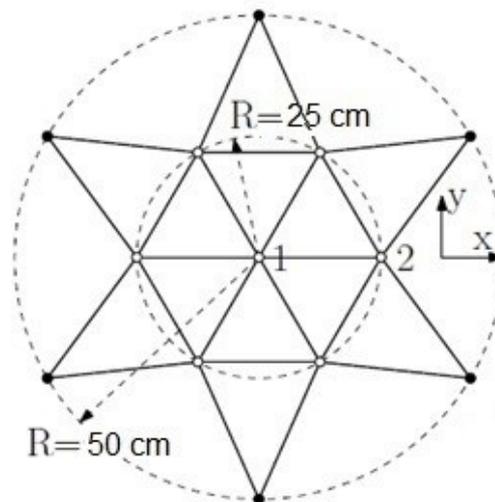
Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de dois problemas de treliças espaciais com comportamento não linear geométrico, com o objetivo de verificar a aplicabilidade e o desempenho dos algoritmos implementados com o software Matlab. O peso próprio das estruturas é desprezado nas simulações. No cômputo do tempo de processamento das análises não estão contabilizadas a geração da malha de Elementos Finitos e a saída de dados.

3.1 Cúpula com 24 barras

Considere na Figura 8 uma cúpula com 24 barras com rigidez axial adimensional $EA = 8,0 \times 10^7$ N. Na sua vista superior, o círculo externo possui raio de 50 cm e altura zero, e o círculo interno possui raio de 25 cm e altura de 6,216 cm. No ápice da treliça, com altura

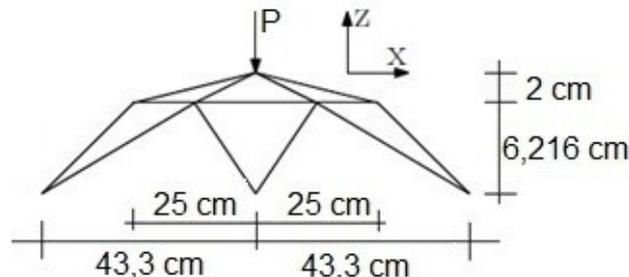
8,216 cm, é aplicada uma força concentrada P . Para as simulações são adotados os seguintes parâmetros: tolerância $tol = 10^{-8}$ e incremento de força $\Delta P = 100$ N. Na Tabela 1 são apresentados os resultados numéricos - tempo de processamento (em segundos), número de passos de força (NP) e número de iterações acumuladas (k_t) até a convergência para a solução do método NR, e número de iterações acumuladas (j_t) para o método GC.

Na Figura 9a aparecem as trajetórias de equilíbrio (curva deslocamento vertical no nó 1 versus força P) havendo boa concordância com os resultados obtidos por Bonet, Gil e Wood (2012).



Vista superior

- graus de liberdade livres xyz no nó
- graus de liberdade restritos xyz no nó



Vista lateral

Figura 8 – Modelo estrutural da treliça espacial do tipo cúpula.

A cobertura deformada com a indicação das barras tracionadas e comprimidas é mostrada na Figura 9b.



Verifica-se, na Figura 9a, o comportamento complexo da trajetória com Pontos Limites de Força e Pontos Limites de Deslocamento, caracterizados por tangentes horizontais e verticais, respectivamente.

Tabela 1 – Resultados numéricos para a cúpula.

Método	j_t	t (s)	NP (k_t)
Cholesky	-	4,775	
LU	-	3,076627	
EG	-	3,185	725 (1461)
GC	14667	2,905066	

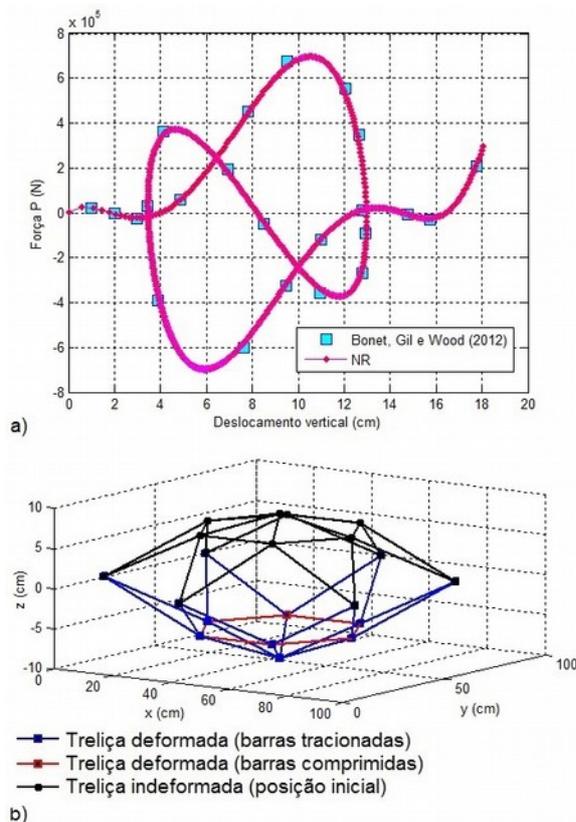


Figura 9 – Cúpula: a) Trajetórias de equilíbrio; e Treliça deformada.

3.2 Cobertura

Na Figura 10 são apresentados dois modelos estruturais de cobertura do tipo quadrado sobre quadrado submetidas a forças concentradas P nos nós indicados, cujos módulos piramidais têm dimensões $(2,0 \times 2,0 \times 1,5) \text{ m}^3$, variando-se o número de módulos nas direções x e y, respectivamente: a) 10×10 módulos (221 nós e 800 elementos); e b) 15×15

módulos (481 nós e 1800 elementos).

São consideradas barras de seção tubular vazada $\Phi 76 \times 2$ nos banzos inferiores e $\Phi 60 \times 2$ para as demais barras, com módulo de elasticidade longitudinal $E = 200,0 \text{ GPa}$. Nas simulações são considerados os seguintes parâmetros: $\Delta P = 0,01 \text{ N}$ e $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-6}$. Na Figura 11 são mostradas as configurações indeformada (posição inicial) e deformada (posição final) das treliças, bem como a indicação das barras que estão tracionadas e comprimidas. Os resultados numéricos (tempo, NP, k_t e j_t) são apresentados na Tabela 2.

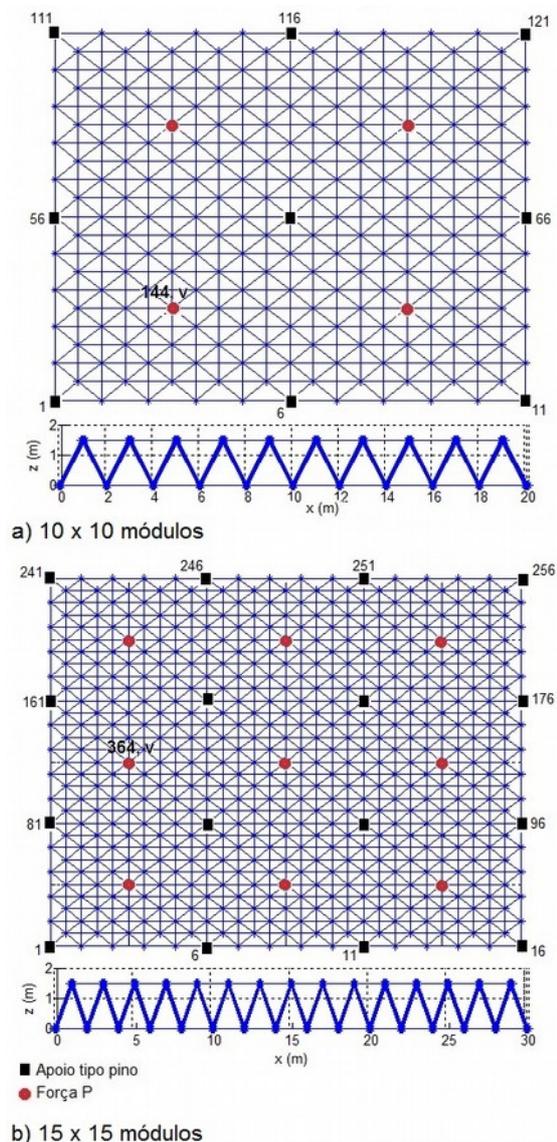
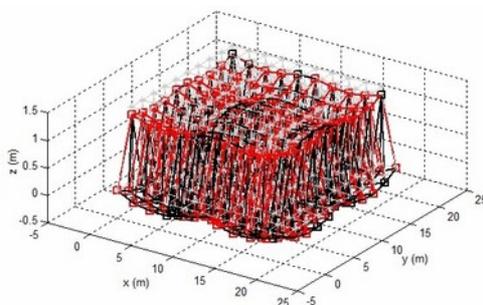


Figura 10 – Modelo estrutural da treliça espacial do tipo cobertura: a) 10×10 módulos; e b) 15×15 módulos.

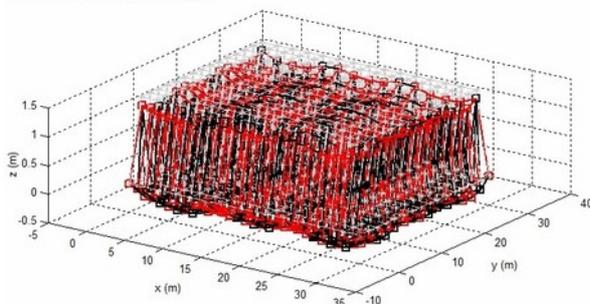


Tabela 2 – Resultados numéricos para a treliça espacial do tipo cobertura.

10x10 módulos			
Método	j_e	t (s)	NP (k_e)
Cholesky	-	18,335	10 (30)
LU	-	29,105	
EG	-	63,639	
GC	1960	2,564	
15x15 módulos			
Método	j_e	t (s)	NP (k_e)
Cholesky	-	147,992	14 (42)
LU	-	487,589	
EG	-	1095,493	
GC	3618	18,805	



a) Cobertura 10x10 módulos



b) Cobertura 15x15 módulos

- Treliça deformada (barras comprimidas)
- Treliça deformada (barras tracionadas)
- Treliça indeformada (posição inicial)

Figura 11 – Configurações indeformada e deformada da cobertura.

3.3 Análise dos resultados numéricos

No primeiro exemplo os tempos de processamento com os métodos diretos e iterativo ficaram próximos, uma vez que o problema de cúpula é de pequeno porte com somente 39 variáveis. Já no segundo exemplo, com o aumento do número de variáveis do problema, fica evidente o melhor desempenho do método iterativo GC em comparação com os métodos diretos. Os métodos iterativos requerem menos memória e possuem menor custo computacional em

problemas de grandes dimensões.

Em geral, o processo de solução dos métodos diretos exigem o armazenamento completo da banda da matriz (incluindo valores nulos) e pode representar um alto custo para problemas com grande quantidade de graus de liberdade (SMITH; GRIFFITHS, 2004). Nessa situação, análises de médio porte, com cerca de 1000 elementos, podem requerer mais de 800 MB para o armazenamento da banda (YAMASSAKI, 2014).

No processo incremental e iterativo com o método de NR associado com a técnica de Comprimento de Arco Linear são resolvidos dois sistemas de equações lineares à cada iteração (cálculo das parcelas δd_g e δd_r). Assim, como é utilizada a mesma matriz K para resolver tais sistemas, os métodos Fatoração LU e Fatoração de Cholesky são mais eficientes (menor custo computacional) em comparação com o método de Eliminação de Gauss, visto que a fatoração é feita uma única vez e são utilizadas as mesmas matrizes triangulares nas substituições regressivas e sucessivas.

Nas simulações não ocorreram instabilidade numérica com o método GC. Quando o sistema é bem condicionado o método converge rapidamente, caso contrário, a convergência é sofrível tornando o método inadequado para a resolução do sistema de equações lineares. Pode-se acelerar a convergência do método GC utilizando-se pré-condicionadores (ALMEIDA; PAIVA, 1999).

A matriz de rigidez K do sistema estrutural é caracterizada por um elevado índice de esparsidade. Pode-se obter uma eficiência numérica melhor dos algoritmos implementados por meio de procedimentos que armazenam os coeficientes não nulos dessa matriz e efetuam as operações com tais elementos, evitando-se os cálculos redundantes com elementos nulos.

4. CONCLUSÃO

Destaca-se no primeiro exemplo a boa concordância entre os resultados aqui obtidos e os da literatura no que tange à obtenção da trajetória de equilíbrio, validando o código computacional desenvolvido em



ambiente Matlab. A consideração dos efeitos de segunda ordem na análise pode afetar significativamente o comportamento pré-crítico e a capacidade de carga da estrutura.

Resolver os sistemas de equações lineares gerados à cada iteração da formulação de Elementos Finitos é, em geral, o que demanda maior tempo e esforço computacional durante o processamento. Com o estudo e implementação computacional de algoritmos de métodos iterativos e diretos, esta pesquisa pretende auxiliar o projetista calculista na escolha do método mais adequado para o estudo de treliças com comportamento não linear, de maneira a diminuir o

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Valério da Silva; PAIVA, João Batista de. Aplicação do método dos gradientes conjugados com o uso de pré-condicionadores em problemas do MEF. In: XX Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, São Paulo, 1999. *Anais...* São Paulo: Eds. P. M. Pimenta, R. M. L. R. F. Brasil, E. S. Almeida N., 1999.

BONET, Javier; GIL, Antonio J.; WOOD, Richard D. **Worked examples in nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge University Press, 2012.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. **Análise Numérica**. 8. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

GOLUB, Gene H.; LOAN, Charles F. Van. **Matrix Computations**. 3. ed. Maryland: Johns Hopkins University Press, 1996.

HRINDA, Glenn A. **Snap-Through Instability Patterns in Truss Structures**. NASA Langley Research Center, Hampton, Virginia 2383, 2010.

LEON, Sofie E.; PAULINO, Glaucio Hermogenes; PEREIRA, Anderson; MENEZES, Ivan Fabio Mota de; LAGES, Eduardo Nobre. A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes. **Applied Mechanics Reviews**, v. 64, p. 1–26, 2011.

MARANHÃO, Viviane Teles de Lucca. **Estudo de técnicas de paralelização de métodos computacionais de fatoração de matrizes esparsas aplicados à redes bayesianas e redes credais**. Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, São Paulo, 2013.

MAXIMIANO, Dalilah Pires; SILVA, Andréa Regina Dias da; SILVEIRA, Ricardo Azoubel da Mota. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Revista Escola de Minas (Impresso)**, v. 67, p. 143–150, 2014.

tempo de resposta do problema.

Em adição, evidencia-se a necessidade da utilização de um método incremental-iterativo para a solução adequada de problemas com não linearidade geométrica. A estratégia de continuação Comprimento de Arco linear mostrou-se adequada na obtenção de trajetória de equilíbrio com Pontos Limites de Força e de Deslocamento.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e à Fundação Araucária pelo apoio dado para o desenvolvimento dessa pesquisa.

NOGUEIRA, Edmilson Charles. **Estudo da paralelização para solução do sistema linear do Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional) - Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

RAO, Singiresu S. **The Finite Element Method in Engineering**. Paris: Elsevier Science & Technology Books, 2004.

RIKS, Eduard. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, p. 1060–1066, 1972.

RIKS, Eduard. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, p. 529–551, 1979.

RODRIGUES, Rogério de Oliveira. **Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1997.

SANGEETHA, P.; KUMAR, P. Naveen; SENTHIL, R. Finite Element analysis of space truss using MATLAB. **ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences**, v. 10, n. 8, p. 3812–3816, 2015.

SEÇER, Mutlu. Inelastic and large deformation analyses of plane trusses. **Technology**, v. 12, n.3, p. 175–184, 2009.

SMITH, Ian M., GRIFFITHS, D. Vaughan. **Programming the Finite Element Method**. Wiley: EUA, 2004.

YAMASSAKI, Renato Toshio. **Um programa de elementos finitos em GPU e orientado a objetos para análise dinâmica não linear de estruturas**. 2014. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo.



Direct and iterative methods for solving the systems of linear equations generated of the Finite Element formulation

Johannes Hosp Porto ³ Luiz Antonio Farani de Souza ⁴

21 novembro 2017

Abstract – In this paper we perform a comparative study of numerical methods for solving the systems of linear equations generated from the finite element formulation at each iteration in the incremental process. Static problems of trusses space with nonlinear geometric behavior are solved by the Newton-Raphson standard method associated with the Linear Arc-Length path-following technique. Structures are discretized with the Positional Finite Elements method, whose formulation is based on the principle of least potential energy, and the unknowns of the problem are the nodal coordinates of the finite element. It is considered that the material has linear elastic constitutive behavior. The Conjugated Gradients iterative method and LU Factoration, Cholesky Factoration and Gauss Elimination direct methods are implemented computationally in Matlab environment. The numerical results show the best performance of the iterative method in the simulations of problems with greater number of unknowns.

Keywords: Space Truss. Conjugated Gradients. Arc-Length. Positional Finite Elements.

Correspondência:

Luiz Antonio Farani de Souza

Rua Marcílio Dias, 635 CEP 86812-460 - Apucarana, Paraná, Brasil.

Recebido: 17/09/2017

Aprovado: 21/11/2017

Como citar: PORTO, Johannes Hosp; SOUZA, Luiz Antonio Farani de. Métodos diretos e iterativos para a solução dos sistemas de equações lineares gerados da formulação de Elementos Finitos. *Syn. scy. UTFPR*, Pato Branco, v. 12, n. 1, p. 228–236. 2017. ISSN 2316-4689 (Eletrônico). Disponível em: <<https://periodicos.utfpr.edu.br/synscy>>. Acesso em: DD mmm. AAAA.

DOI: "registro apenas quando a revista for depositada no portal do PERI"



Direito autoral: Este artigo está licenciado sob os termos da Licença **Creative Commons** Atribuição 4.0 Internacional.

³ johannes@alunos.utfpr.edu.br, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Câmpus Apucarana
⁴ lasouza@utfpr.edu.br, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Câmpus Apucarana